**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1983**

УДК 533.594

ОБЛАСТЬ ВОЗМУЩЕНИЯ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ВБЛИЗИ ХОЛОДНОГО ЭЛЕКТРОДА

БЕНИЛОВ М. С.

Асимптотическая теория области возмущения слабоионизованной плазмы молекулярных газов с учетом разделения зарядов и газофазных реакций ионизации и рекомбинации развита ранее для предельного случая горячего электрода [1], когда отношение рассчитанной по температуре электрода химически равновесной молярной концентрации заряженных частиц к невозмущенной концентрации по порядку величины равно единице [1]. В настоящей работе рассматривается противоположный предельный случай холодного электрода, когда указанное отношение мало.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многокомпонентную слабоионизованную термически равновесную покоящуюся плазму молекулярных газов, содержащую M нейтральных компонент, положительные однозарядные ионы одного сорта и электроны. Ионизация нейтральных атомов происходит при столкновениях с электронами или молекулами нейтральной компоненты 1. Давление плазмы и молярные концентрации нейтральных компонент постоянны. Температура плазмы считается заданной функцией координаты y (ось y направлена по нормали от электрода).

В безразмерных переменных имеем следующую нелинейную краевую задачу [1, 2]:

$$I_i=-a\left(z_i'-\frac{1}{\theta}z_iE\right),\qquad I_e=-a\left(z_e'+\frac{1}{\theta}z_eE\right)\tag{1.1}$$

$$\chi I_i'=\frac{2b}{1+\beta}(1+cz_e)(r^2-z_iz_e),\qquad I_e=\beta(I_i-j)$$

$$\varepsilon\theta E'=z_i-z_e,\quad \psi'=E_\infty-E$$

$$\eta=0,\ z_i=z_e=0;\quad \eta\to\infty,\quad z_i\to1,\quad z_e\to1,\quad \psi\to0\tag{1.2}$$

$$\eta=\frac{y}{L},\quad z_j=\frac{x_j}{x_{r\infty}},\quad I_j=\frac{LJ_j}{D_{j\infty}n_{er\infty}},\quad E=\frac{eLE^\circ}{kT_\infty},$$

$$\psi=\frac{e\psi^\circ}{kT_\infty}\qquad (j=i,e)$$

$$a=\frac{nD_i}{n_\infty D_{i\infty}},\quad \theta=\frac{T}{T_\infty},\quad b=\frac{k_{r1}n^3}{k_{r1\infty}n_\infty{}^3},\quad c=\frac{k_{re}x_{r\infty}}{k_{r1}x_1},\quad r=\frac{x_r}{x_{r\infty}}=\theta^{5/4}e^{-t}$$

$$x_r=\frac{n_{er}}{n},\quad t=mq,\quad q=\frac{1-\theta}{\theta},\quad \chi=\frac{d_{1\infty}{}^2}{2L^2},\quad \beta=\frac{D_i}{D_e},\quad j=\frac{Lj^\circ}{eD_{i\infty}n_{er\infty}}$$

$$\varepsilon=\frac{h_\infty{}^2}{L^2},\quad m=\frac{I}{2kT_\infty},\quad d_1=\left[\frac{4D_i}{k_{r1}nx_1n_{er}(1+\beta)}\right]^{1/2}\quad h=\left(\frac{kT}{4\pi n_{er}e^2}\right)^{1/2}$$

Здесь J_i, J_e, x_i, x_e — числовые плотности диффузионных потоков и молярные концентрации ионов и электронов, n, T — полная концентрация частиц и температура плазмы, e — заряд электрона, E° — напряженность электрического поля, ψ° — отклонение распределения потенциала в области возмущения от соответствующего невозмущенному ядру линейного распределения, k — постоянная Больцмана, k_{r1}, k_{re} — константы скорости рекомбинации для реакций с участием в качестве третьего тела молекул 1-й компоненты и электронов соответственно, D_i, D_e — коэффициенты диффузии ионов и электронов (их отношение β предполагается постоянным), x_1 — молярная концентрация 1-й компоненты, j° — плотность электрического тока на электрод (заданная величина), n_{er} — локальная равновесная концентрация заряженных частиц, I — энергия ионизации нейтральных атомов, L — характерный масштаб изменения температуры плазмы, штрих означает дифференцирование по η.

Задача (1.1), (1.2) содержит в качестве коэффициентов заданные функции $a(\eta)$, $b(\eta)$, $c(\eta)$, $\theta(\eta)$ и заданные параметры ε, χ, β, m, j. Следуя работе [1], будем считать параметры ε, χ малыми. Кроме того, будем предполагать малым параметр m^{-1} (предел холодной стенки [3, 4]). Установим между этими параметрами следующие отношения порядка: $\varepsilon/\chi^s=O(1)$, $s>1$; $m/\ln\gamma^{-1}\to k_1$, где s, k_1 — заданные постоянные, γ — параметр сравнения [4], являющийся корнем уравнения $\gamma=\chi\ln^2\gamma$. Следуя работе [4], введем вспомогательную функцию α, пропорциональную отношению локальной рекомбинационной длины для реакции рекомбинации с участием молекул к характерному масштабу изменения функции t

$$\alpha=\frac{d_1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{dt}{dy}\right)=-q'\left(\frac{a\chi m^2}{br}\right)^{1/2}=$$

$$=-k_1q'\left(\frac{a}{b\theta^{5/4}}\right)^{1/2}\left(\exp\frac{mq-\ln\gamma^{-1}}{2}\right)[1+o(1)]$$

Ограничим рассмотрение случаем достаточно большой плотности тока, когда толщина дебаевского слоя η_D по порядку величины равна единице. Структура решения задачи существенно зависит от значения функции α при $\eta=\eta_D$, которое в свою очередь зависит от значения температуры θ_D (здесь и ниже индексы D, w приписаны значениям соответствующих функций при $\eta=\eta_D$, $\eta=0$). Будем выделять три случая: $k_1q_D>1$, тогда $\alpha_D\to\infty$; $k_1q_D=1$, $\ln\gamma^{-1}-mq_D\to k_2$ (k_2 — некоторая заданная постоянная), тогда $\alpha_D=O(1)$; $k_1q_D<1$, тогда $\alpha_D\to 0$.

