

УДК 533.6.011.72

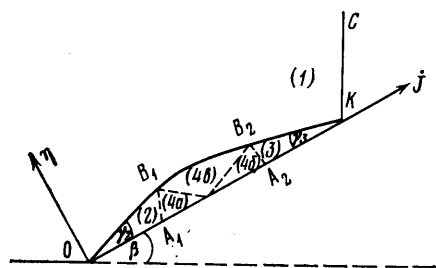
## О РЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ КЛИНА

БОГАТКО В. И., КОЛТОН Г. А.

Как показывают экспериментальные исследования [1], при учете реальных свойств газа становится возможным режим регулярного отражения ударной волны от поверхности клина, при котором отраженная ударная волна присоединена к его вершине.

В настоящей работе с помощью метода возмущений, в трактовке, близкой к видоизмененному способу малого параметра [2], строится приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии сильной ударной волны с поверхностью клина для указанного выше режима отражения. При этом в отличие от задачи, рассмотренной в [3], угол полураствора клина не предполагается малым.

Пусть сильная плоская ударная волна, распространяющаяся со скоростью  $V_\infty$  по покоящемуся газу с давлением  $p_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$ , в момент времени  $t=0$  встречает клин, поверхность которого образует с вектором  $V_\infty$  угол  $\beta$ . Схема течения для рассматриваемого режима отражения показана на фиг. 1. Здесь  $KC$  — фронт падающей ударной волны,  $OB_1B_2K$  — отраженная ударная волна. В области (1) поток параллелен вектору  $V_\infty$ ; области (2) и (3), где имеет место равномерный поток, параллельный поверхности клина, отделены от области (4) неравномерного потока дугами  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  звуковых окружностей. Подобласти (4а) и (4б), где течение безвихревое, от-



Фиг. 1

делены от зоны (4б) завихренного потока траекториями частиц, исходящими из точек  $B_1$  и  $B_2$  соответственно.

В силу автомодельности задачи система уравнений, описывающая течение газа, имеет вид

$$(\mathbf{V}-\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{V}}{dr} = -a^2 \frac{dQ}{dr} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} + (\mathbf{V}-\mathbf{r}) \frac{dQ}{dr} = 0$$

$$(\mathbf{V}-\mathbf{r}) \frac{d \ln a^2}{dr} = (k-1) (\mathbf{V}-\mathbf{r}) \frac{dQ}{dr}$$

где  $V_\infty \mathbf{V} = (v_x, v_y)$  — вектор скорости,  $\mathbf{r}(\xi, \eta)$  — радиус-вектор в плоскости безразмерных автомодельных переменных  $\xi, \eta$ , которые связаны с геометрическими переменными  $x, y$  соотношениями  $x = V_\infty t \xi, y = V_\infty t \eta$ ;  $\rho_\infty V_\infty^2 p$  — давление,  $V_\infty a$  — скорость звука,  $Q = \ln p/k, k$  — эффективный показатель адиабаты. В выбранной системе координат (фиг. 1) уравнения звуковых линий  $A_i B_i$  ( $i=2, 3$ ) имеют вид

$$(\mathbf{V}_i - \mathbf{r})^2 = a_i^2 \quad (2)$$

Здесь и далее индексы 1, 2, 3 соответствуют значениям параметров в областях 1, 2 и 3.

Краевыми условиями задачи являются условие непротекания  $v_y(\xi, 0) = 0$  и условия динамической совместности на фронте отраженной ударной волны  $OB_1B_2K$

$$\begin{aligned} v_x &= V_1 \cos \beta - \frac{2}{k+1} \left(1 - \frac{a_1^2}{\theta^2}\right) \theta \sin \gamma & (3) \\ v_y &= -V_1 \sin \beta + \frac{2}{k+1} \left(1 - \frac{a_1^2}{\theta^2}\right) \theta \cos \gamma \\ \frac{\rho_1}{\rho} &= \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{\theta^2} \\ p &= \frac{2k}{k+1} p_1 \left(\frac{\theta^2}{a_1^2} - \frac{k-1}{2k}\right) \end{aligned}$$

где  $\gamma = \arctg d\eta/d\xi$  и  $\theta = -(\xi - V_1 \cos \beta) \sin \gamma + (\eta + V_1 \sin \beta) \cos \gamma$  — угол наклона и скорость распространения отраженного ударного фронта.

