

Во-вторых, границы регулярности, построенные для различных значений  $\kappa$  (при  $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$ ), также мало отличаются друг от друга (для  $\kappa = 1.15$  – штрих-пунктирная линия на фиг. 2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гиллинский С. М., Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание сферы горючей смесью с учетом времени задержки воспламенения. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1, с. 20–32.
2. Черный Г. Г. Автомодельные задачи обтекания тел горючей смесью газов. – Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6, с. 10–24.

Фрунзе

Поступила в редакцию  
10.VII.1981

УДК 533.6.011.8

## ОБТЕКАНИЕ «ПЛОСКОЙ» ТРУБКИ ПИТО ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

ПЕРЕПУХОВ В. А.

Методом Монте-Карло рассчитывалось обтекание плоских трубок Пито при угле атаки  $\alpha = 0$  и следующих параметрах течения: число Маха  $M_\infty = 5, 10, 20$ , температурный фактор  $t_w = 1, 0,1$ , число  $Re_0 \in [0 \div 40]$ . Расчеты проведены для двух видов молекул: упругих шаров ( $\mu \sim \sqrt{T}$ ) и псевдомаксвелловских молекул ( $\mu \sim T$ ). Обнаружено наличие сильной немонотонности в поведении зависимости давления на торец в трубке Пито от чисел  $Re_0$  при  $t_w = 0,1$ .

1. Расчет величины давления в трубке Пито в переходном режиме представляет большой интерес для проведения экспериментов в вакуумных трубах и при измерении параметров верхних слоев атмосферы, так как в момент полета число Маха ( $M_\infty$ ), как правило, определяется на основании показаний трубки Пито. При этом интерес представляет зависимость  $p_n/p_{02}$  от числа ( $Re_0$  либо  $Re_\infty$ ), где  $p_n$  – давление на торец трубки Пито, а  $p_{02}$  – давление за прямым скачком. При этом в качестве параметров фигурируют температурный фактор  $t_w = T_w/T_0$ , где  $T_w$  – температура трубки,  $T_0$  – температура торможения, и число  $M_\infty$ .

Так как на практике применяются трубки различной конфигурации, то дополнительными параметрами являются геометрические параметры трубки (удлинение  $L/D$ , толщина стенок и форма входного отверстия). В настоящее время все существующие результаты по расчету течения в трубке Пито получены в грубой постановке и при  $t_w = 1$ . Исключение может составить работа [1], в которой проводились расчеты течения в трубке Пито в режиме первых межмолекулярных столкновений.

2. В настоящей работе для расчета течения в трубке Пито был применен метод Монте-Карло [2–7]. Опишем кратко суть метода. Выбирается некий объем, внутри которого находится трубка. На границах объема задается функция распределения (стенки «трубки» представлялись бесконечными плоскостями). Затем пространство внутри объема, занятое газом, разбивалось на ячейки с линейным размером, меньшим местной длины свободного пробега. В каждую пространственную ячейку помещалось некоторое количество молекул со скоростями, соответствующими начальной функции распределения (вообще говоря, произвольной).

Процессы движения молекул и столкновений между ними рассматривались последовательно, причем столкновения описывались статистически. Выбирался шаг по времени  $t_h$ , который должен быть малым по сравнению со временем свободного пробега молекул.

На первом этапе в течение времени  $t_h$  молекулы неподвижны, но между ними происходят столкновения (сталкиваются молекулы, принадлежащие одной геометрической ячейке); на втором этапе молекулы свободно перемещаются на расстояние  $\Delta r = V t_h$ , где  $V$  – скорость молекулы. На этом же этапе происходит «вброс» молекул в выделенный объем с границ области в соответствии с граничными условиями. Затем снова «замораживаются» координаты молекул, производятся столкновения и т. д. По прошествии  $n$  шагов в системе устанавливается квазистационарное состояние. С этого момента расчет продолжается до тех пор, пока флуктуации газодинамических параметров не будут достаточно малы (до 3%).

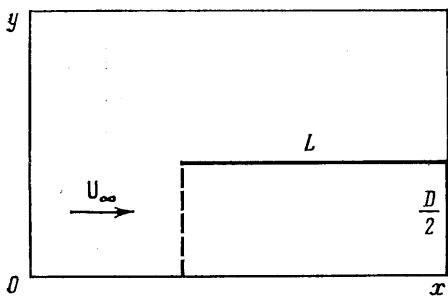
Граничные условия ставились следующим образом: на границе вверх по потоку  $x = 0$  (см. фиг. 1) функция распределения молекул по скоростям задавалась невозмущенной и на каждом шаге по времени «вбрасывалось» определенное число молекул в соответствии с величиной потока, пересекающего границу за время  $t_h$

$$\Delta Q_x = n_\infty (2\pi RT_\infty)^{-3/2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V_x \exp\left(-\frac{(V-U_\infty)^2}{2RT_\infty}\right) dV t_h F_x$$