2. Случай $\alpha_D\to\infty$. Для решения сформулированной задачи будем использовать метод сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру [5]. В рамках этого метода оказывается необходимым подразделять весь объем плазмы на ряд зон, в каждой из которых искомое решение описывается своим асимптотическим разложением; вид этих разложений, положение и толщина каждой из указанных зон определяются в процессе решения (эта процедура в настоящей работе для краткости не описывается). В данном предельном случае оказывается необходимым выделить следующие зоны: внешнюю — химически равновесную — область, химический переходный слой, рекомбинационный слой, дебаевский переходный слой, дебаевский слой, ионный диффузионный слой. В свою очередь, дебаевский слой имеет сложную структуру и может быть подразделен на два подслоя (для описания решения в этом слое необходимо рассматривать два асимптотических разложения). Дебаевский переходный слой также имеет сложную структуру, которая будет обсуждаться ниже. Плотность тока j в данном случае имеет порядок величины χ, поэтому параметр $j_1=j\chi^{-1}$ будем полагать фиксированным.

Обозначим через η_s, η_{s1} корни алгебраических уравнений $k_1q(\eta_s)=1$, $\alpha(\eta_{s1})=1$ [4]. Отметим, что $\eta_{s1}=\eta_s+o(1)$. Внешнее разложение решения задачи (1.1), (1.2) может быть вычислено непосредственно

$$z_i=r(\eta;\ m)+\ldots,\quad z_e=r(\eta;\ m)+\ldots \tag{2.1}$$

$$I_i=\frac{2aq'}{1+\beta}mr+\ldots,\qquad I_e=\frac{2\beta aq'}{1+\beta}mr+\ldots$$

$$E=\frac{(1-\beta)\theta q'}{1+\beta}m+\ldots,\qquad \psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta}{1+\beta}m+\ldots,\qquad \eta_s<\eta<\infty$$

Разложение, справедливое в химическом переходном слое, имеет вид

$$z_i=r_{s1}g_1(\eta_1)+\ldots,\ z_e=r_{s1}f_1(\eta_1)+\ldots$$

$$I_i=r_{s1}mG_1(\eta_1)+\ldots,\quad I_e=r_{s1}mF_1(\eta_1)+\ldots,\quad E=mE_1(\eta_1)+\ldots$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_s}{1+\beta}m+\ldots+\psi_1(\eta_1)+\ldots,\qquad -\infty<\eta_1=(\eta-\eta_{s1})m<\infty$$

Здесь и ниже индексы s, $s1$ приписаны значениям соответствующих функций при $\eta=\eta_s$, $\eta=\eta_{s1}$.

Систему определяющих уравнений для функций g_1, f_1, G_1, F_1, E_1, ψ_1 получим, подставляя это разложение в уравнения (1.1) и удерживая первые члены; граничными условиями при $\eta_1\to\infty$ будут условия сращивания с внешним разложением, в качестве граничных условий при $\eta_1\to-\infty$ возьмем условия затухания функций g_1, f_1.

Имеем задачу

$$G_1=-a_s\frac{dg_1}{d\eta_1}+\frac{a_s}{\theta_s}g_1E_1,\qquad F_1=-a_s\frac{df_1}{d\eta_1}-\frac{a_s}{\theta_s}f_1E_1$$

$$\frac{dG_1}{d\eta_1}=\frac{2a_sq_s'}{1+\beta}[\exp(-2q_s'\eta_1)-g_1f_1],\qquad F_1=\beta G_1$$

$$g_1=f_1,\qquad \frac{d\psi_1}{d\eta_1}=-E_1$$

$$\eta_1\to\infty,\quad g_1\sim\exp(-q_s'\eta_1)+\ldots,\quad f_1\sim\exp(-q_s'\eta_1)+\ldots$$

$$G_1\sim\frac{2a_sq_s'}{1+\beta}\exp(-q_s'\eta_1)+\ldots,\qquad F_1\sim\frac{2\beta a_sq_s'}{1+\beta}\exp(-q_s'\eta_1)+\ldots$$

$$E_1\to\frac{(1-\beta)\theta_sq_s'}{1+\beta},\qquad \psi_1\sim-\frac{(1-\beta)\theta_sq_s'}{1+\beta}\eta_1+\ldots$$

$$\eta_1\to-\infty,\qquad g_1\to0,\qquad f_1\to0$$

Решение этой задачи можно выразить через каноническую функцию $z_7=z_7(x)$, вычисленную в [4]

$$g_1=f_1=z_7(-q_s'\eta_1),\qquad G_1=-\frac{2a_s}{1+\beta}\frac{dg_1}{d\eta_1},\qquad F_1=-\frac{2\beta a_s}{1+\beta}\frac{dg_1}{d\eta_1}$$

$$E_1=-\frac{(1-\beta)\theta_s}{1+\beta}\frac{d\ln g_1}{d\eta_1},\qquad \psi_1=\frac{(1-\beta)\theta_s}{1+\beta}\ln g_1+\mathrm{const}$$

