

УДК 532.584.013.4

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ВЯЗКОЙ
АНИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ**

КИРЕЙКО Г. В., ПИЛИПЕНКО В. Н.

Экспериментальные исследования показывают, что присутствие в жидкости волокон и жестких асимметричных частиц приводит к повышению устойчивости течения в трубах и вызывает снижение турбулентного сопротивления трения в некотором диапазоне чисел Рейнольдса [1]. При описании анизотропной структуры жидкости с добавками ниже использована реологическая модель Эриксона [2]. Конкретизация параметров модели проведена в соответствии с [3], при этом в предельном случае слабого броуновского движения учитывается эффект преимущественной ориентации частиц и влияние добавок на продольную и сдвиговую вязкость. Рассмотрена устойчивость течения Пуазейля в линейной постановке. В анизотропной вязкой жидкости уравнение типа Орра — Зоммерфельда имеет особую точку. Правило выбора пути интегрирования с обходом особой точки получено на основе обобщения метода [4], предложенного при исследовании устойчивости потока идеальной жидкости. Приведены результаты численных расчетов кривой нейтральной устойчивости для двумерных возмущений.

1. Уравнение состояния анизотропной среды имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -p\delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij} + (\mu_1 + \mu_2 e_{km} n_k n_m) n_i n_j + 2\mu_3 (e_{jk} n_k n_i + e_{ik} n_k n_j) \\ & \frac{\partial n_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} - \omega_{ij} n_j = \lambda (e_{ij} n_j - e_{km} n_k n_m n_i) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$e_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

где u_j — компоненты скорости в декартовой системе координат x_j , n_i — компоненты единичного вектора N .

В [3] предполагается, что N является вектором преимущественной ориентации частиц, μ_0 — вязкость ньютоновского растворителя, $\mu_1 = 0$ (так как среда изотропна в состоянии покоя), μ_2 и μ_3 — константы. Значения параметров μ_2 и μ_3 находятся путем сопоставления значений вязкости при простом растяжении и сдвиге, рассчитанных на основе (1.1), с результатами вычислений для моделей суспензий, рассматриваемых в статической механике суспензий. Для суспензии, частицы которой моделируются жесткими вытянутыми эллипсоидами вращения, в пределе слабого броуновского движения справедливы формулы [3]

$$\mu_2 = \mu_0 \Phi \left[\frac{l^2}{\ln 2l - 1,5} - \frac{1,26l}{\ln l} \right], \quad \mu_3 = \frac{0,315\mu_0 \Phi l}{\ln l}, \quad \lambda = 1$$

где l — величина отношения осей эллипсоида вращения, Φ — объемная концентрация частиц.

Отметим, что задача об устойчивости течения Пуазейля при другом способе определения параметров уравнений (1.1) рассматривалась также в [5]. Считалось, что $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu_0 \Phi l^2 / (\ln 2l - 1,5)$, $\mu_3 = 0$ и $\lambda = (l^2 - 1) / (l^2 + 1)$. Эта интерпретация не является физически обоснованной, так как при таком подходе нельзя описать установившееся течение при фиксированных значениях e_{ij} (компоненты σ_{ij} периодически меняются во времени), кроме того, при течении с поперечным сдвигом не учитывается увеличение вязкости суспензии по сравнению с течением ньютоновского

растворителя. В [5] приближенно проанализирована лишь устойчивость течения Пуазейля при наиболее вероятной ориентации волокон в потоке.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости течения суспензии в канале. Пусть ось x направлена по оси канала, а y — по нормали к стенке, тогда уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

К этим уравнениям добавляются уравнения состояния (1.1), в которых $\mu_1=0$ и $\lambda=1$.

