

УДК 536.25

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМ ПО ОТНОШЕНИЮ
К КОНВЕКТИВНОМУ ПЕРЕМЕШИВАНИЮ**

СИМАНОВСКИЙ И. Б.

Возникновение и развитие конвекции в двухслойной системе, подогреваемой снизу, исследовалось в работах [1–5] в предположении, что граница раздела жидкостей горизонтальна и не подвержена деформациям. Это предположение, однако, может не выполняться, если поверхностное натяжение на границе раздела мало, а жидкости имеют либо близкие плотности, либо сверху расположена более тяжелая жидкость. В настоящей работе предпринята попытка изучить режимы конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела, подогреваемой снизу или сверху. Учитывается совместное действие конвективного и релей-тейлоровского механизмов неустойчивости равновесия; поверхностное натяжение на границе раздела предполагается исчезающе малым, термокапиллярные эффекты не учитываются. Для численного решения уравнений конвекции применяется двухжидкостный вариант метода маркеров и ячеек [6–9]. Построена диаграмма режимов. Показано, что в зависимости от значений параметров система либо сохраняет двухслойную структуру, либо развитие конвективного движения приводит к разрушению границы раздела и полному перемешиванию жидкостей.

1. Рассмотрим полость квадратного сечения (сторона квадрата $2a$), заполненную двумя вязкими несжимаемыми жидкостями; в состоянии равновесия граница раздела жидкостей горизонтальна и проходит посередине полости. Все границы полости твердые; горизонтальные границы $y=0$ и $y=2a$ поддерживаются при постоянных различных температурах $T=\theta$ и 0 (случай $\theta > 0$ соответствует подогреву снизу, а $\theta < 0$ — сверху); вдоль вертикальных границ $x=0$ и $2a$ температура изменяется по линейному закону (ось x — горизонтальна, ось y направлена вертикально вверх).

Безразмерные уравнения, описывающие плоское конвективное движение среды, динамические и термодинамические параметры которой зависят от координат, имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \\ & + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + Gr\beta T - \frac{\rho}{Fr} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr c_p}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y , p — полное давление, T — температура, g — ускорение силы тяжести, ρ , μ , κ , β и c_p — со-

ответственно плотность, коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности, объемного расширения и удельная теплоемкость, являющиеся функциями координат вследствие взаимного проникновения жидкостей. В (1.1)–(1.4) в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно величины a , $\rho_1 a^2 / \mu_1$, $\mu_1 / \rho_1 a$, $\mu_1^2 / a^2 \rho_1$, θ .

Индексом 1 отмечены характеристики жидкости, занимавшей в равновесном состоянии верхнюю половину полости, а индексом 2 — характеристики нижней жидкости. Величины ρ , μ , κ , β , c_p , входящие в уравнения, также являются безразмерными и определены как отношения параметров среды к соответствующим параметрам верхней жидкости. Числа Фруда Fr , Грасгофа G и Прандтля P определены через характеристики верхней жидкости

$$Fr = \frac{\mu_1^2}{\rho_1^2 g a^3}, \quad G = \frac{g \beta_1 \theta a^3 \rho_1^2}{\mu_1^2}, \quad P = \frac{\mu_1 c_p}{\kappa_1} \quad (1.5)$$

На твердых стенках скорость обращается в нуль: $u=v=0$. На горизонтальных границах полости $T=1$ (при $y=0$) и 0 (при $y=2$). Распределение температуры вдоль вертикальных границ имеет вид

$$T = \frac{2-y}{\kappa+1}, \quad 1 \leq y \leq 2; \quad T = 1 - \frac{\kappa y}{\kappa+1}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Решение задачи осуществлялось с помощью двухжидкостного варианта метода маркеров и ячеек [6–9], в котором используются маркеры двух типов, помечающие частицы первой и второй жидкостей. Каждый маркер перемещается в соответствии с величиной и направлением скорости в данном месте. Поле скоростей рассчитывается на основе уравнений, описывающих движение однородной среды, характеристики которой (плотность, вязкость и т. д.) меняются от точки к точке и со временем; изменение этих характеристик, обусловленное перемешиванием жидкостей, определяется по перемещениям маркеров.

Плотность в некоторой ячейке расчетной сетки определяется по формуле

$$\rho = (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2) (N_1 + N_2)^{-1}$$

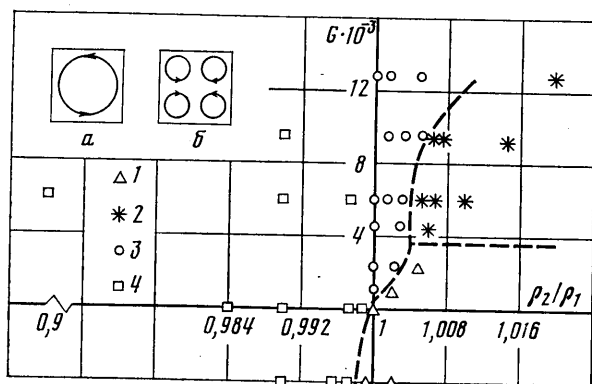
где ρ_1 и ρ_2 — плотность каждой из жидкостей, а N_1 и N_2 — числа маркеров соответствующего типа в ячейке сетки, остальные характеристики жидкостей вычисляются по аналогичным формулам.

