

УДК 532.5.011

РАСЧЕТ ВЫЕМОК ВЫБРОСА, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ВЗРЫВЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., ПОТАШЕВ А. В.

Наряду с задачей расчета выемок выброса, образующихся при взрыве зарядов взрывчатого вещества (ВВ) в однородных изотропных средах, исследованию которой в рамках импульсно-гидродинамических моделей посвящено большое количество работ (см., например, библиографию к [1]), также представляют интерес задачи расчета выемок выброса в неоднородных и анизотропных средах. В последние годы появился ряд работ по определению выемок выброса в неоднородной среде, состоящей из различных по прочности однородных изотропных слоев (см., например, [2, 3]).

В данной работе исследуется задача об определении выемки выброса, образующейся при взрыве шнурового заряда в однородной анизотропной среде, т. е. когда прочность зависит от направления приложенной нагрузки. Примером таких сред являются монокристаллы различных веществ, некоторые горные породы и тонкослоистые породы.

1. В рамках импульсно-гидродинамических моделей считается, что под действием взрывных нагрузок среда ведет себя как идеальная несжимаемая жидкость [4], т. е. ее движение описывается уравнениями

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad (1.1)$$

Здесь v — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность среды. Если проинтегрировать первое из уравнений (1.1) по времени действия взрыва t , учитывая, что в силу малости t смещение частиц среды мало, то получим

$$v = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad P = \int_0^t p dt \quad (1.2)$$

т. е. при $\rho = \text{const}$ поле скоростей, возникающее в среде под действием взрыва, обладает потенциалом $\varphi = -P/\rho$, причем в силу второго из уравнений (1.1) $\Delta\varphi = 0$.

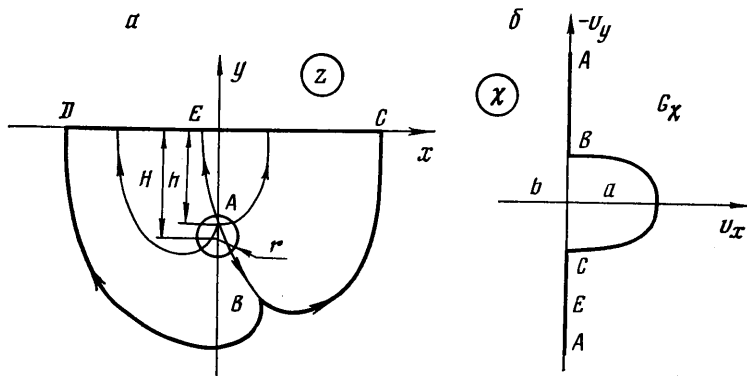
При исследовании взрыва на выброс по струйной (твердо-жидкостной) модели считается, что поле скоростей описывается уравнением (1.2) только в некоторой области вблизи заряда. Вне этой области среда ведет себя как абсолютно жесткое тело, а линия раздела областей является твердой стенкой, которая определяется из условия, что на ней величина скорости равна критическому значению v_* (см., например, [5]). Иначе говоря, в силу (1.2) среда приходит в движение, если $|\nabla P|$ превышает критическое значение Π и при этом внутри области течения $v > v_* = \Pi/\rho$. Для однородной изотропной среды $\Pi = \text{const}$, а в случае рассматриваемой анизотропной по прочности среды величину Π будем считать зависящей от направления ∇P , т. е. от направления v .

В дальнейшем будем рассматривать анизотропию, имеющую или три ортогональные плоскости симметрии (ортотропная среда), или одну плоскость изотропии (трансверсально-изотропная среда). Кроме того, будем считать, что ось шнурового заряда ортогональна одной из плоскостей сим-

метрии ортотропной среды или лежит в плоскости изотропии трансверсально-изотропной среды. В этом случае течение, возникающее под действием взрыва, будет плоским, а величина Π (или v_*) будет зависеть от аргумента θ вектора скорости. Будем считать, что при изменении величины θ конец вектора скорости, соответствующего граничным точкам, будет описывать в плоскости

$$\chi = dw/dz = v_x - iv_y \quad (1.3)$$

эллипс с полуосями a_1 и a_2 ($a_1 \geq a_2$), большая ось которого наклонена под углом $-\gamma$ к оси v_x . Здесь v_x и v_y — проекции вектора скорости на оси x и y физической плоскости $z = x + iy$, ортогональной оси заряда; $w = \phi + i\psi$ —