Основное течение, устойчивость которого исследуется, имеет вид

$$u_1 = U(y) = \frac{3}{2} U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right], \quad u_2 = 0, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 0$$

где U_0 — средняя по ширине канала скорость, L — полуширина канала. На основное течение накладываются возмущения скорости u_1' , u_2' , давления p' и вектора ориентации n_1' , n_2' . В линейном приближении для возмущений получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1'}{\partial t} + U \frac{\partial u_1'}{\partial x} + u_2' \frac{dU}{dy} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{11}'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}'}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u_{21}'}{\partial t} + U \frac{\partial u_2'}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{12}'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}'}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial u_2'}{\partial y} = 0 \\ \sigma_{11}' &= -p' + (2\mu_0 + \mu_2 + 4\mu_3) \frac{\partial u_1'}{\partial x} + (\mu_2 + 2\mu_3) n_2' \frac{dU}{dy} \\ \sigma_{12}' &= (\mu_0 + \mu_3) \left(\frac{\partial u_2'}{\partial x} + \frac{\partial u_1'}{\partial y} \right), \quad \sigma_{22}' = -p' + 2\mu_0 \frac{\partial u_2'}{\partial y} + 2\mu_3 n_2' \frac{dU}{dy} \\ \frac{\partial n_1'}{\partial t} + U \frac{\partial n_1'}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial n_2'}{\partial t} + U \frac{\partial n_2'}{\partial x} = \frac{\partial u_2'}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем искать решение системы (2.2) в виде $f'(x, y, t) = \text{Re} \{ f(y) \exp \times [i\alpha(x-ct)] \}$, тогда для амплитуды функции тока $\Psi(y)$ имеем

$$\begin{aligned} L(\Psi) &\equiv \Psi^{IV} - \Psi'' \left[\text{Ri} \alpha (U-c) + \alpha^2 (2 + \mu^+) \right] + \Psi' \frac{\alpha^2 \mu^+ U'}{U-c} + \\ &+ \Psi \left[\text{Ri} \alpha^3 (U-c) + \alpha^4 + \text{Ri} \alpha U'' + \frac{\alpha^2 \mu^+}{U-c} \left(U'' - \frac{U'^2}{U-c} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Psi = \Psi' = 0 \quad (y = \pm 1)$$

Уравнения (2.3) приведены к безразмерному виду при использовании системы параметров: \bar{L} , U_0 , ρ и $\mu = \mu_0 + \mu_3$; $\mu^+ = \mu_2/\mu$, $R = U_0 L \rho / \mu$ (как следует из (1.1), μ — эффективная вязкость анизотропной жидкости при течении с поперечным сдвигом).

Для заданных параметров α и R определяется значение c . Если $\text{Im } c > 0$, тогда возмущения экспоненциально возрастают и течение неустойчиво; если $\text{Im } c < 0$, возмущения убывают и течение устойчиво. В данном случае,

когда $\text{Im } c=0$, может возникнуть особая точка $y_c: U(y_c)=c$ — точка ветвления решения, и возникает вопрос о выборе ветви решения. Этот метод решения, кроме того, предполагает возможность разложения произвольного возмущения по специальным функциям вида $f(y) \exp [i\alpha(x-ct)]$.

Подобные трудности возникают при исследовании устойчивости течений идеальной жидкости. В [6] найдено правило выбора ветви решения при рассмотрении устойчивости идеальной жидкости как предел вязкой при $\mu \rightarrow 0$. Этот метод неприменим в данном случае. В [4] решалась задача Коши с начальными данными для возмущений при течениях идеальной жидкости и получено такое же правило выбора пути интегрирования, как и в [6]. Показано, что неустойчивость возникает из-за наличия в полном решении волновых членов вида $f(y) \exp [i\alpha(x-ct)]$, если $\text{Im } c \geq 0$. В данной работе, с помощью метода [4], показано, что и в случае течения анизотропной вязкой жидкости неустойчивость связана также с волновыми решениями. Усложнение доказательства по сравнению с [4] обусловлено повышением порядка уравнения (2.3).