Разложение, справедливое в рекомбинационном слое, имеет вид

$$z_i=\chi g_2(\eta)+\ldots,\quad z_e=\chi f_2(\eta)+\ldots,\quad I_i=\chi G_2(\eta)+\ldots$$

$$I_e=\chi F_2(\eta)+\ldots,\qquad E=E_2(\eta)+\ldots,$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_s}{1+\beta}m+\ldots+\psi_2(\eta)+\ldots,\qquad \eta_D<\eta<\eta_s$$

Для функций g_2, f_2, G_2, F_2, E_2, ψ_2 имеем задачу

$$G_2=-ag_2'+\frac{a}{\theta}g_2E_2,\qquad F_2=-af_2'-\frac{a}{\theta}f_2E_2$$

$$G_2'=-\frac{2b}{1+\beta}g_2^2,\qquad F_2=\beta(G_2-j_1),\qquad g_2=f_2,\qquad \psi_2'=-E_2$$

$$\eta\to\eta_s,\quad g_2\sim\frac{6a_s}{b_s(\eta_s-\eta)^2}+\ldots,\qquad f_2\sim\frac{6a_s}{b_s(\eta_s-\eta)^2}+\ldots$$

$$G_2\sim-\frac{24a_s^2}{(1+\beta)b_s(\eta_s-\eta)^3}+\ldots,\qquad F_2\sim-\frac{24\beta a_s^2}{(1+\beta)b_s(\eta_s-\eta)^3}+\ldots$$

$$E_2\sim-\frac{2(1-\beta)\theta_s}{(1+\beta)(\eta_s-\eta)}+\ldots,\qquad \psi_2\sim-\frac{2(1-\beta)\theta_s}{1+\beta}\ln(\eta_s-\eta)+\ldots$$

$$\eta=\eta_D,\quad g_2=f_2=F_2=0$$

Для функции g_2 получаем краевую задачу

$$(ag_2')'=bg_2^2 \tag{2.2}$$

$$\eta=\eta_D,\quad g_2=0;\qquad \eta\to\eta_s,\quad g_2\sim\frac{6a_s}{b_s(\eta_s-\eta)^2}+\ldots$$

После решения этой задачи можно определить функции f_2, G_2, F_2, E_2, ψ_2 и постоянную j_1

$$f_2=g_2,\qquad G_2=\frac{\beta j_1-2ag_2'}{1+\beta},\qquad F_2=-\frac{\beta(j_1+2ag_2')}{1+\beta}$$

$$E_2=\frac{\theta[\beta j_1-(1-\beta)ag_2']}{(1+\beta)ag_2},\qquad \psi_2=-\int E_2\,d\eta,\qquad j_1=-2a_Du_2,\qquad u_2=g_{2D}'$$

Структура дебаевского переходного слоя зависит от порядка величины $r_D^2/(\varepsilon\chi m)$. Будем выделять три случая: $r_D^2/(\varepsilon\chi m)=O(1)$, $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to\infty$, $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to 0$. Рассмотрим сначала случай $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to k_3=O(1)$. В этом случае дебаевский переходный слой подразделяется на два подслоя (для его описания необходимо рассматривать два асимптотических разложения). Первое из этих разложений имеет вид

$$z_i=(\varepsilon\chi^2)^{1/3}g_3(\eta_3)+\ldots,\qquad z_e=(\varepsilon\chi^2)^{1/3}f_3(\eta_3)+\ldots \tag{2.3}$$

$$I_i=\chi G_3(\eta_3)+\ldots,\qquad I_e=\frac{r_D^2}{\chi m}F_3(\eta_3)+\ldots,\qquad E=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/3}E_3(\eta_3)+\ldots$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_s}{1+\beta}m+\ldots-\frac{\theta_D}{3}\ln\frac{\chi}{\varepsilon}+\psi_3(\eta_3)+\ldots,$$

$$-\infty<\eta_3=\frac{(\eta-\eta_D)\chi^{1/3}}{\varepsilon^{1/3}}<\infty$$

Для функций g_3, f_3, G_3, F_3, E_3, ψ_3 имеем задачу

$$G_3=a_D\frac{dg_3}{d\eta_3}+\frac{a_D}{\theta_D}g_3E_3,\qquad \frac{df_3}{d\eta_3}+\frac{1}{\theta_D}f_3E_3=0,\qquad \frac{dG_3}{d\eta_3}=0$$

$$\frac{dF_3}{d\eta_3}=-\frac{2\beta b_D}{(1+\beta)k_3}g_3f_3,\qquad \theta_D\frac{dE_3}{d\eta_3}=g_3-f_3,\qquad \frac{d\psi_3}{d\eta_3}=-E_3$$

$$\eta_3\to\infty,\quad g_3\sim u_2\eta_3+\ldots,\quad f_3\sim u_2\eta_3+\ldots,\quad G_3\to j_1$$

$$F_3\sim-\frac{2\beta b_Du_2^2}{3(1+\beta)k_3}\eta_3^3+\ldots,\qquad E_3\sim-\frac{\theta_D}{\eta_3}+\ldots,\qquad \psi_3\sim\theta_D\ln\eta_3+\ldots$$

$$\eta_3\to-\infty,\quad g_3\to 0,\quad f_3\to 0,\quad F_3\to-\frac{\beta b_D}{(1+\beta)q_D'}$$

Для функции G_3 находим $G_3=j_1$; задача для функций g_3, f_3, E_3, ψ_3 тождественна задаче о дебаевском переходном слое в химически замороженной плазме [6]. После нахождения функций g_3, f_3 можно определить функцию F_3 по формуле

$$F_3=-\frac{\beta b_D}{(1+\beta)q_D'}-\frac{2\beta b_D}{(1+\beta)k_3}\int_{-\infty} g_3 f_3\,dp$$