Фиг. 1

комплексный потенциал течения; $\psi(x, y)$ — функция тока, комплексно сопряженная к $\phi(x, y)$; γ — угол наклона главной оси анизотропии к оси x . Тогда зависимость $v_*(\theta)$ запишется следующим образом:

$$v_*(\theta) = a_1 a_2 [a_1^2 \sin^2(\theta - \gamma) + a_2^2 \cos^2(\theta - \gamma)]^{-1/2}$$

Рассмотрим задачу об определении выемки выброса, образующейся в анизотропном грунте при взрыве шнурового заряда радиуса r , центр которого расположен на глубине $H \geq r$ от свободной поверхности (Фиг. 1, а). Для упрощения числовых расчетов действие заряда конечных размеров будем моделировать при $H > r$ действием гидродинамического источника мощности q , расположенного на глубине $h = \sqrt{H^2 - r^2}$, а при $H = r$ — действием диполя с моментом M , расположенным в точке касания заряда со свободной поверхностью.

Как показывает сравнение зависимостей $n = f(H/r)$ ($n = R/H$ — показатель действия взрыва, R — полуширина выемки выброса), полученных по импульсно-гидродинамическим моделям, с эмпирическими зависимостями $Q = kH^2 F(n)$ ($Q = \pi r^2 \rho_0$ — удельный расход ВВ, ρ_0 — плотность ВВ), величину потенциала $\phi = -\phi_0$ на поверхности заряда можно считать не зависящей от глубины заложения заряда и прямо пропорциональной его радиусу ($\phi_0 = \alpha r$); при этом величины q и M определяются по формулам $q = 2\pi \alpha r / \ln[(H+h)/r]$, $M = 4\pi \alpha r^2$.

Введем безразмерные переменные соотношениями $z' = z/r$, $w' = w/\alpha r$, $v' = v/\alpha$ (в дальнейшем для простоты записи штрих у безразмерных величин писать не будем) и рассмотрим решение указанной задачи в зависимости от величины γ .

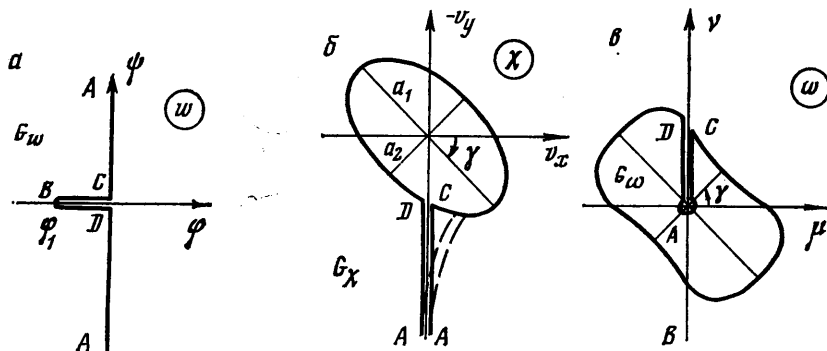
2. Пусть $\gamma = m\pi/2$, где m — целое число. В этом случае оси эллипса в плоскости χ совпадут с координатными осями v_x и $-v_y$, а его уравнение запишется в виде $v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 = 1$, где $a = a_1$, $b = a_2$ при $\gamma = m\pi$ или $a = a_2$, $b = a_1$ при $\gamma = (2m+1)\pi/2$. Тогда область в плоскости z будет симметричной относительно оси y .

Рассмотрим сначала задачу о взрыве поверхностного заряда. В этом случае $h=0$, т. е. точка A в плоскости z совпадает с точкой E (фиг. 1, а). В силу симметрии физической области будем рассматривать лишь ее правую половину, которую обозначим через G_z . Для функции $w(z)$, аналитической в G_z и непрерывной в \bar{G}_z (за исключением точки A), имеем следующие граничные условия:

$$\psi=0, \quad z \in ABC; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{b^2} = 1, \quad z \in BC \quad (2.1)$$

$$\varphi=0, \quad z \in AC; \quad w \sim \frac{2i}{z}, \quad z \in G_\delta \quad (2.2)$$

где G_δ — малая окрестность точки A .



Фиг. 2

В силу условий (2.1) и (2.2) области G_z в плоскости w будет соответствовать второй квадрант G_w , а в плоскости χ — область G_χ (фиг. 1, б) (соответствующие точки в разных плоскостях обозначены одинаковыми буквами).

