

УДК 532.516.2:536.24

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

ГРАБОВСКИЙ В. И., ЖЕСТКОВ Г. Б.

Путем численного решения полной системы уравнений Навье – Стокса исследованы ламинарные ($Re \leq 1000$) дозвуковые течения сжимаемого газа при наличии теплообмена (охлаждение стенок) в плоских каналах, содержащих поворотную секцию (при различных параметрах кривизны). Изучено появление замкнутых зон отрыва потока на стенках канала, их деформация при изменении параметров задачи и потери давления. Определены участки стенок канала с максимальными и минимальными величинами тепловых потоков, выяснена связь этих участков с зонами отрывов потока.

Большой интерес к теоретическому и экспериментальному изучению течений в криволинейных каналах вызван важными практическими приложениями, например, в авиадвигателестроении. Различные переходные каналы, а также некоторые выходные устройства двигателей обладают значительной кривизной, приводящей к росту потерь, в частности из-за формирования на стенках замкнутых циркуляционных зон. Проходящие по таким криволинейным каналам газы во многих случаях имеют высокую температуру и необходимо учитывать процессы теплообмена.

Из-за сложной структуры течения в реальных криволинейных каналах его расчетное исследование требует применения полной системы уравнений Навье – Стокса, что вызывает большие, часто непреодолимые, трудности. Различные численные методы интегрирования уравнений Навье – Стокса предлагаются, например, в [1, 2]. Лишь в незначительном количестве работ (например, в [3, 4]) рассчитываются трехмерные течения. Большинство исследователей разделяют основные эффекты, вызванные криволинейностью потока. Отдельно рассматриваются либо вторичные течения [5], либо плоские течения с отрывными зонами [6, 7]. В этом случае в основном требуются двумерные уравнения Навье – Стокса.

В данной работе изучаются ламинарные течения, имеющие самостоятельный интерес. С другой стороны, разработанный здесь численный метод можно распространить, с известными изменениями, на турбулентные течения.

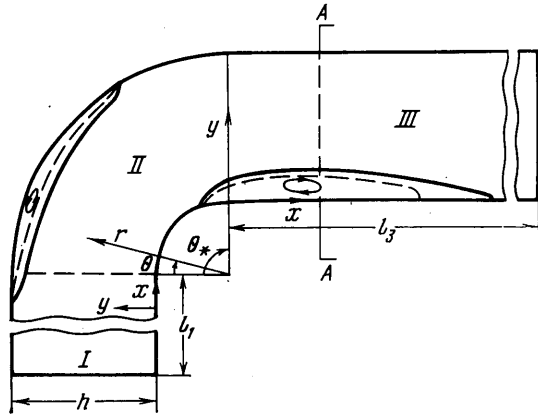
Имеющиеся работы по расчетному исследованию ламинарных течений в искривленных каналах в основном относятся к несжимаемой жидкости (см., например, [6, 7]). В данной работе рассматриваются ламинарные течения сжимаемого газа при наличии теплообмена в плоских поворотных каналах, т.е. изучаются только продольные эффекты образования отрывных зон. Предлагается существенная модификация численных методов, изложенных в [1, 2], которая по крайней мере для рассматриваемого класса задач является достаточно эффективной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение сжимаемого нагретого газа в плоском криволинейном канале следующей геометрии (фиг. 1). Две прямолинейные секции I и III, являющиеся входным и выходным участками канала, имеют одинаковую высоту h и разные длины l_1 и l_2 . Соединяющая эти участки поворотная секция II характеризуется углом поворота θ_* ($0 \leq \theta_* \leq \pi$) и радиусом кривизны R^0 «внутренней» стенки. При исследовании течения для разных секций канала используются разные системы координат: прямолинейным участкам соответствуют декартовые системы (x^0, y^0) (ось x^0 направлена вдоль внутренней стенки, а ось y^0 направлена перпендикулярно стенкам), в поворотной секции применяется полярная система координат (r^0, θ) (угол θ отсчитывается от конца входной секции I, а $r^0 = R^0 + y^0$, где y^0 – расстояние по нормали, отсчитываемое от внутренней стенки).