Для численного решения уравнений (1.1)–(1.4) использовалась дивергентная разностная схема, в которой законы сохранения выполняются для каждой ячейки прямоугольной расчетной сетки.

2. Начальным состоянием в расчетах служило состояние механического равновесия, при котором граница раздела жидкостей проходит посередине полости, скорость во всех точках равна нулю, температура меняется только вдоль вертикальной оси y по линейному закону, а поле давлений соответствует гидростатическому распределению и равновесной температуре (см. (1.2)) $\partial p / \partial y = G \rho \beta T - \rho / Fr$. В начальный момент времени на исходное состояние налагаются возмущения, не затрагивающие поля скоростей и давлений. Возмущения имеют вид отклонений температуры от равновесных значений в отдельных несимметричным образом расположенных точках. Далее, при фиксированных значениях параметров проводилось наблюдение за эволюцией начальных возмущений, которая приводила к возникновению определенного режима конвекции.

Численное моделирование движений, возникающих в двухслойной системе, проводилось для жидкостей, близких по физическим свойствам. Как показывают расчеты, для таких систем устойчивость равновесия и структура движений при данной степени подогрева определяются в первую очередь разностью плотностей жидкостей (и в гораздо меньшей сте-

пени — различием в значениях остальных параметров). Поэтому основные расчеты относятся к случаю, когда значения всех параметров (кроме плотности) одинаковы для обеих жидкостей; значения чисел Прандтля и Фруда были фиксированы: $P=1$, $Fr=10^{-5}$. Величина числа Фруда выбиралась из соображений, связанных с применимостью приближения Буссинеска. Это приближение оправдано, если добавки плотности, обусловленные тепловым расширением, малы по сравнению со средним значением плотности, т. е. $\beta\theta \ll 1$. Отсюда, как видно из (1.5), получаем ограничение на значения чисел Фруда и Грасгофа: $\beta\theta = G Fr \ll 1$. При $Fr=10^{-5}$ и изменении G в пределах от 0 до 10^4 приближение Буссинеска можно считать применимым.



Фиг. 1

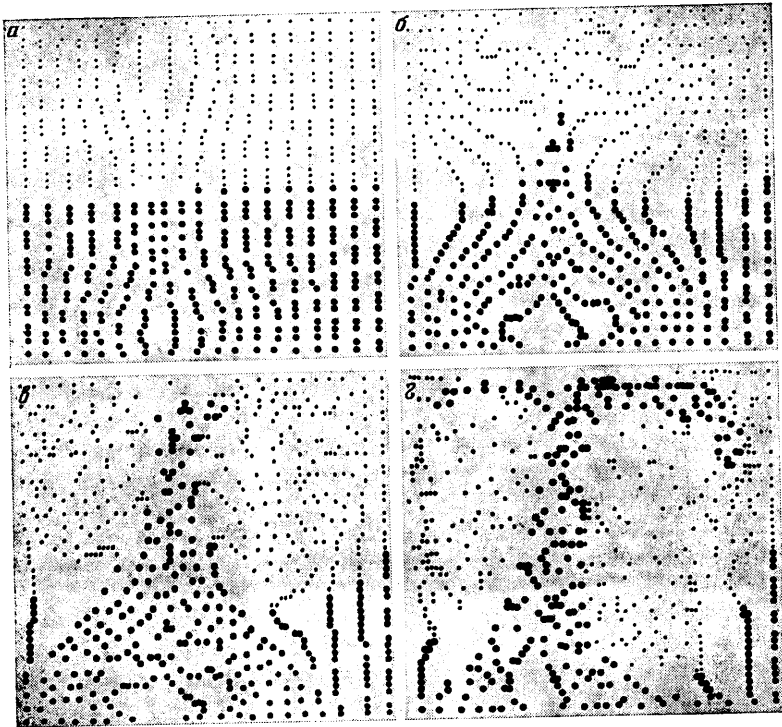
При указанном выборе значений параметров задача полностью определяется двумя основными параметрами: числом Грасгофа G и отношением плотностей $\rho = \rho_2/\rho_1$. При использовавшихся в расчетах значениях G и ρ развитие начальных возмущений приводило к одному из следующих режимов: механическому равновесию, релей-тейлоровской неустойчивости, двухслойной конвективной структуре с практически плоской горизонтальной границей раздела, общей циркуляции жидкости во всей полости с разрушением границы раздела. Сводная диаграмма режимов, реализующихся в двухслойной системе, представлена на фиг. 1. Точками 1 на диаграмме отмечены состояния равновесия, которые установились в результате развития возмущений при заданных параметрах G и ρ , точками 2 — состояния, при которых система при наличии конвекции сохраняет двухслойную структуру, точками 3, 4 — состояния, когда граница раздела разрушилась и жидкости перемешались. В тех случаях, когда процесс перемешивания протекал быстро, он трактовался как развитие релей-тейлоровской неустойчивости, если же характерное время развития перемешивания было значительным, естественно считать, что оно обусловлено конвективным механизмом.