Введем в качестве канонической области полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) и отображим ее конформно на области G_w и G_χ так, чтобы точкам A, B, C соответствовали точки $\pm\infty, -1, 1$ оси ξ . Такие отображения осуществляются функциями

$$w(\zeta) = -i\varphi_1 \sqrt{(\zeta-1)/2}, \quad \chi(\zeta) = -i(a\sqrt{\zeta^2-1} + b\zeta) \quad (2.3)$$

где φ_1 — значение φ в точке B , причем в силу второго из условий (2.2) $\varphi_1 = -2\sqrt{a+b}$.

Тогда, учитывая (1.3), получим

$$z(\zeta) = -\sqrt{\frac{a+b}{2}} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{d\tau}{(a\sqrt{\tau^2-1} + b\tau)\sqrt{\tau-1}}$$

Выделив в последнем выражении действительную и мнимую части при $\zeta = \xi \in [-1, 1]$, найдем параметрические уравнения искомой границы BC : $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$. При этом площадь S поперечного сечения выемки, т. е. объем выброшенного грунта, можно определить по формуле

$$S = -2 \int_{-1}^1 y(\xi) x'(\xi) d\xi$$

В случае заглубленного заряда на границе правой половины G_z области течения для функции $w(z)$ имеют место граничные условия (2.1) и $\varphi=0$ на EC , $\psi = \pi/\ln(H+h)$ на AE .

Тогда области G_z в плоскости w будет соответствовать полуполоса G_w : $\varphi \leq 0$, $0 \leq \psi \leq \pi/\ln(H+h)$, а в плоскости χ — область G_χ (фиг. 1, б).

Введем в качестве канонической области верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ и отображим ее конформно на области G_w и G_x так, чтобы точкам A, B, C, E соответствовали точки $\pm\infty, -1, 1, e$ оси ξ . Такие отображения осуществляются функциями

$$w(\zeta) = \frac{-1}{\ln(H+h)} \int_1^{\zeta} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-1)(\tau-e)}}$$

и $\chi(\zeta)$ из (2.3). Тогда, учитывая (1.3), найдем

$$z(\zeta) = -\frac{i}{\ln(H+h)} \int_e^{\zeta} \frac{d\tau}{(a\sqrt{\tau^2-1}+b\tau)\sqrt{(\tau-1)(\tau-e)}}$$

Выделив в этом выражении действительную и мнимую части при $\zeta = \xi \in [-1, 1]$, найдем параметрические уравнения искомой границы BC .

В полученное выражение $z(\zeta)$ входит неизвестный параметр e , который определяется из уравнения $\text{Im } z(\infty) = h$.

3. Пусть теперь $\gamma \neq m\pi/2$. Тогда выемка, образующаяся при взрыве поверхностного заряда, не является симметричной. Области, соответствующие всей физической области в плоскостях w и χ , имеют вид, представленный на фиг. 2, a, b соответственно.

Отображение верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ на область G_w такое, что точкам A, D, B, C соответствуют точки $\pm\infty, -1, 0, 1$ оси ξ , осуществляется функцией $w(\zeta) = -\varphi_1 \sqrt{1-\zeta^2}$.

Для нахождения отображающей функции $\chi = \chi(\zeta)$ поступим следующим образом. Заменим разрез DAC по оси $v_x = 0$ разрезом по гиперболе

$$4v_x^2 \cos 2\gamma - 4v_x v_y \sin 2\gamma + (a_1^2 - a_2^2) \sin^2 2\gamma = 0$$

имеющей асимптоту $v_x = 0$. Отображение полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ на полученную область G_x осуществляется функцией

$$\chi(\zeta) = i[(a_1 - a_2)(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2 \exp(-2i\gamma) + (a_1 + a_2)(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2] \quad (3.1)$$

величина φ_1 определяется соотношением $\varphi_1 = -2\sqrt{a_1 + a_2}$, а решение записывается в виде

$$z(\zeta) = 2i\sqrt{a_1 + a_2} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{[v_x(\tau) + iv_y(\tau)] \tau d\tau}{[v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)] \sqrt{\tau^2 - 1}} \quad (3.2)$$

где $v_x(\xi)$ и $-v_y(\xi)$ — действительная и мнимая части $\chi(\zeta)$ при $\zeta = \xi$.