Рассмотрим задачу Коши для системы (2.2) с начальными данными. Решение ищем в виде $f'(x, y, t) = f(y, t) \exp(i\alpha x)$. Совершая преобразование Лапласа по времени

$$f(y, c) = \int_0^{\infty} f(y, t) e^{i\alpha c t} dt, \quad \text{Im } c > 0$$

получим для образа функции тока $\Psi(y, c)$ неоднородное дифференциальное уравнение

$$L(\Psi) = \varphi(y, c), \quad \varphi(y, c) = R(\Psi_0'' - \alpha^2 \Psi_0) - \frac{\mu^+}{U-c} \left[U'' n_0 + U' n_0' - \frac{U'' n_0}{U-c} \right]$$

$$\Psi = \Psi' = 0 \quad (y = \pm 1) \quad (2.4)$$

Здесь Ψ_0 и n_0 — начальные значения Ψ и n_2 соответственно.

Таким образом, надо решить уравнение (2.4) с краевыми условиями, найти прообраз $\Psi(y, t)$ и исследовать его поведение во времени. Если Ψ возрастает со временем, течение неустойчиво; если при увеличении t $\Psi(y, t)$ остается ограниченной, течение устойчиво.

Рассмотрим однородное уравнение (2.4) с краевыми условиями при $c \rightarrow \infty$. Пренебрегая малыми по отношению к c величинами, получим

$$\Psi^{IV} + i\alpha R c \Psi'' - i\alpha^3 R c \Psi = 0 \quad (2.5)$$

Умножим уравнение (2.5) на комплексно-сопряженное к Ψ и проинтегрируем по y от -1 до 1

$$I_2 - i\alpha R c I_1 - i\alpha^3 R c I_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$I_0 = \int_{-1}^1 |\Psi|^2 dy, \quad I_1 = \int_{-1}^1 |\Psi'|^2 dy, \quad I_2 = \int_{-1}^1 |\Psi''|^2 dy$$

Из (2.6) следует, что

$$I_2 + \text{Im } c \alpha R I_1 + \text{Im } c \alpha^3 R I_0 = 0, \quad \text{Re } c [\alpha R I_1 + \alpha^3 R I_0] = 0$$

Эти равенства при $\text{Im } c > 0$ удовлетворяются, только если $I_0 = I_1 = I_2 = 0$. Поэтому, при $|\text{Re } c| \geq B > 0$ и $\text{Im } c \geq A > 0$, где A и B достаточно большие постоянные, однородная краевая задача (2.3) не имеет собственных значений.

Построим функцию Грина для уравнения (2.4). Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ — решения однородного уравнения (2.3) с краевыми условиями

$$y = -1: \quad \Psi_1 = \Psi_1' = \Psi_1'' = 0, \quad \Psi_1''' = 1; \quad \Psi_2 = \Psi_2' = \Psi_2'' = 0, \quad \Psi_2''' = 1$$

$$y = 1: \quad \Psi_3 = \Psi_3' = \Psi_3'' = 0, \quad \Psi_3''' = 1; \quad \Psi_4 = \Psi_4' = \Psi_4'' = 0, \quad \Psi_4''' = 1 \quad (2.7)$$

Тогда функция Грина имеет вид

$$G(y, \xi) = \begin{cases} -\frac{\Psi_1(y)F_1(\xi) + \Psi_2(y)F_2(\xi)}{W(c)}, & y < \xi \\ \frac{\Psi_3(y)F_3(\xi) + \Psi_4(y)F_4(\xi)}{W(c)}, & y \geq \xi \end{cases}$$

$$W(c) = - \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_1' & \Psi_2' \end{vmatrix}_{y=1} = - \begin{vmatrix} \Psi_3 & \Psi_4 \\ \Psi_3' & \Psi_4' \end{vmatrix}_{y=-1}$$

Здесь F_i — алгебраические дополнения Ψ_i''' в определителе Вронского $W(c)$ для функций $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$. Определитель Вронского для уравнения (2.3) не зависит от y .