Для упрощения краевой задачи (1), (3) используем тот факт, что при большой скорости  $V_\infty$  падающей ударной волны и величине  $k$ , мало отличающейся от единицы, отраженная ударная волна располагается весьма близко к поверхности клина ( $\gamma \ll 1$ ). Тогда из соотношений (3) находим, что в областях (2) и (3), где  $v_y = 0$

$$\begin{aligned} \theta_i = \theta_0 &= \frac{k+1}{4} V_1 \sin \beta \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{k+1} \frac{a_1}{V_1 \sin \beta}\right)^2} \right] = V_1 \sin \beta + O(\varepsilon) \\ \gamma_2 &= \frac{\theta_0 - V_1 \sin \beta}{V_1 \cos \beta} = O(\varepsilon) \\ \gamma_3 &= \frac{\theta_0 - V_1 \sin \beta}{V_1 \cos \beta - 1/\cos \beta} = O(\varepsilon) \\ v_{xi} = v_i &= V_1 \cos \beta - \frac{2}{k+1} \left(1 - \frac{a_1^2}{\theta_0^2}\right) \theta_0 \gamma_i \\ \frac{\rho_1}{\rho_i} &= \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{a_1^2}{\theta_0^2} \\ p_i = p_0 &= \frac{2k}{k+1} \left(\frac{\theta_0^2}{a_1^2} - \frac{k-1}{2k}\right) \\ a_i^2 = a_0^2 &= \frac{k p_0}{\rho_0} = O(\varepsilon) \quad (i=2, 3) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = (k-1)/(k+1)$  и  $a_1^2 = O(\varepsilon)$ .

Уравнения звуковых окружностей (2) принимают вид

$$\xi_i = v_i \mp a_0 + O(\varepsilon^{3/2}) = V_1 \cos \beta \mp a_0 + O(\varepsilon)$$

ординаты точек  $B_1, B_2$  будут  $\eta_0 = \theta_0 - V_1 \sin \beta + O(\varepsilon^{3/2})$ , протяженность области (4) равна  $2a_0 + O(\varepsilon) = O(\varepsilon^{3/2})$ . На искривленном фронте  $B_1B_2$  положим  $\eta = \eta_0 + \eta_*$ . Так как  $\gamma = O(\varepsilon)$ , то  $\eta_* = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \gamma d\xi = O(\varepsilon^{3/2})$ . Тогда из (3) находим

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + a_0 \vartheta \\ a_0 \vartheta &= \eta - (\xi - V_1 \cos \beta) \gamma = O(\varepsilon^{3/2}) \\ v_x &= V_1 \cos \beta + O(\varepsilon) & (4) \end{aligned}$$

$$v_y = \frac{2}{k+1} a_0 \vartheta \left( 1 + \frac{a_1^2}{\theta_0^2} \right) = O(\varepsilon^{1/2})$$

Введем новые переменные  $a_0 u = v_x - V_1 \cos \beta$ ,  $a_0 v = v_y$ ,  $a = a_0(1 + \alpha)$ ,  $a_0 \xi = \xi - V_1 \cos \beta$ ,  $a_0 \delta = \eta$ .

Из (4) следует, что на отраженном фронте

$$\begin{aligned} u &= O(\varepsilon^{1/2}) \ll \xi = O(1) \\ v &= O(\varepsilon) \ll \delta = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \alpha = O(\varepsilon) \ll 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Обратимся теперь к системе (1), где положим

$$Q = Q_0 + q = \frac{1}{k} \ln p_0 + q$$

Предполагая, что оценки (5) справедливы не только на отраженном фронте, но и во всей области (4), из уравнений количества движения находим, что

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{\partial q}{\partial \delta} = O(\varepsilon)$$

Тогда, пренебрегая в (1) членами порядка  $\varepsilon$  и выше, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial \delta} &= \frac{\partial q}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q}{\partial \delta} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \delta} - \xi \frac{\partial q}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

общее решение которой

$$\begin{aligned} u &= L'(\xi) + F'(\lambda), \quad q = \xi L'(\xi) - L(\xi), \quad v = (\xi^2 - 1)L''(\xi)\delta + \\ &+ \lambda F'(\lambda) - F(\lambda), \quad \lambda = \delta/\xi \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L$  и  $F$  — произвольные функции.

