

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ

ШАРИФУЛИН А. Н.

Влияние вибраций полости с жидкостью на конвективную устойчивость равновесия исследовалось в ряде работ (см. [1]). Устойчивость конвективных течений в модулированном поле тяжести до сих пор систематически не изучалась. Имеется лишь работа [2], в которой содержатся отрывочные данные, относящиеся к некоторым значениям определяющих параметров задачи. В данной работе исследуется линейная устойчивость конвективного течения в вертикальном плоском слое с границами разной температуры при наличии продольных гармонических колебаний полости с жидкостью. Предполагается, что частота колебаний достаточно велика; для описания движения используются уравнения осредненного конвективного движения. Определены границы устойчивости течения относительно монотонных возмущений в области чисел Прандтля  $0 \leq P \leq 10$ . Обнаружено, что вибрации высокой частоты оказывают на конвективное движение дестабилизирующее влияние. При достаточно больших значениях вибрационного параметра течение становится неустойчивым при сколь угодно малых значениях числа Грасгофа, что обусловлено действием механизма вибрационной конвекции, приводящего к неустойчивости даже в условиях невесомости, когда основное течение отсутствует [3, 4].

1. Рассмотрим вертикальный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми параллельными плоскостями  $x = \pm L$ , поддерживаемыми при постоянных различных температурах  $\pm \Theta$ . Слой как единое целое совершает гармонические колебания вдоль вертикали (ось  $z$ ) с амплитудой  $a$  и круговой частотой  $\omega$ . Частота вибраций предполагается достаточно большой, так что для описания течения можно воспользоваться методом осреднения.

Уравнения для осредненных полей скорости  $v$ , температуры  $T$  и конвективного давления  $p$  получаются методом осреднения из уравнений конвекции в приближении Буссинеска и в системе отсчета, связанной с полостью, имеют вид [3-5]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\nabla p + \Delta v + G T \gamma + S (W \nabla) \nabla \eta \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T = \frac{1}{P} \Delta T, \quad T \gamma = W + \nabla \eta$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} W = 0$$

$$G = g \beta \Theta L^3 / \nu^2, \quad S = (a \beta \omega \Theta L / \nu)^2 / 2, \quad P = \nu / \chi$$

Здесь все величины безразмерны,  $W$  — соленоидальная часть векторного поля  $T \gamma$  ( $\gamma$  — единичный вектор, направленный вверх вдоль оси вибраций  $z$ ); \* как единицы расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно  $L$ ,  $L^2/\nu$ ,  $\nu/L$ ,  $\Theta$  и  $\rho \nu / L^2$ ; остальные обозначения обычные. В систему (1.1) входят безразмерные параметры подобия:  $G$  — число Грасгофа,  $S$  — вибрационное число Грасгофа,  $P$  — число Прандтля.

На границах слоя должны выполняться условия:

$$x = \pm 1; \quad v = 0, \quad T = \pm 1, \quad W_x = 0 \quad (1.2)$$

Конвективное движение предполагается замкнутым:

$$\int_{-1}^1 v_z dx = 0 \quad (1.3)$$

Задача (1.1)–(1.3) имеет решение, описывающее осредненное плоскопараллельное конвективное течение, реализующееся в средней части достаточно длинного вертикального слоя

$$v_0 = G x (1 - x^2) \gamma / 6, \quad T_0 = x, \quad W_0 = x \gamma \quad (1.4)$$

Профиль скорости осредненного течения остается кубическим, а распределение температуры — линейным, как и в случае обычного статического поля тяжести.

2. Исследуем устойчивость основного плоскопараллельного течения (1.4) относительно малых возмущений. Рассмотрим малые возмущения решения (1.4). Введем нормальные возмущения, пропорциональные  $\exp[-\lambda t + i(k_y y + k_z z)]$ , где  $\lambda = \lambda_r + i \lambda_i$  — комплексный декремент,  $k_y$  и  $k_z$  — волновые числа. Рассмотрим вначале плоские возмущения ( $k_z = k$ ,  $k_y = 0$ , все величины не зависят от  $y$ ). Линеаризуя уравнения по малым возмущениям около основного плоскопараллельного течения (1.4), исклю-

чая давление и вводя вместо скорости и функции  $W$  функцию тока  $\psi$  и  $F$ , при помощи соотношений

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad W_x = -\frac{\partial F}{\partial z}, \quad W_z = \frac{\partial F}{\partial x}$$

получаем краевую задачу для амплитуд возмущений

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta \varphi + ik(v_0 \Delta \varphi - v_0' \varphi) + ikS(f' - \theta) &= \Delta^2 \varphi + G\theta' \\ -\lambda \theta + ik(v_0 \theta - \varphi) &= \frac{1}{P} \Delta \theta, \quad \Delta f = \theta' \quad \left( \Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \\ x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = f = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $f$  — амплитуды возмущений  $\psi$ ,  $T$  и  $F$  соответственно; штрих означает производную по поперечной координате  $x$ .