Второе разложение дебаевского переходного слоя имеет вид

$$z_i=\left(\frac{\varepsilon\chi}{\delta}\right)^{1/2} g_4(\eta_4)+\ldots,\qquad z_e=\left(\frac{\varepsilon\chi}{\delta}\right)^{1/2}\frac{r_D^2}{\chi^2 m} f_4(\eta_4)+\ldots \tag{2.4}$$

$$I_i=\chi G_4(\eta_4)+\ldots,\qquad I_e=\frac{r_D^2}{\chi m}F_4(\eta_4)+\ldots,\qquad E=\left(\frac{\chi\delta}{\varepsilon}\right)^{1/2} E_4(\eta_4)+\ldots$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_e}{1+\beta}m+\ldots-\frac{\theta_D}{3}\ln\frac{\chi}{\varepsilon}+\left(\frac{\chi\delta^3}{\varepsilon}\right)^{1/2}\psi_4(\eta_4)+\ldots$$

$$-\infty<\eta_4=\frac{[\eta-(\eta_D-\delta)](\chi\delta)^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}<\infty$$

где малый параметр δ является бо́льшим корнем алгебраического уравнения

$$\left(\frac{\chi\delta^3}{\varepsilon}\right)^{1/6}\exp\left[-\frac{4u_2^{1/2}}{3\theta_D}\left(\frac{\chi\delta^3}{\varepsilon}\right)^{1/2}+\ldots\right]=\frac{r_D^2}{\chi^2 m}$$

Можно показать, что $\delta=O(\varepsilon m^2/\chi)^{1/3}$. Имеем задачу

$$G_4=-a_D\frac{dg_4}{d\eta_4}+\frac{a_D}{\theta_D}g_4E_4,\qquad F_4=-a_D\frac{df_4}{d\eta_4}-\frac{a_D}{\theta_D}f_4E_4$$

$$\frac{dG_4}{d\eta_4}=0,\qquad \frac{dF_4}{d\eta_4}=0,\qquad \frac{dE_4}{d\eta_4}=0,\qquad \frac{d\psi_4}{d\eta_4}=0$$

$$\eta_4\to\infty,\qquad g_4\to\theta_D u_2^{1/2},\qquad f_4\sim\exp\left(\frac{2u_2^{1/2}}{\theta_D}\eta_4\right)+\ldots$$

$$G_4\to j_1,\quad F_4\to-\frac{\beta b_D}{(1+\beta)q_D'},\qquad E_4\to-2u_2^{1/2},\qquad \psi_4\to-\frac{4}{3}u_2^{1/2}$$

Решение этой задачи в предположении, что функция g_4 ограничена при $\eta_4\to-\infty$, будет

$$g_4=\theta_D u_2^{1/2},\qquad f_4=-\frac{\beta b_D\theta_D}{2(1+\beta)a_D q_D' u_2^{1/2}}+\exp\left(\frac{2u_2^{1/2}}{\theta_D}\eta_4\right)$$

$$G_4=j_1,\qquad F_4=-\frac{\beta b_D}{(1+\beta)q_D'},\qquad E_4=-2u_2^{1/2},\qquad \psi_4=-\frac{4}{3}u_2^{1/2}$$

Первое разложение, справедливое в дебаевском слое, имеет вид

$$z_i=(\varepsilon\chi)^{1/2}g_5(\eta)+\ldots,\qquad z_e=\frac{r^2}{\chi^2 m}(\varepsilon\chi)^{1/2}\frac{\beta b\theta}{(1+\beta)aq'E_5(\eta)}+\ldots \tag{2.5}$$

$$I_i=\chi G_5(\eta)+\ldots,\qquad I_e=-\frac{r^2}{\chi m}\frac{\beta b}{(1+\beta)q'}+\ldots$$

$$E=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}E_5(\eta)+\ldots,\qquad \psi=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}\psi_5(\eta)+\ldots,\qquad 0<\eta<\eta_D$$

Имеем задачу

$$G_5=\frac{a}{\theta}g_5E_5,\qquad G_5'=0,\qquad \theta E_5'=g_5,\qquad \psi_5'=-E_5$$

$$\eta\to\eta_D,\qquad g_5\sim\left[\frac{\theta_D^2(-j_1)}{2a_D(\eta_D-\eta)}\right]^{1/2}+\ldots,\qquad G_5\to j_1$$

$$E_5\sim-\left[\frac{2(-j_1)(\eta_D-\eta)}{a_D}\right]^{1/2}+\ldots,\qquad \psi_5\sim-\left[\frac{8(-j_1)(\eta_D-\eta)^3}{9a_D}\right]^{1/2}+\ldots$$

Решение этой задачи будет

$$g_5=\frac{j_1\theta}{aE_5},\qquad G_5=j_1,\qquad E_5=-\left(-2j_1\int\limits_\eta^{\eta_D}\frac{dp}{a}\right)^{1/2},\qquad \psi_5=\int\limits_\eta^{\eta_D}E_5\,dp$$

Второе разложение, справедливое в дебаевском слое, имеет вид

$$z_i=(\varepsilon\chi)^{1/2}g_6(\eta_6)+\ldots,\qquad z_e=\frac{r_w^2}{\chi^2 m}(\varepsilon\chi)^{1/2}f_6(\eta_6)+\ldots$$

$$I_i=\chi G_6(\eta_6)+\ldots,\qquad I_e=\frac{r_w^2}{\chi m}F_6(\eta_6)+\ldots,\qquad E=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}E_6(\eta_6)+\ldots$$

$$\psi=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}\psi_{5w}+\ldots+\left(\frac{\chi}{\varepsilon m^2}\right)^{1/2}\psi_6(\eta_6)+\ldots,\qquad 0<\eta_6=\eta m<\infty$$