Стенки считаются непроницаемыми для газа и изотермическими. Та-

ким образом, течение характеризуется постоянной величиной расхода газа и отводом тепла в стенки (при охлаждении стенок). Наиболее интересным участком течения (как с практической, так и теоретической точек зрения) является поворотная секция (и прилегающие к ней небольшие зоны прямолинейных секций), где происходит существенная перестройка течения. Характерное изменение распределения величины статического давления p° (из-за существенной кривизны потока) приводит к образованию замкнутых отрывных зон значительных размеров, а значит и к росту потерь давления. Сложное распределение скорости $\mathbf{v}^\circ = (u^\circ, v^\circ)$ в колене вызывает существенную деформацию поля температур и, следовательно, перераспределение тепловых потоков на стенках с образованием локальных максимумов, местоположение которых важно для практических приложений.

Существенно и обратное влияние. Вынос тепла приводит к охлаждению газа, при этом уменьшаются коэффициенты переноса, зависящие от T° , и растет плотность газа ρ° . Это приводит к деформации профилей скорости, отрывных зон и изменению потерь давления.



Фиг. 1

Исследованию указанного взаимного влияния тепловых

и газодинамических характеристик потока в поворотной секции посвящена большая часть данной работы. Наличие длинных прямолинейных участков служит для исключения заметного влияния на течение в поворотной секции условий на входе и выходе в канал. Численным экспериментом было установлено, что оптимальные длины входного и выходного участков соответственно равны $l_1 \approx 4h$, $l_3 \approx 17h$. Считается, что в конце выходной секции параметры потока ($\mathbf{v}^\circ, T^\circ$) слабо меняются по длине (условие развитости течения). Поток на входе в канал определяется заданными профилями величин $u^\circ, v^\circ, T^\circ$ и ρ° . В конкретных расчетах для продольной составляющей скорости профиль параболический: $u^\circ = u_0 \{1 - (2y^\circ/h - 1)^2\}$, а для остальных параметров профили однородные: $v^\circ = 0, T^\circ = T_0, \rho^\circ = \rho_0$.

Указанное течение в криволинейном канале описывается полной системой уравнений Навье — Стокса. Введем безразмерные переменные по формулам (размерные переменные обозначены градусом)

$$x = \frac{x^\circ}{h}, \quad y = \frac{y^\circ}{h}, \quad r = \frac{r^\circ}{h}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^\circ}{u_0}, \quad p = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \quad T = \frac{T^\circ}{T_0}, \quad \rho = \frac{\rho^\circ}{\rho_0}$$

В этих безразмерных переменных используемая система уравнений принимает вид (в декартовой системе координат $\nu = 0, z = x, u = u_x, v = v_y$; в цилиндрической системе координат $\nu = 1, z = \theta, u = u_\theta, v = v_r, r = R + y$):

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho u}{r^\nu \partial z} + \frac{\partial \rho v r^\nu}{r^\nu \partial y} = 0 \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{r^\nu \partial z} + \frac{\partial \rho u v r^\nu}{r^\nu \partial y} = - \frac{\partial p}{r^\nu \partial z} - \nu \rho \frac{u v}{r} + \frac{\partial}{r^\nu \partial z} \left(\frac{\mu}{\operatorname{Re}} \frac{\partial u}{r^\nu \partial z} \right) + \frac{\partial}{r^\nu \partial y} \left(\frac{\mu}{\operatorname{Re}} r^\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{S_u}{\operatorname{Re}} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{r^\nu \partial z} + \frac{\partial \rho v^2 r^\nu}{r^\nu \partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \rho \frac{u^2}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\text{Re } r^\nu \partial z} \right) + \frac{\partial}{r^\nu \partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} r^\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{S_v}{\text{Re}} \quad (1.3)$$