Краевая задача (2.1) определяет декременты возмущений  $\lambda = \lambda(k, G, S, P)$ .

Будем далее рассматривать монотонные возмущения ( $\lambda_i = 0$ ). На границе устойчивости  $\lambda_r = 0$ ; критическое число Грасгофа  $G = G(k, S, P)$ . Задача решалась численно методом Рунге — Кутты — Мерсона с ортогонализацией линейно независимых решений.

3. Рассмотрим вначале результаты решения задачи для предельного случая отсутствия вибраций  $S = 0$ . Нейтральные кривые  $G(k)$  для различных  $P$  имеют один минимум при  $k_m = 1.4 - 1.5$ . Рассчитанные минимальные по  $k$  критические числа  $G_m(P)$  слабо зависят от  $P$  и находятся в хорошем соответствии с результатами, приведенными в [1].

Другой предельный случай  $G = 0$  соответствует отсутствию статического поля тяжести, т. е. задаче об устойчивости в условиях невесомости. В этом случае осредненное течение отсутствует (квазиравновесие). Как показано в [3, 4], при наличии в слое поперечного градиента температуры и продольных вибраций это равновесие становится неустойчивым при достижении параметром  $S$  определенного критического значения. Нейтральные кривые  $S = S(k)$  для различных  $P$  тоже имеют единственный минимум при  $k_m = 1.61$ . Полученные в расчетах значения  $S_m$ , соответствующие этому минимуму, находятся в хорошем соответствии с результатами работ [3, 4] и описываются соотношением

$$S_m = 133,3/P \quad (3.1)$$

Наконец, отметим, что в предельном случае  $P = 0$  в жидкости, как это следует из второго уравнения системы (2.1), отсутствуют тепловые возмущения ( $\theta = 0$ ), исчезают возмущения  $f$  и, следовательно, первое уравнение системы (2.1) переходит в обычное уравнение Орра — Зоммерфельда с кубическим профилем скорости основного течения. В этом случае вибрации не оказывают влияния на устойчивость, а минимальное критическое значение числа Грасгофа  $G_m = 495$  достигается при  $k = 1.4$  (см. [1]).

Перейдем к обсуждению результатов решения задачи (2.1) в общем случае. Проведенные расчеты показывают, что при малых значениях  $P$  с ростом  $S$  от нуля вибрации приводят к монотонному уменьшению минимального критического числа Грасгофа  $G_m$ . При достижении вибрационным числом Грасгофа значения, определяемого формулой (3.1), минимум нейтральной кривой достигает оси  $G = 0$ . Нейтральные кривые для двух значений вибрационного числа Грасгофа при  $P = 0,1$  представлены на фиг. 1 ( $1 - S = 1200$ ; 2 и 3 —  $S = 1500$ ). При указанном значении числа Прандтля формула (3.1) дает  $S_m = 1333$ . При  $S = 1200$  область неустойчивости находится над кривой 1, а при  $S = 1500$  она расположена между кривыми 2 и 3, т. е. при любом значении  $G$  имеется интервал волновых чисел, в котором течение неустойчиво. Монотонный характер зависимости  $G_m$  от  $S$  сохраняется вплоть до  $P = 0,27$ . Для чисел Прандтля, больших этого значения, характер зависимости существенно меняется. На фиг. 2 представлены нейтральные кривые для  $P = 1$  (1 и 2 —  $S = 250$ , 3 и 4 —  $S = 400$ , 5 и 6 —  $S = 500$ ). С ростом  $S$  от нуля, как для описанного выше случая, минимальное критическое число Грасгофа монотонно уменьшается. Но начиная с  $S = 133,3$  появляется дополнительная замкнутая область неустойчивости, соответствующая вибрационному механизму (заметим, что функция  $G = G(k)$  симметрична относительно оси  $G = 0$ ; на фиг. 1-3 изображены лишь положительные значения  $G$ ). С ростом  $S$  эта область увеличивается. Так, при  $S = 250$  область устойчивости плоскопараллельного течения расположена между кривыми 1 и 2, а при  $S = 400$  она занимает уже значительно меньшую область между кривыми 3 и 4. При  $S = 453$  верхняя и нижняя области неустойчивости смыкаются. При  $S = 500$  интервал устойчивости по  $G$  уже не существует — возмущения с волновыми числами  $1,2 < k < 1,75$  нарастают при любых  $G$ .