Нули функции $W(c)$ являются собственными значениями для однородной краевой задачи (2.3). Теперь можно записать решение уравнения (2.4) в виде

$$\Psi(y, c) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

Покажем, что функция $\Psi(y, c) \sim |c|^{-3/2}$ при $c \rightarrow \infty, \text{Im } c > 0$. Для простоты рассмотрим стремление c к бесконечности по мнимой оси, т.е. $c = ic_0, c_0 \rightarrow +\infty$. При больших c_0 однородное уравнение (2.3) и его решение имеют вид

$$\Psi^{IV} - \alpha R c_0 \Psi'' + \alpha^3 R c_0 \Psi = 0$$

$$\Psi = C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{-\lambda_1 y} + C_3 e^{\lambda_2 y} + C_4 e^{-\lambda_2 y}$$

где $\lambda_1 \approx \sqrt{\alpha R c_0}, \lambda_2 \approx \alpha, C_i$ — постоянные. Функции Ψ_i , входящие в выражение для $G(y, \xi)$, можно оценить как

$$\Psi_1 \sim \frac{1}{\lambda_1^3} e^{\lambda_1(y+1)}, \quad \Psi_2 \sim \frac{1}{\lambda_1^2} e^{\lambda_1(y+1)}$$

$$\Psi_3 \sim \frac{1}{\lambda_1^3} e^{\lambda_1(1-y)}, \quad \Psi_4 \sim \frac{1}{\lambda_1^2} e^{\lambda_1(1-y)}$$

Тогда определитель Вронского оценивается как

$$W \sim \frac{1}{\lambda_1^4} e^{4\lambda_1}, \quad \Psi_i F_i \sim \frac{1}{\lambda_1^7} e^{4\lambda_1 - \lambda_1 |\xi - y|}$$

Отсюда получаем, что $\Psi(y, c) \sim |c|^{-3/2}$ при $c \rightarrow \infty$.

Таким образом, для функции $\Psi(y, c)$ существует обратное преобразование Лапласа и оно единственно

$$\begin{aligned} \Psi(y, t) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{iA-\infty}^{iA+\infty} \Psi(y, c) e^{-iact} dc = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_{iA-\infty}^{iA+\infty} G(y, \xi) \varphi(\xi) e^{-iact} dc \end{aligned}$$

Чтобы решить вопрос об устойчивости течения, необходимо рассмотреть поведение во времени интеграла

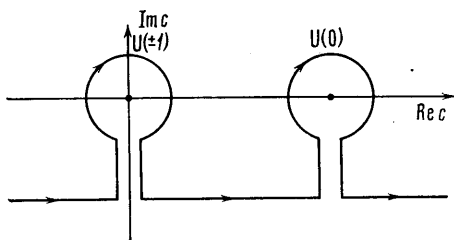
$$\int_{iA-\infty}^{iA+\infty} G(y, \xi) \varphi(\xi) e^{-iact} dc \quad (2.8)$$

Так как $A > 0$, то под интегралом стоит экспонента, растущая со временем, и ограниченность интеграла может возникнуть из-за взаимной интерференции подынтегральной функции на различных участках контура интегрирования. Исследовать это сложно, но, пользуясь аналитичностью подынтегральной функции, можно опустить контур интегрирования к действительной оси насколько это возможно.

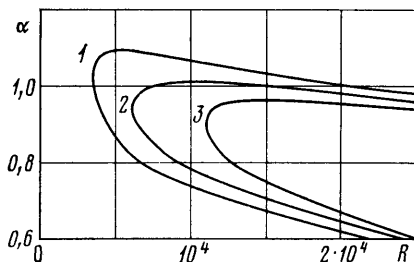
Предположим, что $U(y), \Psi_0(y), n_0(y)$ аналитически продолжаются

с отрезка $[-1, 1]$ на его некоторую окрестность в комплексной плоскости; значения $c=U(\pm 1)$, $U(y_0)$, где $y_0: U'(y_0)=0$, не являются собственными для однородной краевой задачи (2.3).

Функции $\Psi_i(y, c)$, входящие в выражение для $G(y, \xi)$, являются аналитическими при $\text{Im } c > 0$. Эти функции аналитически продолжаются через вещественную ось c всюду, кроме точек $c=U(\pm 1)$, $U(y_0)$. В самом деле, при приближении c к какой-нибудь точке на вещественной оси, отличной от перечисленных, можно продеформировать отрезок $[-1, 1]$ так, чтобы $U(y)$ обходила эту точку в нижней полуплоскости. Тогда уравнение (2.3) не будет иметь особенностей. Из этого условия получается правило выбора



Фиг. 1



Фиг. 2

пути интегрирования, когда $\text{Im } c \leq 0$

$$\text{Im } y > 0, \quad U'(y_c) < 0; \quad \text{Im } y < 0, \quad U'(y_c) > 0$$

где $y_c: U(y_c)=c$.