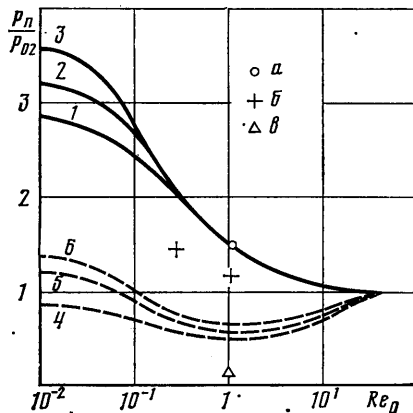
где  $F_x$  – площадь границы. На верхней границе  $y = y_h$ , и на границе вниз по потоку в качестве граничных условий использовалось условие отсутствия градиента функ-

ции распределения. Предполагалось, что функция распределения молекул, отраженных от трубки, — максвелловская с температурой, равной температуре поверхности  $T_w$ . В силу симметрии задача решалась только в верхнем полупространстве и на границе  $y=0$  ставилось условие зеркального отражения молекул.

Рассмотрим подробнее возможные методы расчета столкновений между молекулами. Анализ, проведенный в работах [5, 8], показал, что метод расчета столкновений между молекулами, предложенный Бердом [2], не является оптимальным, так как требует достаточно большого количества молекул в геометрической ячейке ( $N_0 \geq 30$ ). Более выгодным является метод расчета частоты столкновений, основанный на статистической модели газа, развитой Кацем [9]. Согласно этой модели, без-



Фиг. 1



Фиг. 2

условная вероятность столкновения пары молекул, имеющих скорости  $V_i, V_j$  в интервале времени  $t_k$ , равна

$$P = g_{ij} \sigma(g_{ij}) t_k V^{-1}, \quad g_{ij} = |V_i - V_j| \quad (2.1)$$

Здесь  $\sigma(g_{ij})$  — сечение столкновения,  $V$  — объем геометрической ячейки. Тогда время  $\tau$ , по истечении которого произойдет первое столкновение, распределено с плотностью вероятности

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda = \sum_{i \neq j} g_{ij} \sigma(g_{ij}) V^{-1} \quad (2.2)$$

В соответствии с (2.1) процесс столкновений реализуется следующим образом. Перебираются все пары молекул, находящиеся в данной ячейке. Для каждой пары разыгрывается случайное число  $\xi$ , равномерно распределенное в интервале (0,1). Если  $\xi < P$ , то столкновение происходит, если  $\xi > P$ , то — нет. В случае (2.2) вычисляется время ожидания  $i$ -го столкновения  $\tau_i$ . Если  $\Sigma \tau_i \leq t_k$ , то столкновение проводится, причем пара  $(V_i, V_j)$  выбирается с вероятностью

$$P_i = g_{ij} \sigma(g_{ij}) \left[ \sum_{i \neq j} g_{ij} \sigma(g_{ij}) \right]^{-1}$$

Если  $\Sigma \tau_i > t_k$ , то процесс столкновений в данной ячейке заканчивается, причем последнее столкновение не проводится. Скорости молекул после столкновения определяются в соответствии с выбранной моделью взаимодействия между молекулами.

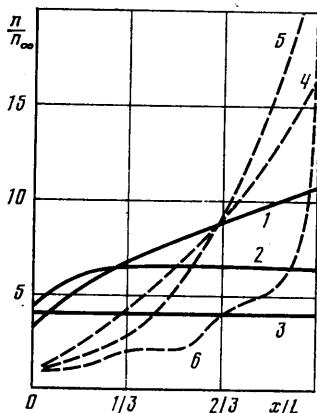
В настоящей работе для молекул — твердых сфер использовался прием, основанный на формуле (2.1), а для псевдомаквелловских молекул, для которых  $P_i = \text{const}$ , — модифицированный алгоритм Берда [6].