Зависимость минимального критического числа  $G_m$  от  $S$  представлена на фиг. 3. Кривые 1-6 соответствуют числам Прандтля: 0,01; 0,1; 0,27; 0,5; 1 и 10. Плоскопараллельное течение устойчиво в областях левее соответствующих кривых. Отметим, что вибрации для всех значений числа Прандтля оказывают дестабилизирующее воздействие на плоскопараллельное течение. С другой стороны, малая сила

тяжести ( $G < 270$ ) для различных значений числа Прандтля по-разному воздействует на проявление механизма вибрационной неустойчивости. При  $P < 0,27$  с ростом  $S$  от нуля при наличии малой силы тяжести вибрационная неустойчивость возникает при меньших  $S$ , чем в случае  $G=0$  (формула (3.1)), а при  $P > 0,27$  — при больших значениях вибрационного числа Грасгофа.

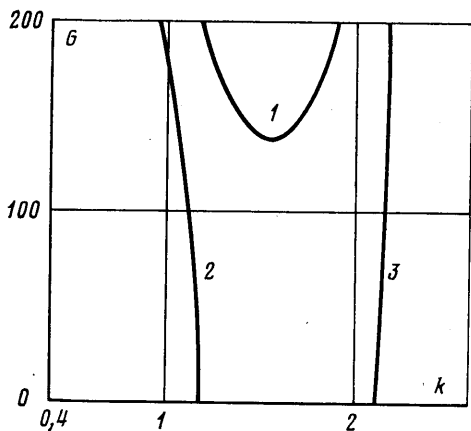
4. Можно показать, что краевая задача для амплитуд пространственных возмущений ( $k_y \neq 0, v_y \neq 0, W_y \neq 0$ ) может быть сведена к рассмотренной выше задаче для плоских возмущений. Характеристики пространственных и плоских возмущений связаны при этом соотношениями

$$k_y^2 + k_z^2 = k_*^2, \quad S = (k_*/k_z)^2 S_*,$$

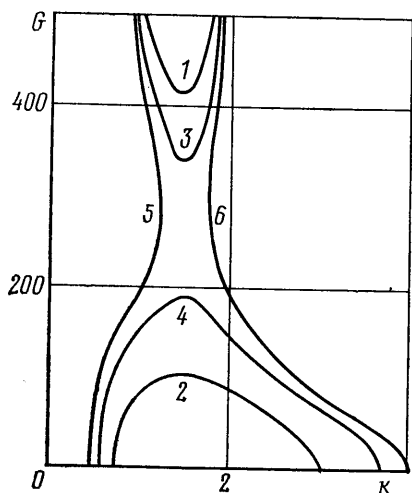
$$G = (k_*/k_z) G_* \quad (4.1)$$

(звездочкой снизу обозначены величины, относящиеся к плоской задаче.)

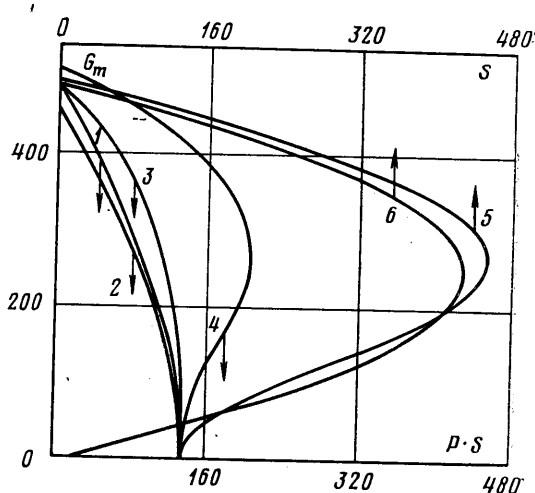
Таким образом, критические значения  $G$  и  $S$  для пространственных возмущений с волновыми числами  $k_y$  и  $k_z$  могут быть определены по формулам (4.1), если известны критические значения  $G_*$  и  $S_*$  для плоских возмущений с волновым числом  $k_*$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Пересчет диаграмм устойчивости, приведенных на фиг 3, показывает, что для всех значений числа Прандтля  $0 \leq P \leq 10$  плоские возмущения оказываются более опасными, чем пространственные.

В заключение автор выражает благодарность Е. М. Жуховицкому за руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Vahi С. В., Arpacı V. S., Vest С. M. Stability of natural convection in an oscillating vertical slot.— Proc. 1974 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Corvallis, Ore. Stanford, Calif., Univ. Press, 1974, p. 171–183.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 580–584.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 12–19.
5. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5, с. 51–55.

Пермь

Поступила в редакцию  
1.VI.1981