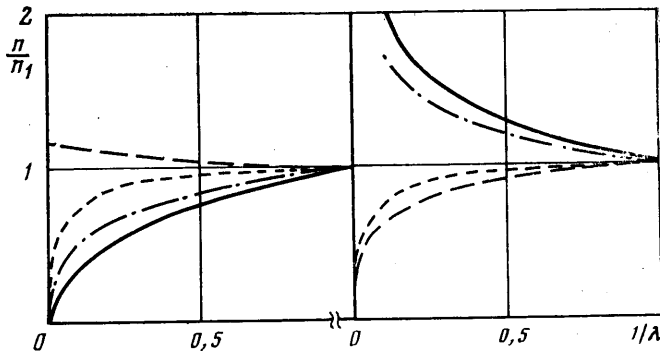
Однако в силу того, что функция (3.1) отображает полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на измененную область G_x , граница области течения в плоскости z , построенная по формуле (3.2), будет отличаться от точного решения.

Чтобы найти функцию, отображающую полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на исходную область G_x , можно воспользоваться методом ЭГДА (см., например, [6]).

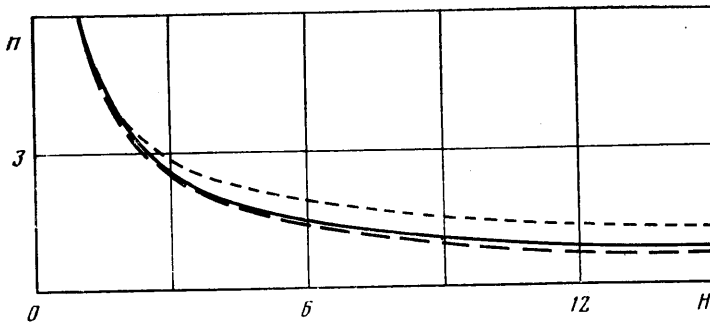
Для этого вместо неограниченной области G_x удобнее рассмотреть ограниченную область G_w в плоскости

$$\omega = 1/\chi = \mu + iv \quad (3.3)$$

(фиг. 2, ϵ). Отобразим полученную область на полуокружность G_w ($W = U + iV, V \geq 0, 0 \leq U \leq 1$). Для этого вырежем из электропроводной бумаги область G_w и подадим на участки AC и AD потенциал U , равный соответственно 1 и 0. Затем замерим значения потенциала U_i в точках границы CBD с координатами μ_i, v_i ($i=0, 1, \dots, N$), где $i=0$ соответствует точке D , $i=N$ — точке C , причем $\mu_N = \mu_0 = 0, v_N = v_0 = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \gamma + a_2^2 \sin^2 \gamma} / a_1 a_2, U_0 = 0, U_N = 1$. Тогда, так как отображение полуокружности G_w на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ осуществляется функцией $\zeta = -\cos(\pi W)$, найдем со-



Фиг. 3



Фиг. 4

ответствие между точками границы CBD в плоскости ω и точками $\xi_i = -\cos(\pi U_i)$, т. е. найдем соответствие $\mu_i = \mu(\xi_i)$ и $\nu_i = \nu(\xi_i)$.

Прежде чем перейти к построению искомой границы выемки выброса, рассмотрим, как ведет себя функция $\nu(\xi)$ в окрестности точек D и C ($\xi = \pm 1$) в зависимости от величин γ , a_1 и a_2 .

Пусть $0 < \gamma < \pi/2$. Тогда точка D на границе области G_ω является угловой точкой с тупым углом, равным $\pi/2 + \pi\beta$, а точка C — с острым углом $\pi/2 - \pi\beta$, где $\pi\beta = \pi/2 - |\gamma| - \text{arctg}[(a_1/a_2)^2 \text{ctg}|\gamma|]$.

В силу этого функция $\nu(\xi)$ имеет следующие представления:

$$\nu(\xi) = \nu_0 + (1 + \xi)^{1/2 + \beta} F_1(\xi), \quad \nu(\xi) = \nu_0 + (1 - \xi)^{1/2 - \beta} F_2(\xi) \quad (3.4)$$

$$F_1(-1) \neq 0, \quad F_2(1) \neq 0$$

Если теперь в (3.2) выделить действительную и мнимую части и учесть при этом (3.3), то получим

$$x(\xi) = x_0 + 2\sqrt{a_1 + a_2} \int_{-1}^{\xi} \frac{\mu(\tau) \tau d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad y(\xi) = 2\sqrt{a_1 + a_2} \int_{-1}^{\xi} \frac{\nu(\tau) \tau d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \quad (3.5)$$