3. В результате расчета определялось все поле течения как вне трубки, так и внутри ее, причем расчеты были проведены как для молекул — упругих сфер ( $\sigma = \text{const}$ ,  $\mu \sim \sqrt{T}$ ), так и для псевдомаквелловских молекул ( $\sigma \sim \sigma_0/g_{ij}$ ,  $\mu \sim T$ ). Результаты расчетов изображены на фиг. 2. Кривые 1–3 соответствуют данным, полученным для чисел  $M_\infty = 5; 10; 20$  соответственно и для чисел  $t_w = 1$  и  $L/D = 5$ ; 4–6 — для чисел  $M_\infty = 5; 10; 20$  и чисел  $t_w = 0,1$  и  $L/D = 5$ . Точка  $a$  на фиг. 2 соответствует данным расчета при  $M_\infty = 10$ ,  $t_w = 1$  и  $L/D = 2,5$ ; точки  $b$  соответствуют данным расчетов при  $M_\infty = 10$ ,  $t_w = 1$ ,  $L/D = 10$  и, наконец, точка  $v$  соответствует случаю  $M_\infty = 10$ ,  $t_w = 0,1$  и  $L/D = 10$ . Результаты расчетов, проведенных в «горячем» случае ( $t_w = 1$ ), качественно согласуются с существующими экспериментальными данными. Отношение  $p_n/p_{02}$  монотонно уменьшается с увеличением  $Re_0$  и близко к единице при  $Re_0 > 20$  (фиг. 2). Необходимо отметить, что значения  $p_n/p_{02}$  совпадают (с погрешностью  $< 3\%$ ) друг с другом для молекул упругих сфер и псевдомаквелловских молекул при одинаковых числах  $M_\infty$  и  $Re_0$ . Однако в области малых чисел  $Re_0$

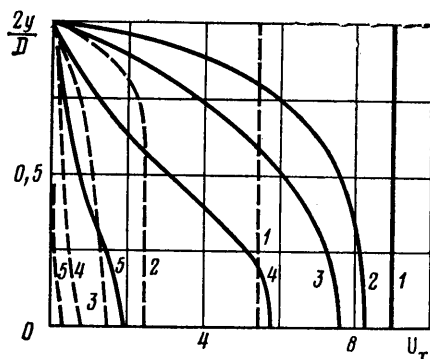
( $Re_0 < 0,3$ ) кривые для зависимостей  $p_n/p_{02} = f(Re_0, M_\infty)$  расходятся, при этом максимальное их различие существует при  $Re_0 = 0$ .

В «холодном» случае ( $t_w = 0,1$ ) поведение кривых  $p_n/p_{02}$  носит существенно немонотонный характер, и примерно при  $Re_0 = 1$  зависимости  $p_n/p_{02}$  при  $M_\infty = 5, 10, 20$  имеют сильный минимум (50%). При  $Re_0 \geq 40$  величина  $p_n/p_{02}$  стремится к 1 (пределу сплошной среды).

Отметим следующий факт: в «холодном» случае, хотя результаты для молекул — упругих сфер — и псевдомаксвелловских молекул совпадают в пределах точности метода, тем не менее кривые для различных чисел Маха ( $M_\infty = 5, 10, 20$ ) расходятся во всем диапазоне исследований. На фиг. 3 построены профили плотности по оси  $x$  внутри трубки при следующих параметрах:  $M_\infty = 10, L/D = 5$ ; сплошные линии соответствуют  $t_w = 1$ , пунктирные —  $t_w = 0,1$ . Кривая 1 соответствует  $Re_0 = 0,1$ ; 2 —  $Re_0 = 1$ ; 3 —  $Re_0 = 15$ ; 4 —  $Re_0 = 1$ ; 5 —  $Re_0 = 15$ ; 6 —  $Re_0 = 40$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Хорошо видно, что в «горячем» случае ( $t_w = 1$ ) режим сплошной среды реализуется при  $Re_0 \approx 10$ , в то время как в «холодном» случае это происходит при  $Re_0 \geq 40$ .

Можно объяснить факт наличия резких минимумов для характеристик трубки в «холодном» режиме  $t_w = 0,1$ . (Наличие минимума впервые расчетным путем обнаружено в настоящей работе.)