Остановимся прежде всего на результатах, относящихся к случаю $G=0$ (подогрев отсутствует). Известно, что в изотермической ситуации равновесие двухслойной системы может стать неустойчивым, если тяжелая жидкость расположена над легкой (релей-тейлоровская неустойчивость). При пренебрежимо малом поверхностном натяжении релей-тейлоровская неустойчивость должна наступать, если плотность верхней жидкости превышает плотность нижней на сколь угодно малую величину. Действительно, в расчете при значениях $G=0$ и $\rho=0,999$ наблюдается проваливание верхней жидкости в нижнюю, а в расчете для $G=0$ и $\rho=1$ система остается в равновесии.

Переходя к рассмотрению результатов для $G \neq 0$, заметим, что при нагреве системы сверху ($G < 0$) релей-тейлоровский механизм является

единственной причиной неустойчивости в системе. Расчеты, относящиеся к области $G < 0$, демонстрируют существование интересного эффекта — нагрев сверху отодвигает порог возникновения релей-тейлоровской неустойчивости в область значений $\rho < 1$. Например, при $G = -4000$ (см. фиг. 1) равновесие остается устойчивым и при $\rho = 0,999$.

В области значений $G > 0$ (подогрев снизу) кроме релей-тейлоровского механизма действует конвективный механизм неустойчивости равновесия. Известно [10], что равновесие однородной жидкости, заполняющей квадратную полость, становится неустойчивым, когда число Грасгофа превышает значение $G_* \approx 640$ (в принятых единицах), причем движение,



Фиг. 2

срывающее устойчивость, имеет одновихревую структуру. Расчеты для $\rho = 1$ (однородная жидкость) дают значение критического числа Грасгофа G_* , близкое к известному по линейной теории, что может служить проверкой метода расчета.

В двухслойной системе различие в плотностях жидкостей (при $\rho > 1$) может отодвигать порог устойчивости равновесия в область $G > G_*$. При $G > 3800$ в зависимости от величины отношения плотностей возможны два режима конвекции: одновихревое в полости течение, перемешивающее обе жидкости, и четырехвихревое движение не связанное с перетеканием через границу раздела и сохраняющее поэтому двухслойную структуру системы (форма линий тока указанных движений схематично изображена на фиг. 1, а, б). Первый режим конвекции существует при отношениях плотностей ρ , близких к единице; начиная с некоторого значения ρ этот режим не реализуется, а возникает режим четырехвихревого движения. Достаточное различие в плотностях как бы навязывает системе границу раздела, предотвращая возникновение движений, характерных для однородной жидкости.

Фигура 2 иллюстрирует возникновение и развитие во времени процесса конвективного перемешивания жидкостей ($G = 6000$, $\rho = 1,001$). На

каждой из фотографий показано положение маркеров, отмечающих частицы первой и второй жидкостей в некоторый момент времени. Маркеры жидкости, первоначально находившейся сверху, помечены точками, а жидкости, первоначально находившейся внизу, — кружками. Заметим, что на печать выводится четвертая часть общего числа маркеров, участвующих в расчетах. В исходном состоянии (при $t=0$) система имеет горизонтальную границу раздела, проходящую посередине полости. При $G=6000$ и $\rho=1,005$ система и в последующие моменты времени сохраняет двухслойную структуру. Незначительное изменение отношения плотностей полностью меняет характер процесса: нижняя жидкость начинает постепенно подниматься в центре (фиг. 2, б), далее образуется конвективный факел (фиг. 2, в) и, наконец, жидкости перемешиваются (фиг. 2, г).

В заключение автор выражает благодарность Е. М. Жуховицкому за предложенную тему и постоянное внимание к работе, а также Г. И. Бурда и А. А. Непомнящему за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость равновесия двух несмешивающихся жидкостей в шаровой полости.— Уч. зап. Пермск. ун-та, 1968, № 184, с. 57–73.
2. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвективная неустойчивость равновесия двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих шаровую полость в произвольном отношении.— Уч. зап. Пермск. ун-та, 1970, № 216, с. 15–32.
3. Березовский Э. И., Перельман Т. Л., Ромашко Е. А. О конвективной устойчивости в системе двух неограниченных горизонтальных слоев несмешиваемых жидкостей.— Инж.-физ. ж., 1974, т. 27, № 6, с. 1098–1108.
4. Алексеев В. В., Александров А. А. Модель двумерной конвекции в двухслойной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 9, с. 837–850.
5. Симановский И. Б. Конечно-амплитудная конвекция в двухслойной системе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 3–9.
6. Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 2, p. 297–307.
7. Daly B. J., Pracht W. E. Numerical study of density-current surges.— Phys. Fluids, 1968, v. 11, № 1, p. 15–30.
8. Daly B. J. Numerical study of the effect of surface tension on interface instability.— Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 7, p. 1340–1354.
9. Бурдэ Г. И., Симановский И. Б. Исследование процесса вытеснения жидкости из канала с углублением с помощью метода маркеров и ячеек.— Инж.-физ. ж., 1981, т. 40, № 4, с. 631–636.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию
28.IX.1981