Тогда, учитывая представления (3.4) и заменяя в (3.5) интегрирование суммированием, запишем формулы для отыскания координат $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$ неизвестной границы в виде

$$x_i = x_0 + 2\sqrt{a_1 + a_2} \sum_{j=1}^i \frac{\mu_j \xi_j}{\sqrt{1 - \xi_j^2}} (\xi_j - \xi_{j-1}), \quad \xi_i \in (-1, 1)$$

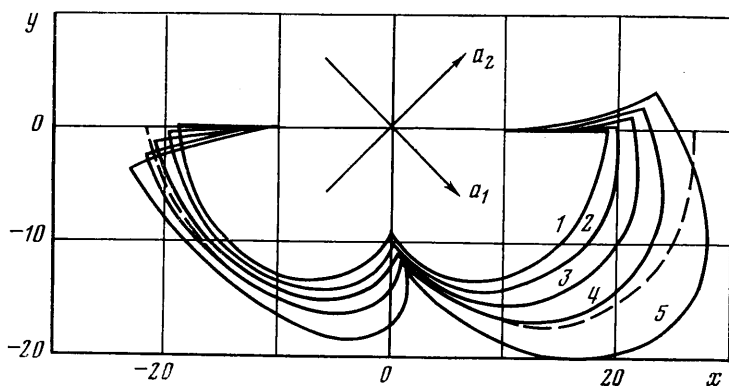
$$y_i = 2\sqrt{a_1 + a_2} \left[\sum_{j=1}^i \frac{F_{1j} (1 + \xi_j)^{\beta} \xi_j (\xi_j - \xi_{j-1})}{\sqrt{1 - \xi_j^2}} - \nu_0 \sqrt{1 - \xi_i^2} \right], \quad \xi_i \in (-1, 0)$$

$$y_i = -2\sqrt{a_1 + a_2} \left[\sum_{j=i}^{N-1} \left(\frac{F_{2j}\xi_j}{\sqrt{1+\xi_j}} - \frac{F_{2N}}{\sqrt{2}} \right) \frac{(\xi_{j+1} - \xi_j)}{(1-\xi_j)^\beta} + \frac{F_{2N}(1-\xi_i)^{1-\beta}}{\sqrt{2}(1-\beta)} - v_0\sqrt{1-\xi_i^2} \right], \quad \xi_i \in (0, 1)$$

$$F_{1i} = \frac{v_i - v_0}{(1+\xi_i)^{1/2+\beta}}, \quad F_{2i} = \frac{v_i - v_0}{(1-\xi_i)^{1/2-\beta}} \quad (i=1, 2, \dots, N-1), \quad F_{2N} = \lim_{i \rightarrow N} F_{2i}$$

Аналогичным образом выписываются выражения для определения x_i , y_i и для других диапазонов изменения γ .

4. С целью выяснения влияния анизотропии на форму, размеры и площадь поперечного сечения выемки выброса были проведены численные расчеты.



Фиг. 5

Для $\gamma = \pi\lambda/2$ результаты расчетов представлены в табл. 1, на фиг. 3 и 4. В табл. 1 приведены значения λ , $S/2$, R , T ($\lambda = a/b$, T — максимальная глубина выемки) для $H=1$ (случаи 1–7), $H=5$ (случаи 8–14) и различных значений a и b . На фиг. 3 показано, как меняются при изменении λ ($H=1$) отношения n/n_1 при $a = \text{const}$ (сплошная линия) и $b = \text{const}$ (штриховая линия), $(R/T)/(R_1/T_1)$ (штрихпунктирная линия) и S/S_1 (пунктирная линия), где n_1 , R_1/T_1 — значения n , R/T при $\lambda=1$, S_1 — значение S при $a=b=v_*$, т. е. $\lambda=1$; S — площадь поперечного сечения выемки при $a=v_*\sqrt{\lambda}$ и $b=v_*\sqrt{\lambda}$, т. е. при $ab=v_*^2$. На фиг. 4 изображены зависимости $n=f(H)$ для $\lambda=1$, $a=0,1$ (сплошная линия); $\lambda=0,1$, $a=0,133$ (штриховая линия); $\lambda=10$; $a=0,0409$ (пунктирная линия) (величины a и b выбирались из условия, чтобы при разных λ показатели действия взрыва для поверхностного заряда ($H=1$) совпадали).