Имеем задачу

$$G_6=\frac{a_w}{\theta_w}g_6E_6,\qquad F_6=-\frac{a_w}{\theta_w}f_6E_6,\qquad \frac{dG_6}{d\eta_6}=0$$

$$\frac{dF_6}{d\eta_6}=\frac{2\beta b_w}{1+\beta}\exp(-2q_w'\eta_6),\qquad \frac{dE_6}{d\eta_6}=0,\qquad \frac{d\psi_6}{d\eta_6}=-E_6$$

$$\eta_6\to\infty,\qquad g_6\to g_{5w},\qquad f_6\sim\frac{\beta b_w\theta_w}{(1+\beta)a_wq_w'E_{5w}}\exp(-2q_w'\eta_6)+\ldots$$

$$G_6\to j_1,\quad F_6\sim-\frac{\beta b_w}{(1+\beta)q_w'}\exp(-2q_w'\eta_6)+\ldots,\qquad E_6\to E_{5w},\qquad \psi_6\sim-E_{5w}\eta_6+\ldots$$

$$\eta_6=0,\qquad F_6=0$$

Решение этой задачи будет

$$g_6=g_{5w},\qquad f_6=\frac{\beta b_w\theta_w}{(1+\beta)a_wq_w'E_{5w}}[\exp(-2q_w'\eta_6)-1],\qquad G_6=j_1$$

$$F_6=-\frac{\beta b_w}{(1+\beta)q_w'}[\exp(-2q_w'\eta_6)-1],\qquad E_6=E_{5w},\qquad \psi_6=-E_{5w}\eta_6+\mathrm{const}$$

Наконец, разложение, справедливое в ионном диффузионном слое, имеет вид

$$z_i=(\varepsilon\chi)^{1/2}g_7(\eta_7)+\ldots,\qquad z_e=\frac{\varepsilon r_w^2}{\chi^2}f_7(\eta_7)+\ldots$$

$$I_i=\chi G_7(\eta_7)+\ldots,\qquad I_e=\frac{\varepsilon^{1/2}r_w^2}{\chi^{3/2}}F_7(\eta_7)+\ldots$$

$$E=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}E_7(\eta_7)+\ldots,\qquad \psi=\left(\frac{\chi}{\varepsilon}\right)^{1/2}\psi_{5w}+\ldots+\psi_7(\eta_7)+\ldots,$$

$$0\leqslant\eta_7=\frac{\eta\chi^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}<\infty$$

Имеем задачу

$$G_7=-a_w\frac{dg_7}{d\eta_7}+\frac{a_w}{\theta_w}g_7E_7,\qquad F_7=-a_w\frac{df_7}{d\eta_7}-\frac{a_w}{\theta_w}f_7E_7$$

$$\frac{dG_7}{d\eta_7}=0,\quad \frac{dF_7}{d\eta_7}=\frac{2\beta b_w}{1+\beta},\quad \frac{dE_7}{d\eta_7}=0,\quad \frac{d\psi_7}{d\eta_7}=-E_7$$

$$\eta_7\to\infty,\quad g_7\to g_{5w},\quad f_7\sim\frac{2\beta b_w\theta_w}{(1+\beta)a_w(-E_{5w})}\eta_7+\ldots$$

$$G_7\to j_1,\quad F_7\sim\frac{2\beta b_w}{1+\beta}\eta_7+\ldots,\quad E_7\to E_{5w},\quad \psi_7\sim -E_{5w}\eta_7+\ldots$$

$$\eta_7=0,\quad g_7=f_7=0$$

Для функций g_7, f_7, G_7, F_7, E_7, ψ_7 находим

$$g_7=g_{5w}\left[1-\exp\left(\frac{E_{5w}}{\theta_w}\eta_7\right)\right],\quad f_7=\frac{2\beta b_w\theta_w}{(1+\beta)a_w(-E_{5w})}\eta_7$$

$$G_7=j_1,\quad F_7=\frac{2\beta b_w}{1+\beta}\left(\eta_7+\frac{\theta_w}{E_{5w}}\right),\quad E_7=E_{5w},\quad \psi_7=-E_{5w}\eta_7+\mathrm{const}$$

Тем самым построение решения для рассматриваемого предельного случая закончено.

Выше предполагалось, что $r_D^2/(\varepsilon\chi m)=O(1)$. Можно, однако, показать, что в случаях $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to\infty$, $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to 0$ изменится только решение в дебаевском переходном слое; во всех остальных областях останутся справедливыми решения, полученные выше. Не приводя за недостатком места подробных результатов, отметим лишь, что в случае $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to\infty$ для описания дебаевского переходного слоя необходимо рассматривать три асимптотических разложения, первое из которых связано с переменной $\eta_8=(\eta-\eta_D)(\chi^2 m/r_D^2)^{1/3}$ и справедливо при $0<\eta_8<\infty$, второе аналогично (2.3), третье совпадает с (2.4); в случае $r_D^2/(\varepsilon\chi m)\to 0$ необходимо рассматривать четыре разложения, первое из которых аналогично (2.3), второе связано с переменной $\eta_9=[\eta-(\eta_D-\delta_1)](\chi\delta_1/\varepsilon)^{1/2}$ и справедливо при $-\infty<\eta_9<\infty$ (малый параметр δ_1 является корнем уравнения $(\varepsilon/\chi)^{1/3}\delta_1\exp[-4u_2^{1/2}(\chi\delta_1^3)^{1/2}/(3\theta_D\varepsilon)^{1/2}+\ldots]=r_D^2/(\varepsilon\chi m)$; можно показать, что $\delta_1/\delta=[1+o(1)]/k_4$, $k_4>1$), третье связано с переменной $\eta_{10}=(\eta-\eta_D)/\delta_1$ и справедливо при $-k_4<\eta_{10}<-1$, четвертое разложение совпадает с (2.4).