$$\text{div}(c_p T \rho \mathbf{v}) = -\text{div } \mathbf{q} + S_T \quad (1.4)$$

$$\rho = \gamma M^2 p / T \quad (1.5)$$

где

$$S_u = -\frac{\partial}{r^{2\nu} \partial z} \left(\nu 2\mu v + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{r^{2\nu} \partial y} \left[\mu r^\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \nu u \right) \right] + \nu \mu \frac{\partial u}{r \partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \text{div } \mathbf{v})}{r^\nu \partial z}$$

$$S_v = \frac{\partial}{r^\nu \partial y} \left(\mu r^\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{r^\nu} \right) \right] - \nu \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + v \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial (\mu \text{div } \mathbf{v})}{\partial y}$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\lambda}{\text{Pe}} \text{grad } T, \quad S_T = (\gamma - 1) M^2 \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \frac{\mu}{\text{Re}} \Phi \right]$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{r^\nu \partial z} + \nu \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left[r^\nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{r^\nu} \right) + \frac{\partial v}{r^\nu \partial z} \right]^2 - \frac{2}{3} [\text{div } \mathbf{v}]^2$$

$$\mu = T^\omega, \quad \lambda = T^\omega, \quad c_p \equiv 1, \quad M = u_0 / \sqrt{\gamma R_g T_0} \quad (1.6)$$

$$\text{Re} = h u_0 \rho_0 / \mu_0, \quad \text{Pr} = c_p \mu_0 / \lambda_0, \quad \text{Pe} = \text{Pr Re}$$

Таким образом, течение описывается четырьмя уравнениями в частных производных и одним алгебраическим уравнением, являющимся уравнением состояния (принимается, что газ совершенный). Остальные соотношения в (1.6) определяют свойства газа, их зависимость от температуры (для коэффициентов переноса принята приближенная степенная зависимость $(0,5 \leq \omega \leq 1)$).

Два уравнения движения (1.2) и (1.3) записаны в дивергентной форме (необходимой для получения конечно-разностных аналогов уравнений), поэтому вязкие члены в каждом уравнении условно разбиты на две части.

Система уравнений содержит известные безразмерные параметры: числа Рейнольдса (Re), Прандтля (Pr), Пекле (Pe) и Маха (M), отношение удельных теплоемкостей γ , а также безразмерный радиус кривизны поворотной секции $R = R^c / h$. Другие параметры вытекают из граничных условий, которые имеют следующий вид:

$$u = v = 0, \quad T = T_{w1} \quad (y=0); \quad u = v = 0, \quad T = T_{w2} \quad (y=1)$$

$$v = 0, \quad u = 1 - (2y - 1)^2, \quad T = \rho = 1 \quad (x = -L_1, \quad 0 < y < 1)$$

$$\partial u / \partial x = \partial T / \partial x = \partial v / \partial x = 0 \quad (x = L_3)$$

Как уже указывалось, геометрические параметры $L_1 = l_1 / h$ и $L_3 = l_3 / h$ достаточно велики, так что не влияют существенно на течение в колене. Последний геометрический параметр данной задачи — угол поворота канала θ_* — входит в условия сшивания на стыках разных секций. Этими условиями являются требования непрерывности неизвестных и их первых производных.

Выпишем окончательно систему безразмерных критериев и укажем их значения или диапазон изменения, при которых проводится исследование задачи,

$$\gamma = 1,4; \quad \text{Pr} = 0,75; \quad M = 0,5; \quad \text{Re} \leq 1000; \quad \theta_* = \pi/2$$

$$0 < R < 5; \quad T_w < 1 \quad (T_{w1} = T_{w2} = T_w)$$

Наиболее важными параметрами являются число Re и параметр искривления канала R. Для канала с фиксированной геометрией существует минимальное значение $\text{Re} = \text{Re}_*$, когда отрывных зон на стенках канала

нет. С ростом Re эти зоны появляются и становятся более интенсивными. При больших Re течение становится неустойчивым и осуществляется переход от ламинарного режима к турбулентному. При $R \gg 1$ форма канала близка к прямолинейной и эффекты искривления не проявляются. С уменьшением R эти эффекты начинают играть все более существенную роль. Случай $R=0$ соответствует наличию угловой точки на внутренней стенке и течение при этом наиболее сложно.

