МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1983

УДК 533.6.011.72:534.222.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ЗАТУХАНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

ЛЕВИН В. А., СВАЛОВ А. М.

При асимптотическом затухании ударных волн скорость их распространения приближается к скорости звука среды, по которой они распространяются. Движение газа за ударной волной при этом также приближается к некоторому предельному течению. Таким предельным течением, очевидно, будет течение, устанавливающееся за характеристикой, в которую вырождается, асимптотически или на конечном расстоянии, ударная волна. Выражая производную скорости частиц на ударной волне через параметры ударной волны и приравнивая эту производную соответствующему значению в предельном течении, можно получить соотношения, описывающие законы затухания ударных волн на больших расстояниях от места инициирования.

В плоском случае к характеристике, бегущей по однородному фону, может примыкать только волна Римана. В главном члене асимптотического разложения волной Римана [1, 2] является также решение, устанавливающееся за характеристикой однородного фона при цилиндрической и сферической симметрии. С использованием зависимостей, связывающих функции в волне Римана, в работах [3–5] выведены формулы, выражающие законы затухания ударных волн в неоднородных средах. В предлагаемой работе находятся законы затухания для ударных волн, распространяющихся по среде с произвольным распределением плотности и давления и источниками энергии, массы и импульса, т. е. в случае, когда течение за скачком волной Римана в главном члене не описывается.

Рассмотрим уравнения, описывающие одномерные движения идеального газа

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\frac{u}{r}\right)=m,\qquad \frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=g$$
$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\frac{p}{\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=e \tag{1}$$

где r, t — пространственная и временная координаты, u, p, ρ — скорость, давление и плотность, γ — показатель адиабаты, m, g, e — функции, описывающие источники массы, импульса и энергии, $\nu=1$, 2, 3 соответствует плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Относительно функций m, g, e предполагаем, что они могут зависеть как от независимых переменных, так и от искомых функций; m, e обращаются в 0 перед ударной волной и, кроме того, полагаем, что существуют производные функций m, g, e по всем переменным.

Пусть по покоящемуся фону распространяется характеристика

$$\frac{dr}{dt}=u+a \tag{2}$$

Справа от характеристики (2) $u_0=0$, $p_{0r}'=g\rho_0$, слева неизвестные функции u, p, ρ, совпадающие на характеристике с функциями с индексами 0. Выведем уравнение, которому должна удовлетворять производная u_r'. Для этого предварительно докажем следующее утверждение. Пусть производная некоторой функции f выражается следующим образом: $f_r'=A_1/A$, где A, A_1 — дифференцируемые по всем своим аргументам функции, обращающиеся в 0 при $r=0$. Тогда существование f_r' в точке

$r=0$ предполагает выполнение условия

$$A_{1r}'-\frac{A_1}{A}A_r'=0 \tag{3}$$

Действительно, существование и ограниченность указанных производных позволяют воспользоваться теоремой Лопиталя, согласно которой

$$\lim_{r\to 0}\frac{A_1}{A}=\frac{A_{1r}'}{A_r'}$$

что равносильно соотношению (3).

Заметим, что соотношение (3) есть не что иное, как числитель в выражении для второй производной для функции f. Как будет показано ниже, производная u_r' на характеристике (2) выражается именно в рассматриваемом виде. Уравнение $A=0$ равносильно уравнению (2), а условие $A_1=0$ есть условие вдоль характеристики. Смысл доказанного утверждения заключается в том, что независимо от того, обращается вторая производная u_{rr}'' в бесконечность или нет на характеристике (2), условие вдоль характеристики для второй производной должно выполняться, что в конечном итоге приводит к уравнению относительно функции u_r'.

Докажем для уравнений (1) с указанными ограничениями на функции m, g, e, что величина u_r' на характеристике в бесконечность обратиться не может. Уточним, что речь идет не об обращении в бесконечность в какой-либо точке на характеристике, что возможно, а на целом ее участке.

Предположим, что $u_r'=\infty$ на характеристике (2). От независимых переменных (r, t) перейдем к переменным (u, t) (пусть этот переход возможен хотя бы в некоторой окрестности характеристики). Переход осуществляется по формулам (слева производные по старым переменным)

$$u_r'=\frac{1}{r_u'},\qquad u_t'=-\frac{r_t'}{r_u'},\qquad p_r'=\frac{p_u'}{r_u'},\qquad p_t'=p_t'-\frac{p_u'r_t'}{r_u'}$$

$$\rho_r'=\frac{\rho_u'}{r_u'},\qquad \rho_t'=-\frac{\rho_u'r_t'}{r_u'}$$

В новых переменных уже нет бесконечных производных и, значит, можно воспользоваться доказанным выше утверждением и получить уравнение, которому должна удовлетворять величина r_u'. Оказывается, что при указанных выше ограничениях на функции m, g, e это уравнение не имеет решения $r_u'\equiv 0$, т. е. производная u_r' не может обратиться в бесконечность на каком-либо участке характеристики. Подчеркнем, что вывод относится не только к характеристикам покоящейся среды, но и ко всем характеристикам решений уравнений (1).