3. Случай $\alpha_D=O(1)$. В этом случае весь объем плазмы можно подразделить на внешнюю — химически равновесную — область, переходный слой (этот слой в свою очередь может быть подразделен на два подслоя), дебаевский слой (этот слой может быть подразделен на три подслоя), ионный диффузионный слой. Плотность тока j в этом случае имеет порядок величины $r_D^2/(\chi m)$, поэтому будем полагать параметр $j_2=j\chi m/r_D^2$ фиксированным.

Внешнее разложение по-прежнему имеет вид (2.1); в данном предельном случае оно справедливо при $\eta_D<\eta<\infty$. Первое разложение, справедливое в переходном слое, имеет вид

$$z_i r_D g_{11}(\eta_{11})+\ldots,\quad z_e=r_D f_{11}(\eta_{11})+\ldots$$

$$I_i=\frac{r_D^2}{\chi m}G_{11}(\eta_{11})+\ldots,\quad I_e=\frac{r_D^2}{\chi m}F_{11}(\eta_{11})+\ldots,\quad E=\frac{r_D}{\chi m}E_{11}(\eta_{11})+\ldots$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_D}{1+\beta}m+\ldots+\psi_{11}(\eta_{11})+\ldots,\quad 0<\eta_{11}=(\eta-\eta_D)m<\infty$$

Имеем задачу

$$G_{11}=-\frac{\alpha_D^2 b_D}{q_D'^2}\frac{dg_{11}}{d\eta_{11}}+\frac{a_D}{\theta_D}g_{11}E_{11},\quad F_{11}=-\frac{\alpha_D^2 b_D}{q_D'^2}\frac{df_{11}}{d\eta_{11}}-\frac{a_D}{\theta_D}f_{11}E_{11}$$

$$\frac{dG_{11}}{d\eta_{11}}=\frac{2b_D}{1+\beta}[\exp(-2q_D'\eta_{11})-g_{11}f_{11}],\quad F_{11}=\beta(G_{11}-j_2)$$

$$g_{11}=f_{11}, \qquad \frac{d\psi_{11}}{d\eta_{11}}=-\frac{a_D q_D'^2 E_{11}}{\alpha_D^2 b_D}$$

$$\eta_{11}\to\infty, \quad g_1\sim\exp(-q_D'\eta_{11})+\ldots, \quad f_{11}\sim\exp(-q_D'\eta_{11})+\ldots$$

$$G_{11}\sim\frac{2\alpha_D^2 b_D}{(1+\beta)q_D'}\exp(-q_D'\eta_{11})+\ldots, \quad F_{11}\sim\frac{2\beta\alpha_D^2 b_D}{(1+\beta)q_D'}\exp(-q_D'\eta_{11})+\ldots$$

$$E_{11}\to\frac{(1-\beta)\alpha_D^2 b_D\theta_D}{(1+\beta)a_D q_D'}, \quad \psi_{11}\sim-\frac{(1-\beta)\theta_D q_D'}{1+\beta}\eta_{11}+\ldots$$

$$\eta_{11}=0, \quad g_{11}=f_{11}=0$$

Решение этой задачи будет (функция $\zeta=\zeta(x;\,\alpha_D)$ вычислена в [4], где она обозначается z_5)

$$g_{11}=f_{11}=\alpha_D^2\zeta(-q_D'\eta_{11}-2\ln\alpha_D;\ \alpha_D)$$

$$G_{11}=-\frac{2\alpha_D^2 b_D}{(1+\beta)q_D'^2}\frac{dg_{11}}{d\eta_{11}}+\frac{\beta j_2}{1+\beta}, \quad F_{11}=-\frac{2\beta\alpha_D^2 b_D}{(1+\beta)q_D'^2}\frac{dg_{11}}{d\eta_{11}}-\frac{\beta j_2}{1+\beta}$$

$$E_{11}=\frac{\theta_D}{a_D g_{11}}\left[\frac{\beta j_2}{1+\beta}-\frac{(1-\beta)\alpha_D^2 b_D}{(1+\beta)q_D'^2}\frac{dg_{11}}{d\eta_{11}}\right], \quad \psi_{11}=-\frac{a_D q_D'^2}{\alpha_D^2 b_D}\int E_{11}\,d\eta_{11}$$

Второе разложение переходного слоя имеет вид

$$z_i=r_D\left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{1/3} g_{12}(\eta_{12})+\ldots, \quad z_l=r_D\left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{1/3} f_{12}(\eta_{12})+\ldots$$

$$I_i=\frac{r_D^2}{\chi m}G_{12}(\eta_{12})+\ldots, \quad I_l=\frac{r_D^2}{\chi m}F_{12}(\eta_{12})+\ldots,$$

$$E=\frac{r_D}{(\varepsilon\chi^2)^{1/3}m}E_{12}(\eta_{12})+\ldots$$

$$\psi=\frac{(1-\beta)\ln\theta_D}{1+\beta}m+\ldots+\frac{u_1}{3}\ln\frac{\chi}{\varepsilon}+\psi_{12}(\eta_{12})+\ldots,$$

$$-\infty<\eta_{12}=\frac{(\eta-\eta_D)m\chi^{1/3}}{\varepsilon^{1/3}}<\infty$$

$$u_1=-\frac{\theta_D}{b_D}\left[\frac{(1-\beta)b_D}{1+\beta}+\frac{\beta j_2 q_D'}{(1+\beta)\alpha_D^4\xi}\right], \quad \xi=\xi(\alpha_D)=\frac{d\zeta}{dx}(x=-2\ln\alpha_D;\,\alpha_D)$$