Из сравнения приведенных результатов можно сделать следующие выводы. При

Таблица 1

	a	b	λ	$S/2$	R	T
1	0,001	0,01	0,1	499,4	21,73	26,94
2	0,005	0,01	0,5	287,7	20,20	17,06
3	0,01	0,01	1	209,5	18,86	13,33
4	0,02	0,01	2	143,9	17,06	10,10
5	0,1	0,01	10	49,97	12,06	4,86
6	0,01	0,02	0,5	143,9	14,29	12,06
7	0,01	0,1	0,1	49,94	6,87	8,52
8	0,005	0,01	0,5	596,2	29,23	25,32
9	0,01	0,01	1	458,0	27,35	20,00
10	0,02	0,01	2	318,4	24,84	15,43
11	0,1	0,01	10	126,4	18,42	8,43
12	0,01	0,005	2	635,0	35,20	21,36
13	0,01	0,02	0,5	299,6	20,51	18,18
14	0,01	0,1	0,1	103,1	9,11	13,10

увеличении λ ($H=1$) отношение R/T увеличивается, а показатель действия взрыва n возрастает при $a=\text{const}$ и убывает при $b=\text{const}$. Наличие анизотропии ведет к уменьшению объема выброшенного грунта по сравнению с изотропным грунтом, для которого $v_*=\sqrt{ab}$, однако при $0,25<\lambda<4$ это отличие не превышает 10%.

Увеличение a (при $b=\text{const}$) или b (при $a=\text{const}$) ведет к уменьшению размеров выемки выброса, причем при $b=\text{const}$ глубина выемки уменьшается больше, чем ширина (случаи 1–5 и 8–11), а при $a=\text{const}$ большее уменьшение претерпевает ширина выемки (случаи 3, 6, 7 и 9, 12–14). Поворот осей анизотропии на угол $\pi/2$ ведет при $H>1$ (случаи 8 и 12, 10 и 13, 11 и 14) к изменению как размеров, так и площади поперечного сечения выемки, причем при $\lambda>1$ площадь больше, чем при $\lambda<1$, и различие в площадях для фиксированных λ и H усиливается при увеличении a и b ; в случае $H=1$ величина S практически не меняется (случаи 4 и 6, 5 и 7). При $\lambda<1$ величина n с ростом заглубления заряда уменьшается быстрее, чем для однородного изотропного грунта, а при $\lambda>1$ – медленнее.

Для $\gamma \neq m\pi/2$ результаты расчетов приведены на фиг. 5 и в табл. 2. На фиг. 5 сплошными линиями изображены формы границ выемок выброса, рассчитанных по формуле (3.2), для $\gamma = -\pi/4$, $a_1=0,01$ и различных значений a_2 (кривой 1 соответствует $a_2=0,01$; 2 – $a_2=0,008$; 3 – $a_2=0,006$; 4 – $a_2=0,004$, 5 – $a_2=0,002$); штриховой линией изображена граница выемки выброса для $\gamma = -\pi/4$, $a_1=0,01$, $a_2=0,004$, построенная с помощью аналогового метода. В табл. 2 показано, как меняются величины R и T при изменении γ и фиксированных значениях a_1 и a_2 ($a_1=0,01$, $a_2=0,004$).

Из сравнения приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Граница выемки выброса, полученная по формуле (3.2), мало отличается от границы, построенной методом ЭГДА. Например, максимальная относительная погрешность в размерах выемок для $\gamma = -\pi/4$, $a_1/a_2 = 2,5$ не превышает 7%. При уменьшении величины a_2 ($a_1=\text{const}$) размеры выемки выброса увеличиваются, причем основное изменение размеров происходит в направлении оси a_1 . При изменении величины γ от 0 до $-\pi/2$ происходит постепенное уменьшение ширины выемки и увеличение ее глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977. 262 с.
2. Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде. – ПМТФ, 1973, № 2, с. 143–146.
3. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Об импульсно-гидродинамических моделях взрыва на выброс в слоистых средах. – Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань: Казанск. ун-т, 1979, с. 81–88.
4. Власов О. Е. Основы теории действия взрыва. М.: Изд. ВИА, 1957. 408 с.
5. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. – ПМТФ, 1960, № 3, с. 152–156.
6. Положий Г. Н. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двусвязных областей и определение постоянных Кристоффеля – Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий. – Укр. матем. ж., 1955, т. 7, № 4, с. 423–432.

Казань

Поступила в редакцию
30.VII.1981

Таблица 2

№ п.п.	$-\gamma/\pi$	R	T
15	0	29,94	14,52
16	0,125	23,90	15,40
17	0,25	21,84	16,85
18	0,375	20,76	18,10
19	0,5	20,54	18,34