Получим уравнение, которому должна удовлетворять величина производной u_r'. Для этого введем новые переменные $\eta=r-\varphi(f)$, $\tau=t$ и преобразуем систему (1) соответствующим образом. При выполнении условия $(\varphi'-u)^2=a^2$ кривая $r=\varphi(t)$ будет характеристической и производная u_r' выразится формулой

$$u_\eta'=\frac{a^2m+\rho(u_\tau'-g)(u-\varphi')+e\rho(\gamma-1)-p_\tau'-(\nu-1)a^2\rho u/(\eta+\varphi)}{\rho[(u-\varphi')^2-a^2]} \tag{4}$$

На характеристике и числитель и знаменатель выражения (4) обращаются в 0. Воспользовавшись доказанным выше утверждением и выражая ρ_η', p_η' через $L=u_\eta'$, с помощью уравнений (1) получим

$$2L'+L\left(\gamma\frac{g_0}{a_0}+\frac{(\nu-1)}{\varphi}a_0+\frac{a_0'}{a_0}\right)+(\gamma+1)L^2-$$
$$-\left[\frac{(\gamma-1)e_\eta'}{a_0}+\frac{a_0}{\rho_0}m_\eta'+g_\eta'-g_{0\eta}'\right]=0 \tag{5}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по t вдоль характеристики. Производные по радиусу всех искомых функций можно выразить через скорость волны D и производные вдоль фронта волны [2]. Вводя параметр $q=a_0^2/D^2$ и вычисляя производные вдоль фронта из соотношений на ударной волне

$$u_1=\frac{2a_0}{\gamma+1}\frac{1-q}{\sqrt{q}},\qquad \rho_1=\frac{\rho_0(\gamma+1)}{\gamma-1+2q},\qquad p_1=\frac{p_0}{\gamma+1}\frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{q}$$

учитывая зависимость функций a_0, p_0, ρ_0 от радиуса и оставляя члены нулевого и первого порядка по аргументу $1-q$, получим выражение для величины u_r' на ударной волне

$$u_r'=L=-\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{d}{dt}[\ln(r_s^{\nu-1}(1-q)^2a_0p_0)]-\frac{\gamma+1}{2}\frac{a_0^2m+(\gamma-1)e\rho_0}{(1-q)p_0\gamma}\right] \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда $e=m=0$, $g=g(r)$. Уравнение (5) легко интегрируется, и его решение имеет вид

$$L=\frac{(r_s^{\nu-1}a_0^3p_0)^{-1/2}a_0}{c_1+(\gamma+1)\Phi/2},\qquad \Phi(r)=\int\limits_0^{r_s}(r^{\nu-1}a_0^3p_0)^{-1/2}dr$$

Используя уравнение (6), получим

$$1-q=c_2a_0(\sqrt{c_1+\Phi})_r' \tag{7}$$

Формула (7) дает закон затухания ударных волн в общем виде. Подставляя в выражение для функции $\Phi(r)$ конкретные значения скорости звука и давления в фоне, получим закон затухания волны в данной среде. Легко видеть, что, приняв $a_0=\text{const}$, $p_0=\text{const}$, получим формулы из работ [1, 2] ($\nu=1, 2, 3$)

$$1-q\sim\frac{1}{\sqrt{r_s}},\qquad 1-q\sim\frac{1}{r_s^{3/4}},\qquad 1-q\sim\frac{1}{r_s\sqrt{\ln r_s}}$$

Из (7) следует, что волна может вырождаться в характеристику лишь при $r\to\infty$, так как значение $q=1$ возможно при конечном $r=r_0$, если имеется особенность в распределении функций при $r=r_0$. В изотермической атмосфере, т. е. при $a_0=\text{const}$, ударные волны, распространяющиеся вверх, не затухают, а плоские волны, бегущие вниз, затухают асимптотически.

Предположим теперь, что волна распространяется по однородному фону, но за ударной волной начинают действовать некие источники массы и энергии e, $m\neq0$. Для того чтобы эти функции удовлетворяли условиям дифференцируемости по всем аргументам и были непрерывны на характеристике, зададим их в виде

$$e=b(p^n\rho^l-p_0^n\rho_0^l),\qquad m=c(p^k-p_0^k),\qquad g=du\rho^ip^j$$

Тогда уравнения (5) и (6) преобразуются к виду

$$2L'-\frac{2}{\gamma-1}BL+(\gamma+1)L^2=0,\qquad 2[\ln(1-q)]'-B=L$$

$$B=\text{const}=a_0^2ckp_0^{k-1}+(\gamma-1)bp_0^{n-1}\rho_0^{l+1}(n+l/\gamma)+d\rho_0^ip_0^j$$

откуда

$$L=\left(\frac{\gamma^2-1}{2B}+c_1\exp\left(-\frac{B}{\gamma-1}t\right)\right)^{-1}$$

$$q=1-c_1\exp\left(\frac{B}{2(\gamma-1)}t\right)\quad B\geqslant0,\qquad q=1-c_1\exp\left(-\frac{|B|}{2}t\right)\quad B<0$$

Отсюда следует, что поведение волны зависит от знака обобщенного параметра B. Например, при одновременном положительном притоке массы, энергии и импульса ($B \geqslant 0$) волна не затухает, а в случае оттока ($B < < 0$) — затухает асимптотически.