Температурный фактор $T_w < 1$ соответствует охлаждению стенки и также сильно влияет на структуру потока.

В результате решения задачи определяются локальные характеристики течения, положение и деформация (при изменении параметров) отрывных зон, распределение тепловых потоков q_w по стенкам канала, важные для практики характеристики — потери давления ξ , число Стантона St , средне-массовая температура $\langle T \rangle$, коэффициент эффективности выноса тепла через стенки η . В данной работе указанные характеристики определяются следующим образом (переменные безразмерные):

$$\xi = 2 \int_0^1 \left\{ \left(p + \frac{\rho v^2}{2} \right)_0 - \left(p + \frac{\rho v^2}{2} \right)_1 \right\} dy$$

$$\langle T \rangle = \int_0^1 \frac{T \rho u dy}{G}, \quad G = \int_0^1 \rho u dy = \text{const}$$

$$q_w = - \frac{\lambda}{Re} \frac{\partial T}{\partial n}, \quad St = \frac{q_w}{G(\langle T \rangle - T_w)}, \quad \eta = 1 - \frac{\langle T + (\gamma - 1) M^2 v^2 / 2 \rangle}{\langle T + (\gamma - 1) M^2 v^2 / 2 \rangle_0}$$

Здесь n — координата нормали, направленной из потока к соответствующей стенке; за характерную величину теплового потока принято: $q_0 = c_{p0} \rho_0 u_0 T_0$, индексы 1 и 0 обозначают величины на выходе из канала и на входе в канал соответственно.

2. Метод решения задачи. Сформулированная задача решалась численно с помощью метода, являющегося модификацией хорошо известных методов интегрирования полных уравнений Навье — Стокса [1, 2]. Их некоторые особенности (используемые и здесь) — применение метода контрольного «объема» для получения конечно-разностных аналогов уравнений, использования гибридной схемы, повышающей устойчивость счета. Напомним, что суть гибридной схемы состоит в различной форме записи конвективных членов уравнений в зависимости от значений сеточных чисел Re_x , Re_y (для уравнений движения) и Re_x , Re_y (для уравнений энергии) [1, 3]. Если значение какого-либо сеточного числа меньше 2, то соответствующий конвективный член уравнения записывается в виде двусторонней разности (второй порядок точности), а если больше 2, то применяется односторонняя разность против потока (первый порядок точности).

Общей особенностью является и применение итерационной процедуры решения системы уравнений, а также использование метода нижней релаксации при интегрировании эллиптических уравнений.

Одной из характерных особенностей метода данной работы является использование полной системы уравнений Навье — Стокса в виде (1.1)–(1.5) (т. е. без каких-либо дополнительных преобразований), при этом искомыми неизвестными являются «естественные» переменные u , v , p , T и ρ . Другой важной особенностью является способ определения величин ρ , v и p . Плотность ρ определяется уравнением состояния (1.5), уравнение неразрывности (1.1) служит для нахождения поперечной составляющей скорости v , а давление p находится с использованием условия сохранения расхода из второго уравнения движения (1.3). Параметры u и T определяются обычным путем.