Функция $\xi(\alpha_D)$ найдена численно в [4]; для приближенной оценки этой функции можно использовать следующую аппроксимационную формулу:

$$\xi=\frac{2}{\sqrt{3}\alpha_D^3}(1+\alpha_D)+\frac{4{,}134}{\ln^3(\alpha_D+2)}\,\frac{1}{1+\exp(0{,}8-0{,}2\ln\alpha_D)}$$

Эта формула описывает численные результаты работы [4] с наибольшей относительной погрешностью 10%.

Имеем задачу

$$G_{12}=-\frac{\alpha_D^2 b_D}{q_D'^2}\frac{dg_{12}}{d\eta_{12}}+\frac{a_D}{\theta_D}g_{12}E_{12}, \quad F_{12}=-\frac{\alpha_D^2 b_D}{q_D'^2}\frac{df_{12}}{d\eta_{12}}-\frac{a_D}{\theta_D}f_{12}E_{12}$$

$$\frac{dG_{12}}{d\eta_{12}}=0, \quad F_{12}=\beta(G_{12}-j_2), \quad \theta_D\frac{dE_{12}}{d\eta_{12}}=g_{12}-f_{12}, \quad \frac{d\psi_{12}}{d\eta_{12}}=-\frac{a_D q_D'^2}{\alpha_D^2 b_D}E_{12}$$

$$\eta_{12}\to\infty, \quad g_{12}\sim-\alpha_D^2\xi q_D'\eta_{12}+\ldots, \quad f_{12}\sim-\alpha_D^2\xi q_D'\eta_{12}+\ldots$$

$$G_{12}\to\frac{2\alpha_D^4 b_D\xi}{(1+\beta)q_D'}+\frac{\beta j_2}{1+\beta}, \quad F_{12}\to\frac{2\beta\alpha_D^4 b_D\xi}{(1+\beta)q_D'}-\frac{\beta j_2}{1+\beta}$$

$$E_{12}\sim\frac{\alpha_D{}^2b_Du_1}{a_Dq_D{}'^2}\frac{1}{\eta_{12}}+\ldots,\qquad \psi_{12}\sim-u_1\ln\eta_{12}+\ldots$$

$$\eta_{12}\to-\infty,\quad g_{12}\to0,\quad f_{12}\to0$$

Асимптотика решения этой задачи при $\eta_{12}\to-\infty$ найдена в [1].

Разложение, справедливое во внешней части дебаевского слоя, имеет вид

$$z_i=r_D\left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{1/2}g_{13}(\eta_{11})+\ldots,\qquad z_e=r_D\left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{1/2}f_{13}(\eta_{11})+\ldots$$

$$I_i=\frac{r_D{}^2}{\chi m}G_{13}(\eta_{11})+\ldots,\qquad I_e=\frac{r_D{}^2}{\chi m}F_{13}(\eta_{11})+\ldots$$

$$E=\frac{r_D}{(\varepsilon\chi)^{1/2}m}E_{13}(\eta_{11})+\ldots,\quad \psi=\frac{r_D}{(\varepsilon\chi)^{1/2}m^2}\psi_{13}(\eta_{11})+\ldots,\quad -\infty<\eta_{11}<0$$

Имеем задачу

$$G_{13}=\frac{a_D}{\theta_D}g_{13}E_{13},\qquad F_{13}=-\frac{a_D}{\theta_D}f_{13}E_{13},\qquad \frac{dG_{13}}{d\eta_{11}}=\frac{2b_D}{1+\beta}\exp(-2q_D{}'\eta_{11})$$

$$F_{13}=\beta(G_{13}-j_2),\qquad \theta_D\frac{dE_{13}}{d\eta_{11}}=g_{13}-f_{13},\qquad \frac{d\psi_{13}}{d\eta_{11}}=-E_{13}$$

$$\eta_{11}\to0,\qquad g_{13}\sim-\frac{\theta_DG_{12}}{2\alpha_D{}^2}\left(\frac{q_D{}'}{a_Db_D\xi}\frac{1}{\eta_{11}}\right)^{1/2}+\ldots,$$

$$f_{13}\sim\frac{\theta_DF_{12}}{2\alpha_D{}^2}\left(\frac{q_D{}'}{a_Db_D\xi}\frac{1}{\eta_{11}}\right)^{1/2}+\ldots$$

$$G_{13}\to G_{12},\qquad F_{13}\to F_{12},\qquad E_{13}\sim-\left(\frac{4\alpha_D{}^4b_D\xi}{a_Dq_D{}'}\eta_{11}\right)^{1/2}+\ldots,$$

$$\psi_{13}\sim-\left(\frac{16\alpha_D{}^4b_D\xi}{9a_Dq_D{}'}\eta_{11}{}^3\right)^{1/2}+\ldots$$

$$\eta_{11}\to-\infty,\qquad F_{13}\to0$$

Решение этой задачи будет

$$g_{13}=\frac{G_{13}\theta_D}{a_DE_{13}},\qquad G_{13}=j_2-\frac{b_D}{(1+\beta)q_D{}'}\exp(-2q_D{}'\eta_{11}),\qquad j_2=\frac{b_D(1+2\alpha_D{}^4\xi)}{q_D{}'}$$

$$f_{13}=-\frac{F_{13}\theta_D}{a_DE_{13}},\qquad F_{13}=-\frac{\beta b_D}{(1+\beta)q_D{}'}\exp(-2q_D{}'\eta_{11})$$

$$E_{13}=-\left\{\frac{2j_2}{a_D}\eta_{11}-\frac{b_D[1-\exp(-2q_D{}'\eta_{11})]}{a_Dq_D{}'^2}\right\}^{1/2},\qquad \psi_{13}=-\int\limits_0^{\eta_{11}}E_{13}\,dp$$

Последующий анализ данного пункта может быть выполнен аналогично анализу дебаевского и ионного диффузионного слоев п. 2 и здесь не приводится.