Функция $G(y, \xi)$ аналитически продолжается из верхней полуплоскости c через вещественную ось всюду, кроме точек $c=U(\pm 1)$, $U(y_0)$. Она имеет полюса в точках c , для которых $W(c)=0$. Хотя функции $G(y, \xi)$ и $W(c)$ не являются аналитическими в точках $c=U(\pm 1)$, $U(y_0)$, они непрерывны в них. В самом деле, используя метод Фробениуса, можно найти разложение системы линейно независимых решений в окрестности особой точки y_c

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \eta^3 \left[1 + \frac{\alpha^2(3+\mu^+)}{30} \eta^2 + O(\eta^3) \right], & \varphi_2 &= \eta^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{U_c''}{U_c'} \eta + O(\eta^2) \right] \\ \varphi_3 &= \eta \left[1 + \frac{U_c''}{U_c'} \eta + O(\eta^2) \right], & \varphi_4 &= 1 + \frac{3U_c''}{U_c'} \eta - \frac{\alpha^2 \mu^+}{2} \eta^2 \ln \eta + O(\eta^2) \end{aligned}$$

где $\eta = y - y_c$; U_c' , U_c'' — значения в y_c .

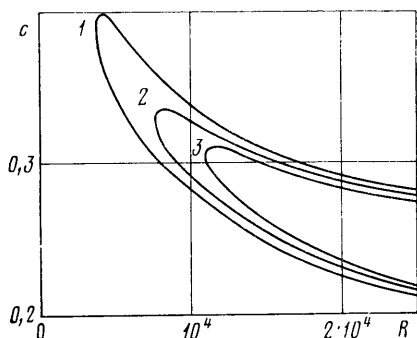
Подобное разложение, только с другими коэффициентами, получается и в окрестности точки $y_0: U'(y_0)=0$. Эти ряды сходятся в некоторой окрестности особой точки и непрерывны. Функции Ψ_i , G , W выражаются через эти функции и также непрерывны. Выше было показано, что нули функции $W(c)$ находятся в полуполосе $|\text{Re } c| < B$ и $\text{Im } c < A$, поэтому $W(c)$ имеет конечное число нулей в области $\text{Im } c > -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Теперь опустим контур интегрирования в (2.8) в нижнюю полуплоскость, учтем точки $U(\pm 1)$, $U(y_0)$ и вычеты в полюсах подынтегральной функции. Получившийся контур интегрирования показан на фиг. 1. Радиусы окружностей выбираются как A_0/t , где A_0 — постоянная, такая, чтобы внутри окружностей не было нулей функции $W(c)$.

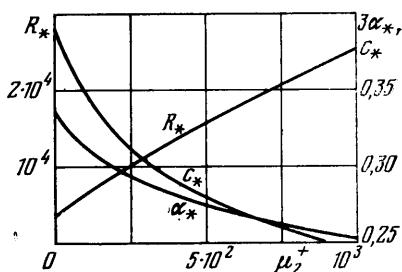
Интеграл по горизонтальным и вертикальным участкам уменьшается со временем из-за наличия под знаком интеграла множителя $\exp(-i\alpha ct)$. Остается оценить интегралы по окружностям. Если ξ не равно ± 1 , y_0 , тогда подынтегральная функция ограничена и интегралы по окружностям

стремятся к нулю, так как длина окружностей уменьшается со временем. Если $\xi = \pm 1$, тогда, как следует из (2.4), функция $\varphi(\xi) \sim (U(\xi) - c)^{-2}$, но $F_i(\xi)$ в окрестности точек ± 1 есть $O[(\xi - y_c)^2]$, потому что две из функций Ψ_i имеют порядок $(\xi - y_c)^3$ и $(\xi - y_c)^2$ в силу краевых условий (2.7) в точках ± 1 . Так как y_c непрерывно зависит от c , то $(\xi - y_c)^2 \sim (U(\xi) - c)^2$ и интегралы по окружностям вокруг $U(\pm 1)$ также убывают.