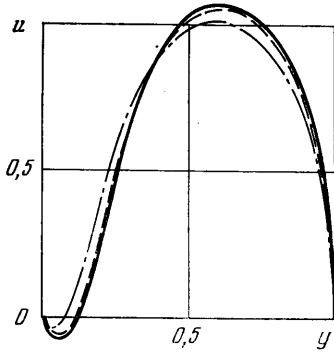
Итерационная схема решения всей системы уравнений содержит большой цикл, который разбит на два подцикла. Первый состоит в совместном решении газодинамических уравнений для определения p , u и v . Вторым подциклом служит решение уравнения энергии для нахождения T и определению ρ из уравнения состояния. Выход из итерационного процесса осуществляется при выполнении известных критериев итерационной сходимости [2] для трех величин u , T и ρ «одновременно».

Укажем особенности расчета наиболее сложного первого подцикла. На k -той итерации подцикла сначала определяется во всей области течения поле давления $p^{(k)}$ с точностью до функции $p_w^k(x)$ (давление на какой-либо стенке). Здесь расчет

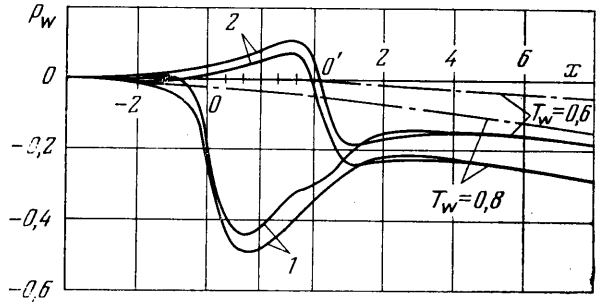
идет по поперечным слоям слева направо, используя значения $u^{(k-1)}$ и $v^{(k-1)}$ из предыдущей итерации.

Затем, используя $p^{(k)}$ и $v^{(k-1)}$, определяется поле значений $u^{(k)}$ (и одновременно функция $p^{(k)}$). И, наконец, по уже подправленным значениям $p^{(k)}$ и $u^{(k)}$ находится совокупность значений $v^{(k)}$. Причем одно «лишнее» граничное условие для v (для данного процесса расчета v) выполняется автоматически, так как оно учитывается в условии сохранения расхода, используемого ранее при нахождении $F_w^{(k)}$ и $u^{(k)}$.

Описанный метод расчета прост, нагляден и экономичен (по крайней мере для рассматриваемого класса задач). Для выяснения вопросов точности и сходимости были проведены методические исследования. Нужно сказать, что метод позволяет рассчитывать течения как сжимаемого, так и несжимаемого газа без какого-либо



Фиг. 2



Фиг. 3

изменения программы (в последнем случае $\rho=1$, $M=0$ и отбрасывается уравнение состояния). Это обстоятельство позволило провести методическое сравнение с имеющимися в литературе данными расчетов течений несжимаемой жидкости. В частности, рассчитывались развивающиеся течения в прямолинейном канале при $Re \leq 500$ (сравнение с работами [9, 10]), течение в колене (сравнение с работой [7]). Имеется достаточное количественное совпадение.

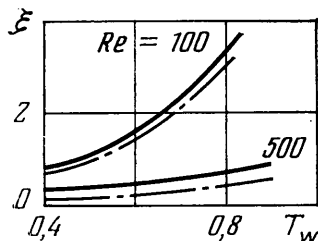
Была проведена методическая работа по выяснению влияния схемной вязкости путем расчета на разных сетках. Например, на фиг. 2 показаны профили продольной скорости $u(y)$ в сечении $x=0,6$ (сечение А-А на фиг. 1) при $R=0,5$, $Re=500$ (несжимаемая жидкость) и разных количествах ячеек в области (заметим, что расчетная сетка существенно неравномерная). Штрихпунктирная линия соответствует разбиению 20×34 , штриховая — 40×34 и сплошная — 60×34 (менялось количество узлов поперек канала). Из сравнения кривых следует хорошая сходимость результатов. Аналогичные исследования были проведены и для течения сжимаемого газа.