4. Случай $\alpha_D\to0$. Не приводя подробных результатов, отметим лишь, что этот предельный случай качественно подобен предыдущему, отличие состоит в том, что в данном случае переходный слой может быть описан в рамках единого асимптотического разложения. Плотность тока по-прежнему имеет порядок величины $r_D{}^2/(\chi m)$.

5. Обсуждение результатов. Из рассматриваемых в п. 2—4 асимптотических решений следует, что в большей части дебаевского слоя объемные реакции ионизации и рекомбинации не влияют в первом приближении на распределение притягивающихся к электроду частиц (ионов), хотя ионизация и влияет на распределение отталкивающихся частиц (электронов). Заметим, что в предельном случае горячего электрода [1] при $\eta_D=O$ (1) объемная ионизация влияет на распределение в дебаевском слое как электронов, так и ионов.

Далее, из полученных в п. 2–4 результатов следует, что во всех рассмотренных случаях основной вклад в падение напряжения в приэлектродной области вносит дебаевский слой. Поскольку объемные химические реакции не влияют, как отмечено выше, на распределение ионов и, следовательно, электрического поля в основной части дебаевского слоя, то можно ожидать, что для данных значений j, η_D величина указанного приэлектродного падения не зависит от значения параметра α_D. В самом деле, во всех трех случаях $\alpha_D\gg1$, $\alpha_D=O$ (1), $\alpha_D\ll1$ для этой величины получается одна и та же формула

$$\psi_w=-\left(-\frac{2j}{\varepsilon}\right)^{1/2}\int\limits_0^{\eta_D}\left(\int\limits_\eta^{\eta_D}\frac{dp}{a}\right)^{1/2}d\eta \tag{5.1}$$

Напротив, величина плотности тока на электрод при данном значении η_D определяется химическими реакциями вблизи внешней границы дебаевского слоя и существенно зависит от значения α_D. В случае $\alpha_D\gg1$ поток ионов на электрод формируется в рекомбинационном слое, в случае $\alpha_D=O$ (1) – в первом переходном слое и во внешней части дебаевского слоя, в случае $\alpha_D\ll1$ – во внешней части дебаевского слоя. Для этих случаев справедливы соответственно следующие формулы:

$$j=-2\chi a_D u_2,\qquad j=-\frac{b_D r_D^2(1+2\alpha_D^4\xi)}{\chi m(-q_D')},\qquad j=-\frac{b_D r_D^2}{\chi m(-q_D')} \tag{5.2}$$

Эти формулы в сочетании с формулой (5.1) можно рассматривать как параметрическое описание вольт-амперной характеристики области возмущения: для каждого значения параметра η_D из интервала $(0,\infty)$ по соответствующей формуле (5.2) определяется плотность тока на электрод, затем по формуле (5.1) – приэлектродное падение потенциала. Заметим, что расчеты по второй и третьей формулам (5.2) могут быть выполнены непосредственно, в то время как для расчета по первой формуле предварительно необходимо решить, вообще говоря, численно, задачу (2.2) (при решении этой задачи для определенности можно считать, что внешняя граница рекомбинационного слоя находится в точке η_{s1}, и заменить индекс s во втором граничном условии на индекс $s1$).

Формулы (5.2) при соответствующих предельных переходах согласуются между собой. В самом деле, с использованием результатов работы [4] нетрудно показать, что при предельном переходе $\eta_{s1}-\eta_D\to0$, $m(\eta_{s1}-\eta_D)\to+\infty$ первая и вторая формулы могут быть преобразованы к одинаковому виду; при $m(\eta_{s1}-\eta_D)\to-\infty$ (т. е. при $\alpha_D\to 0$) вторая формула становится тождественной третьей.

В заключение заметим, что результаты, полученные в настоящей работе, согласуются с результатами, полученными для случая горячего электрода в [1]: в пределе $m\to\infty$ формулы [1], описывающие вольт-амперную характеристику в случае $\eta_D=O$ (1), могут быть преобразованы к виду, совпадающему с (5.1) и третьей формулой (5.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бенилов М. С.* Приэлектродная область в химически равновесной слабоионизованной плазме.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 142–153.
2. *Любимов Г. А., Михайлов В. Н.* К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3, с. 9–17.
3. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* Асимптотическая теория химически неравновесного слоя вблизи идеально каталитической стенки.– ПММ, 1980, т. 44, в. 2, с. 281–289.
4. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* Асимптотическая теория слоя неравновесной ионизации вблизи каталитической стенки в плазме молекулярных газов.– ПММ, 1980, т. 44, в. 5, с. 839–846.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976, с. 455.
6. *Bush W. B., Fendell F. E.* Continuum theory of spherical electrostatic probes (frozen chemistry).– J. Plasma Phys., 1970, v. 4, № 2, p. 317–334.

Москва

Поступила в редакцию
9.X.1981