Условие безвихренности потока дает  $\partial u / \partial \delta = 0$ . Поэтому в областях (4а) и (4б) решение системы уравнений (6) с учетом условий обтекания примет вид

$$\begin{aligned} u_i &= L_i'(\xi), \quad v_i = (\xi^2 - 1)L_i''(\xi)\delta \\ q_i &= \xi L_i'(\xi) - L_i(\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

где  $L_i$  ( $i=2, 3$ ) — произвольные функции.

Легко видеть, что решение (8) может быть формально получено из общего решения (7) при

$$L = L_i \quad \text{и} \quad F(\lambda) = 0$$

Условия (3) на фронте  $B_1 B_2$  принимают вид

$$u = m\gamma, \quad v = n\vartheta, \quad q = l\vartheta \quad (\delta = \delta_*(\xi)) \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} m &= -\frac{2}{k+1} \left( 1 - \frac{a_1^2}{\theta_0^2} \right) \frac{\theta_0}{a_0}, \quad l = \frac{2}{k} \frac{a_0}{\theta_0} \left( 1 - \frac{k-1}{2k} \frac{a_1^2}{\theta_0^2} \right)^{-1}, \\ n &= \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{a_0^2}{\theta_0^2} \right) \end{aligned}$$

$$\vartheta = \delta_* - \delta_0 - \xi\gamma, \quad \gamma = \delta_*'(\xi), \quad \delta_0 = (\theta_0 - V_1 \sin \beta) / a_0.$$

Подставив (7) в (9), получим систему уравнений для определения произвольных функций  $L$ ,  $F$  и формы фронта  $\delta_*(\xi)$

$$\begin{aligned} (\xi^2-1)L''(\xi)\delta_* + \lambda_* F'(\lambda_*) - F(\lambda_*) &= n\vartheta \\ L'(\xi) + F'(\lambda_*) &= m\gamma, \quad \xi L'(\xi) - L(\xi) = l\vartheta \quad (\lambda_* = \delta_*/\xi) \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая в (10) функции  $L$  и  $F$ , приходим к уравнению для определения формы фронта  $\delta_*(\xi)$

$$l\xi \frac{d}{d\xi} [(1-\xi^2)\delta_*\delta_*''] + [n\xi^2 + (m+l)\delta_*]\delta_*'' = 0$$

Так как в принятых предположениях  $\delta_*(\xi) = \delta_0 + \Delta(\xi)$  ( $\Delta \ll \delta_0$ ), то в рассматриваемом приближении из (9) будем иметь

$$\xi \frac{d}{d\xi} [(1-\xi^2)\Delta''] + (n_1\xi^2 - m_1)\Delta'' = 0 \quad (11)$$

где

$$n_1 = n/l\delta_0, \quad m_1 = -(m+l)/l$$

Краевые условия для уравнения (11) задаются в точках  $B_1$  и  $B_2$

$$\Delta(-1) = \Delta_2, \quad \Delta(+1) = \Delta_3, \quad \Delta'(-1) = \gamma_2, \quad \Delta'(1) = \gamma_3 \quad (12)$$

а так как  $\vartheta(-1) = \vartheta(+1) = 0$ , то  $\Delta_2 = -\gamma_2$ ,  $\Delta_3 = \gamma_3$ .

Решение краевой задачи (11), (12) имеет вид

$$\Delta(\xi) = \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2A} \int_{-1}^{\xi} \varphi(t) (\xi-t) dt + \gamma_2 \xi \quad (13)$$

где

$$A = \int_0^1 \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) = |t|^{m_1} (1-t^2)^\nu, \quad \nu = \frac{n_1 - m_1 - 2}{2}$$

Как видно из (11) и (9), параметр  $m_1 > 0$ , поэтому сходимость интеграла (13) при  $t \rightarrow 0$  обеспечена. При  $t \rightarrow \pm 1$  для сходимости интеграла (13) необходимо, чтобы выполнялось условие  $n_1 > m_1$ . Это неравенство определяет область изменения параметров  $k$  и  $\beta$ , для которой возможен рассматриваемый режим взаимодействия ударной волны с жесткой стенкой.