3. Результаты расчетов. Приведем наиболее важные результаты по расчету ламинарного течения сжимаемого газа в криволинейном канале при наличии теплообмена. Для выявления эффектов, связанных с искривлением потока, приводятся результаты расчетов течения в эквивалентном (при той же длине средней линии) прямолинейном канале.

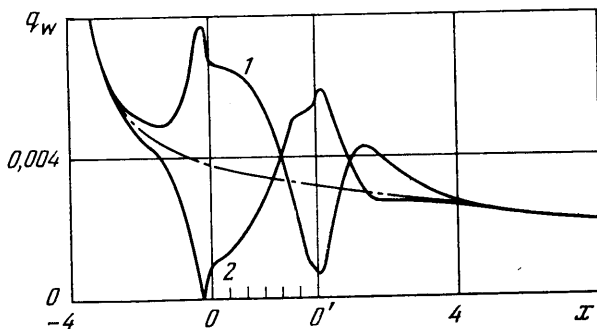
На фиг. 3 показано распределение давления по длине внутренней (кривые 1) и внешней (кривые 2) стенок при $R=0,5$, $Re=500$, $T_w=0,6; 0,8$. На этом и последующих графиках отрицательные значения x соответствуют входной прямолинейной секции I, положительные значения — прямолинейной секции III, а участок оси $00'$ — участку поворота (каждое деление — 15°). Штрихпунктирной линией иллюстрируется изменение давления вдоль эквивалентного прямолинейного канала. В поворотной секции из-за действия центробежных сил происходит расслоение кривых — на внешней ($y=1$) стенке давление возрастает, а на внутренней ($y=0$) убывает. Возникают зоны с положительным градиентом, где могут возникать отрывы потока. С ростом числа Re и уменьшением R расслоение кривых возрастает, растут градиенты давления, отрывные зоны, возникая, увеличиваются по размерам. При соответствующем изменении параметров раньше возникает замкнутая отрывная зона на внутренней стенке, а затем на внешней. На фиг. 1 показано расположение

зон отрыва при $R=0,5$, $Re=500$, $T_w=0,6$ (сплошные линии) и $T_w=0,8$ (штриховые линии). Зона отрыва на внешней стенке локализована в поворотной секции, а на внутренней стенке она, начинаясь в конце поворота, значительно смещена в прямолинейную выходную секцию (ее длина составляет около 1,5 калибра канала).

Влияние температурного фактора на структуру течения следующее. С уменьшением T_w (более интенсивное охлаждение) появление зон отрыва происходит раньше. Например, для несжимаемой жидкости ($T_w=1$) при $R=0,5$ число Рейнольдса Re_* , при котором впервые появляется зона отрыва, равно ~ 200 . Для сжимаемого газа при $T_w=0,8$ $Re_* \approx 170$ и при $T_w=0,6$ $Re_* \approx 140$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Основная причина данного явления — сильная зависимость коэффициента вязкости от температуры (см. (1.6)). При охлаждении уменьшается μ , следовательно, и напряжение трения на стенке, что приводит к более раннему отрыву потока. Эта закономерность подтверждается решением задачи Куэтта о течении жидкости с переменной вязкостью между двумя параллельными плоскостями. Пусть в пространстве между движущейся плоскостью $y=1$ и неподвижной плоскостью $y=0$ движется жидкость со слоистым распределением μ : $0 \leq y < y_*$: $\mu = \mu_0$; $y_* < y \leq 1$: $\mu = \mu_1$.

Определенный для этой задачи параметр отрыва ξ [11] на стенке $y=0$ имеет вид

$$\xi = Re \frac{dp}{dx} = 2 \left\{ \frac{1}{1 + (\mu_1/\mu_0 - 1) y_* (2 - y_*)} \right\}$$

Здесь число Рейнольдса определено по параметрам при $y=1$. При $\mu_0 < \mu_1$ величина $\xi < 2$ и убывает с уменьшением μ_0 , т. е. отрыв потока начинается раньше (при меньшем градиенте давления).