Оценим интеграл по окружности вокруг $U(y_0)$, когда $\xi = y_0$. В этом случае $G(y, \xi)$ ограничена, а функция $\varphi(\xi) = O[(U(\xi) - c)^{-1}]$, так как $U'(y_0) = 0$. Это означает, что подынтегральная функция есть $O[(U - c)^{-1}]$, и в связи с тем, что длина окружности интегрирования убывает как радиус окружности, интеграл остается ограниченным.



Фиг. 3



Фиг. 4

Теперь осталось учесть вычеты в полюсах подынтегральной функции. Если в точке c_0 функция имеет полюс порядка m , то вычет в этой точке вычисляется как

$$\begin{aligned} & \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{d^{m-1}}{dc^{m-1}} [G(y, \xi) \varphi(\xi) \exp(-i\alpha ct) (c - c_0)^m] = \\ & = \sum_{l=0}^{m-1} (-i\alpha t)^l C_{m-1}^l \exp(-i\alpha c_0 t) \left[\frac{d^{m-1-l}}{dc^{m-1-l}} G(\xi, y) \varphi(\xi) (c - c_0)^m \right]_{c=c_0} \end{aligned}$$

Эти вычеты выделяют в формуле для решения $\Psi(y, t)$ не что иное, как волновые решения. Таким образом, неустойчивость может иметь место в двух случаях: когда существует не вещественное собственное число однородной краевой задачи (2.3), такое, что $\text{Im } c > 0$, тогда решение растёт экспоненциально, когда существует вещественное собственное число, в котором функция $G(y, \xi)$ имеет полюс порядка больше единицы, тогда решение растёт как некоторая степень t .

3. Выше была рассмотрена задача о развитии во времени произвольных малых возмущений в плоском течении Пуазейля вязкой анизотропной жидкости. Показано, что возмущения возрастают, если существуют такие собственные значения уравнения (2.3), у которых $\text{Im } c \geq 0$. Собственные значения однородной краевой задачи (2.3) рассчитывались численно по методу дифференциальной прогонки [7]. На фиг. 2 и 3 приведены нейтральные кривые, для которых $\text{Im } c = 0$, при разных значениях параметра μ^+ ($1 - \mu^+ = 0$, $2 - \mu^+ = 150$, $3 - \mu^+ = 300$). Эти кривые соответствуют наиболее неустойчивой симметричной моде. Путь интегрирования при обходе особой точки y_c : $U(y_c) = c$ выбирался по найденному выше правилу ($\text{Im } y > 0$, если $U'(y_c) < 0$; $\text{Im } y < 0$, если $U'(y_c) > 0$). При увеличении параметра μ^+ , характеризующего влияние волокон на анизотропные свойства среды, устойчивость течения значительно возрастает. Так, при $\mu^+ = 300$, что соответствует концентрации $\Phi \approx 3 \cdot 10^{-5}$ при $l = 10^4$, критическое число Рейнольдса увеличивается почти в 3 раза. На фиг. 4 показано влияние

параметра на критические значения R_* , α_* , c_* . Длина волны первых неустойчивых колебаний в анизотропной жидкости больше, чем в жидкости Навье — Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипенко В. Н. Влияние добавок на пристенные турбулентные течения.— Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа. М., 1980, т. 15, с. 156—257.
2. Ericksen J. L. Transversely isotropic fluids.— Kolloid Z., 1960, v. 173, № 2, p. 117—122.
3. Пилипенко В. Н., Калинин Н. М., Лемак А. С. Устойчивость течения суспензии волокон в зазоре между коаксиальными цилиндрами.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 3, с. 554—558.
4. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 5, с. 1068—1071.
5. Bark F. H., Tinoco H. Stability of plane Poiseuille flow of a dilute suspension of slender fibres.— J. Fluid. Mech., 1978, v. 87, № 2, p. 321—333.
6. Лиль Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 143—173.
7. Гольштик М. А., Шгерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977, с. 33—39.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.1981