Тогда с помощью (10) находим

$$q = l \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \int_{-1}^{\xi} t \varphi(t) dt \quad (\xi \in [-1, 1])$$

и при  $(\xi, \delta) \in (4\vartheta)$

$$u(\xi, \delta) = m\gamma_2 + l \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \int_{-1}^{\xi} \varphi(t) dt - (m+l) \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \int_{-1}^{\delta_0/\lambda} \varphi(t) dt \quad (14)$$

$$v(\xi, \delta) = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \left[ l\varphi(\xi) (\xi^2 - 1)\delta + n \int_{-1}^{\delta_0/\lambda} t\varphi(t) dt - l\delta_0 \left( \frac{\delta_0^2}{\lambda^2} - 1 \right) \varphi\left(\frac{\delta_0}{\lambda}\right) \right]$$

Используя оценки (5), дифференциальные уравнения траектории частиц  $(v_y - \eta)d\xi - (v_x - \xi)d\eta = 0$  можно представить в виде  $\delta d\xi - \xi d\delta = 0$ , откуда  $\delta = C\xi$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении все траектории частиц прямолинейны и проходят через центр звуковой окружности.

Поэтому распределение параметров потока вдоль стенки определяется

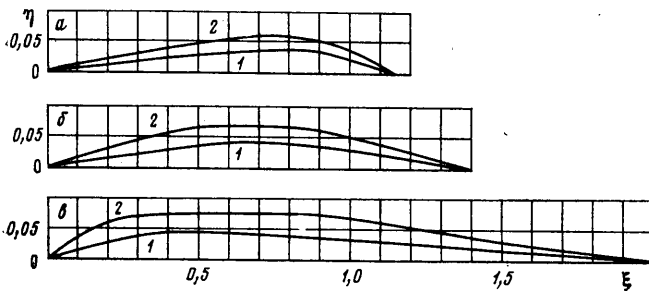
решением (8) для областей (4а) и (4б). Произвольные функции, входящие в это решение, можно получить, сопрягая (8) и (14) вдоль траекторий, проходящих через точки  $B_1$  и  $B_2$ , на которых в главном приближении  $\lambda = \mp \delta_0$ .

Таким образом

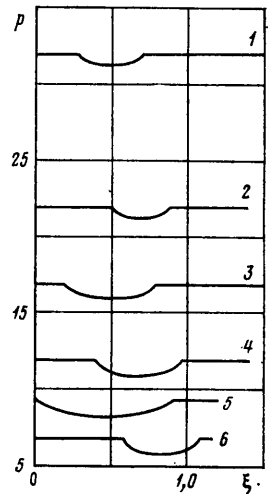
$$v(\zeta, \delta) = l \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} (\zeta^2 - 1) \varphi(\zeta) \delta, \quad (\zeta, \delta) \in (4a, б)$$

$$u(\zeta, \delta) = \begin{cases} m\gamma_2 + l \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \int_{-1}^{\zeta} \varphi(t) dt, & (\zeta, \delta) \in (4a) \\ m\gamma_3 + l \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2A} \int_{-1}^{\zeta} \varphi(t) dt, & (\zeta, \delta) \in (4б) \end{cases}$$

На фиг. 2, 3 приведены соответственно форма отраженной ударной волны, рассчитанная по формуле (13), и распределение давления по поверхности клина. На фиг. 2 индексы  $a$ ,  $b$  и  $v$  соответствуют значениям параметров  $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , цифра 1 соответствует значению  $k = 1,05$ ,  $2 - k = 1,1$ . На фиг. 3 кривая 1 соответствует параметрам  $\beta = 60^\circ, k = 1,05$ ; 2 -  $\beta = 45^\circ, k = 1,05$ ; 3 -  $\beta = 60^\circ, k = 1,1$ ; 4 -  $\beta = 45^\circ, k = 1,1$ ; 5 -  $\beta = 60^\circ, k = 1,2$ ; 6 -  $\beta = 30^\circ, k = 1,1$ . Расчеты проводились



Фиг. 2



Фиг. 3

лишь для тех значений параметров  $k$  и  $\beta$ , для которых выполнялось условие  $n_1 > m_1$ . Проведенные расчеты, в частности, показали, что с уменьшением эффективного показателя адиабаты расширяется диапазон углов, для которых возможно регулярное отражение ударной волны от поверхности клина.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977, с. 143.
2. Гонор А. Л., Остапенко Н. А. Гиперзвуковое обтекание крыльев с маховской системой ударных волн. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 104-116.
3. Богатко В. И., Колтон Г. А. О нерегулярном отражении сильной ударной волны от тонкого клина. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5, с. 55-61.

Ленинград

Поступила в редакцию  
6.V.1980