Другая причина более раннего отрыва — это убывание наполненности профиля $u(y)$ при охлаждении, так как растет плотность газа при сохранении его прежнего расхода.

Как видно из фиг. 3, уменьшение вязкости, вызванное охлаждением, приводит к уменьшению необходимого перепада давления. На фиг. 4 показано изменение коэффициента потерь давления ξ от T_w при $Re=100$ и 500 . Известный факт уменьшения ξ с ростом Re можно также объяснить уменьшением уровня вязкости в потоке.

Дополнительные потери, вызванные наличием искривленного участка канала (на фиг. 3 и 4 разница между соответствующими сплошными и штрихпунктирными линиями), растут с ростом Re и уменьшением радиуса кривизны R .

Обратим внимание на тепловые характеристики канала. На фиг. 5 показано распределение теплового потока q_w на стенке при $Re=500$, $R=0,5$, $T_w=0,4$ (кривые 1 и 2 соответствуют внутренней и внешней стенкам, сплошные линии — криволинейный канал, штрихпунктирная — эквивалентный прямолинейный канал). Характерная особенность приведенных распределений — наличие максимумов и минимумов функции $q_w(x)$ в зоне поворота и в примыкающих к ней участках (максимум q_w на входе в канал связан с заданием разрывного на стенке граничного условия

для T). Минимумы q_w находятся на внешней стенке на входе в колено, а на внутренней стенке — на выходе из колена. Эти участки совпадают с началами соответствующих отрывных зон, где профили $T(y)$ обладают наименьшей наполненностью (так же как профили $u(y)$). Максимальные тепловые потоки на внешней стенке — на выходе из колена, а на внутренней стенке — на входе в колено и в прямолинейной выходной секции в зоне присоединения отрыва (см. фиг. 1). Таким образом, тепловые потоки возрастают в зонах присоединения отрыва и на участках, находящихся напротив начала отрыва на противоположной стенке.

Расчет числа St показал, что распределение $St(x)$ имеет такие же качественные закономерности, как и $q_w(x)$. Расчет интегральных характеристик $\langle T \rangle$ и η для криволинейного и эквивалентного прямолинейного каналов указывает на то, что наличие криволинейной секции в целом способствует большей отдаче тепла из потока через стенки.

В заключение отметим, что численный метод данной работы, развитый и апробированный на задачах ламинарного течения, эффективно переносится с соответствующей модификацией на задачи расчета высокотемпературных турбулентных течений в криволинейных каналах.

Авторы благодарят А. Б. Ватажина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 323 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. Humphrey J. A. C., Taylor A. M. K., Whitelaw J. H. Laminar flow in a square duct of strong curvature.— J. Fluid Mech., 1977, v. 83, № 3, p. 509–527.
4. Патанкар, Басю, Альней. Численный расчет трехмерного поля скорости искривленной турбулентной струи.— Теорет. основы инж. расчетов, 1977, т. 99, № 4, с. 268–273.
5. Patankar S. V., Prapat V. S., Spalding D. B. Prediction of turbulent flow in curved pipes.— J. Fluid Mech., 1975, v. 67, № 3, p. 583–595.
6. Хэрд, Питерс. Анализ отрыва потока в двумерном канале с твердыми стенками.— Теорет. основы инж. расчетов, 1970, т. 92, № 4, с. 208–214.
7. Орланди, Кунсоло. Двумерное ламинарное течение в коленах.— Теорет. основы инж. расчетов, 1979, т. 101, № 2, с. 202–209.
8. Castro I. P. Numerical difficulties in the calculation of complex turbulent flows. In: Sympos on Turbulent Shear Flows., 1977, p. 5.13–5.21.
9. Brandt A., Gillis J. Magnetohydrodynamic flow in the inlet region of a straight channel.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, № 4, p. 690–699.
10. Симуни Л. М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе.— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 6, с. 1138–1141.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1982