Исследуем вопрос о затухании ударных волн в случае, когда члены e, g, m терпят разрыв на характеристике, т. е. $e=g=m=0$ в покоящемся газе, e, g, m есть некоторые переменные величины в возмущенном течении, принимающие на характеристике значения e_0, g_0, m_0, отличные от 0.

Поскольку дифференциальная часть уравнений (1) не изменяется, уравнения для характеристик остаются прежними. Но условие вдоль характеристики, распространяющейся по покоящемуся газу, при e_0, g_0, $m_0 \neq \neq 0$ не выполнено, т. е. для среды слева эта кривая является огибающей семейства характеристик. Решение в окрестности огибающей нужно искать в виде [6]

$$u=u_1\eta^{1/2}+u_2\eta^1+u_3\eta^{3/2}+\dots \qquad p=p_0+p_1\eta^{1/2}+\dots$$
$$\rho=\rho_0+\rho_1\eta^{1/2}+\dots \qquad \eta=a_0t-r \tag{8}$$

Подстановка рядов (8) в уравнения (1) показывает, что решение существует тогда, когда выполняется условие

$$M=\frac{a_0}{\rho_0}m_0+g_0+(\gamma-1)\frac{e_0}{a_0}\leqslant 0$$

т. е. суммарное воздействие источников массы, импульса и энергии должно быть отрицательным, ослабляющим поток. Если $M>0$, непрерывного решения не существует, характеристика сразу же переходит в ударную волну.

При вырождении ударной волны течение за ней приближается к течению за слабым разрывом и, если вырождение происходит на бесконечном расстоянии, производная u_r' на фронте приближается к значению производной на характеристике. Условие асимптотического вырождения поставлено не случайно, так как при переходе сильного разрыва в слабый на конечном расстоянии из точки перехода исходят, вообще говоря, три характеристики, на которых могут происходить разрывы производных и поэтому предельного совпадения их значений может не быть.

Из разложения решения в ряды (8) следует, что производная u_η' имеет вид

$$u_\eta'=0{,}5u_1\eta^{-1/2}+\dots \tag{9}$$

Для ударной волны справедливо разложение

$$r_s=c_0+a_0t+0{,}5\int_{t_0}^{t}(1-q)\,dt \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим предельное выражение для производной u_η' при приближении ударной волны к характеристике

$$u_\eta'=0{,}5u_1\left(c_0+0{,}5\int_{t_0}^{t}(1-q)\,dt+\dots\right) \tag{11}$$

Подставляя в выражение (11) значение $u_1=\sqrt{2|M|/(\gamma+1)}$, а в левую часть выражение u_η' из (6), получим уравнение, описывающее изменение $z(\tau)=1-q$ при вырождении волны

$$z'^2+z'-zz''=\frac{8}{\gamma+1}(z'+1)^3, \qquad d\tau=-M\,dt \tag{12}$$

Уравнение (12) показывает, что решение $z(\tau)$ асимптотически приближаться к решению $z=0$ не может, так как при этом необходимо, чтобы z', $z''\to 0$, т. е. ударная волна обязана вырождаться в характеристику на конечном расстоянии.

Таким образом, при наличии источников массы, энергии и импульса условия затухания ударной волны зависят от суммарного воздействия этих источников, определяемого некоторым обобщенным параметром, приведенным выше. В случае, когда источниковые члены терпят разрыв на характеристике, что аппроксимирует поведение функций при их резком возрастании, асимптотического затухания вообще быть не может — ударная волна либо не затухает, либо вырождается в слабый разрыв на конечном расстоянии от места инициирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения.— ПММ, 1945, т. 9, № 4, с. 286–292.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
3. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах.— ПММ, 1958, т. 22, № 4, с. 561–564.
4. *Рыжов О. С.* Затухание ударных волн в неоднородных средах.— ПМТФ, 1961, № 2, с. 15–25.
5. *Крайко А. Н.* Некоторые вопросы геометрической акустики одномерных нестационарных и двумерных стационарных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 5, с. 104–109.
6. *Левин В. А., Свалов А. М.* Об особенностях распространения детонационных волн.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М., 1978, с. 194–203.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1980