В случае свободномолекулярного предела молекулы невозмущенного потока достигают торца и передают ему свой импульс. С увеличением числа  $Re_0$  внутри трубки появляются «холодные» молекулы, которые хотя и медленно двигаются от боковых стенок, но ввиду сравнительно малого количества столкновений они достигают ядра потока и в сильной степени тормозят его. Это приводит к тому, что давление на торец падает. С еще большим увеличением числа  $Re_0$  возрастает количество столкновений и «холодные» молекулы не успевают отлетать далеко от стенки — их «сбивают» молекулы набегающего потока. При этом в область ядра попадают уже «горячие» молекулы, что приводит к увеличению давления на торец. Это хорошо видно на фиг. 4, где построены профили скорости  $U_x = V_x / \sqrt{2RT_0}$  для  $t_w = 0,1, Re_0 = 1$  и  $40$  в различных сечениях (сечение 1 — вход в трубку, 2 — на расстоянии  $1/5$  от входа, 3 — на расстоянии  $2/5$  от входа, 4 — на расстоянии  $3/5$  от входа, 5 — на расстоянии  $4/5$  от входа) при  $M_\infty = 10$ . Сплошные линии соответствуют  $Re_0 = 1$ , штриховые  $Re_0 = 40$ . По всей видимости, ход кривых  $p_n/p_{02}$ , величина и положение минимумов будут определяться «игрой» трех параметров: числами  $M_\infty$ , значением  $t_w$  и длиной трубки. На фиг. 2 построено несколько точек, соответствующих удлинению  $L/D = 10$  и  $2,5$ ; видно сильное влияние на показания трубки величины удлинения. Отметим, что, несмотря на то что профили плотности и скорости  $U_x$  довольно сильно изменяются вдоль торца, профиль  $p_n$  почти постоянен вдоль торца. Это позволяет делать усреднение величины  $p_n$  по всему торцу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hugnes P. C., Leeuw J. H. Theory for the free molecule impact probe at angle of attack. — Rarefied Gas Dynam. V. 1. N. Y. — L.: Acad. Press, 1965, p. 653–676.
2. Bird G. A. Direct simulation and the Boltzmann Equation. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, № 11, p. 2676–2681.
3. Перелухов В. А. Решение методом Монте-Карло модельного кинетического уравнения. — Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 4, с. 114–117.
4. Ерофеев А. И., Перелухов В. А. Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреж. газа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3, с. 51–57.

5. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 5, с. 1195—1208.
6. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1, с. 102—106.
7. Власов В. И., Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины потоком разреженного газа.— Тр. ЦАГИ, 1979 в. 1974, 60 с.
8. Денисюк С. А., Лебедев С. Н., Малама Ю. Г., Осипов А. И. Применение метода Монте-Карло для решения задач кинетики газов.— Физика горения и взрыва, 1972, т. 8, № 3, с. 331—349.
9. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.V.1981

УДК 533.95:538.4

## ДВУМЕРНЫЙ ХАРАКТЕР НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ИОНИЗУЮЩЕГОСЯ ГАЗА В КАНАЛЕ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

КОЗЛОВ А. Н.

Работа относится к циклу численных исследований двумерных течений плазмы в канале плазменного ускорителя. Канал образован двумя коаксиальными электродами. Ток между ними порождает азимутальное магнитное поле, а взаимодействие тока с полем приводит к ускорению плазмы. Расчеты течений ведутся на основе двумерных осесимметричных нестационарных МГД-уравнений [1]. В центре внимания находится процесс ионизации газа в канале, который моделируется скачкообразной зависимостью проводимости от температуры:  $\text{Re}_m = \sigma_0$  при  $T < T_*$ ;  $\sigma_1 + \sigma_2 \cdot T^{1/2}$  при  $T \geq T_*$ .

Поскольку сильноточный разряд сопровождается ультрафиолетовым излучением, заметно ионизирующим поступающий нейтральный газ, проводимость последнего — малая, но конечная величина ( $\sigma_0 \ll 1$ ). Проводимость полностью ионизованной плазмы меняется по известному закону  $T^{1/2}$ . Такая постановка задачи согласуется с условиями эксперимента и позволяет более единообразно описать весь процесс ионизации плазмы уравнениями газодинамики.

Данная модель предложена в [2] и с ее помощью проведены численные исследования в квазиодномерном [1, 2] и двумерном [3] приближениях. В последнем случае диаметр центрального электрода достаточно велик (порядка длины канала), а форма электродов близка к цилиндрической. Поэтому течение слабо зависит от радиуса, т. е. сохраняет квазиодномерный характер.

Основным результатом указанных работ является пульсирующий характер течения при достаточно большой проводимости плазмы за фронтом ионизации. При этом в двумерных расчетах [3] фронт ионизации, колеблющийся вблизи минимального сечения канала, почти плоский, а пульсирующий характер течения соответствует периодическому отрыву от фронта плоских нагретых слоев плазмы.

В настоящей работе численное исследование течений плазмы, включая процесс ионизации, проведено для канала с диаметром центрального электрода значительно меньшим длины канала (фиг. 1, 2). Зависимость течения от радиуса в этом случае существенна.

Задача описывается следующей системой уравнений магнитной гидродинамики, записанной в безразмерных переменных,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \\ \frac{\beta \rho}{2(\gamma-1)} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) T \right) + p \text{ div } \mathbf{v} &= \nu (\text{rot } \mathbf{H})^2 + Q \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \text{rot}(\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{H}) \\ p &= \frac{\beta}{2} \cdot \rho T; \quad Q = -I_0 \rho \exp[-\alpha(T-T_*)^2] \end{aligned}$$