

числениях коэффициентов переноса. В частности, персистенция скорости тяжелой молекулы в термостате становится зависящей не только от отношения масс, как в классическом рассмотрении [3], но и от поступательной температуры.

Авторы благодарят В. Г. Приходько и А. К. Реброва за полезные дискуссии, Е. Г. Колесниченко за ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Roux A. J. A., Grant W. L. Uranium enrichment in south Africa. Proc. First European Nuclear Conf., Paris, 1975, p. 39.
2. Куснер Ю. С., Кугателадзе С. С., Приходько В. Г., Ребров А. К., Чекмарев С. Ф. Инерционное газокINETическое разделение газовых смесей и изотопов.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 845–848.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностран. лит., 1960. 510 с.
4. Куснер Ю. С., Пакулин Б. Л., Приходько В. Г. Разделение воздуха при инъекции в поток легкого газа.— В кн.: Динамика разрежен. газа. Тр. 6-й Всес. конф. 1979. Ч. 2. Новосибирск, 1980, с. 176–181.
5. Becker E. W., Bier W., Ehrfeld W., Eisenbeiss G. Die physikalischen Grundlagen der Uran<sup>235</sup> — Anreicherung nach dem Trenndüsenverfahren.— Z. Naturforschung, 1971, v. 26, № 9, S. 1377–1384.
6. Бом Д. Квантовая теория. М.: Наука, 1965. 727 с.
7. Богданов А. В., Дубровский Г. В. О рассеянии на малые углы в квазиклассическом приближении.— Вестн. ЛГУ, 1975, № 19, вып. 4, с. 69–72.
8. Гордон Е. Б., Межов-Деглин Л. П., Пугачев О. Ф. Стабилизация атомов азота в сверхтекучем гелии.— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, вып. 2, с. 103–106.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
30.VI.1981

УДК 533.6.014

### О КОМПАКТНОМ РАЗВОРОТЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПЛОСКОГО ПОТОКА

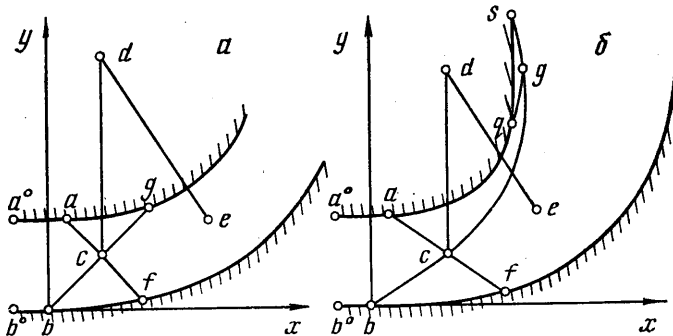
РЫЛОВ А. И.

Построен и численно исследован разворачивающий канал минимальных размеров из класса каналов, предложенных в [1, 2] и основанных на использовании течения «потенциальный вихрь». Численно получена зависимость размера канала от числа Маха исходного потока. Предложен разворачивающий канал, основанный на многократном использовании изэнтропических волн сжатия и разрежения и областей их взаимодействия. Ранее такие течения были получены и проанализированы в [3, 4]. Проведено сравнение каналов и показано, в частности, что при малых числах Маха исходного потока вновь предложенный канал имеет меньшие размеры, чем канал, основанный на использовании потенциального вихря.

1. Рассмотрим течение в канале, предложенном в [1] и позже независимо в [2]. Пусть в канале  $a^\circ acbb^\circ$  (Фиг. 1) имеет место равномерный сверхзвуковой плоский поток. Здесь  $a^\circ a$  и  $b^\circ b$  — горизонтальные стенки,  $ac$  и  $bc$  — характеристики. Примем за единицу линейного размера высоту канала  $b^\circ a^\circ$ .

Для поворота и, в частности, для разворота равномерного сверхзвукового потока в [1, 2] предложено использовать потенциальный вихрь. Суть этого решения состоит в следующем. Пусть отрезок  $cd$  перпендикулярен стенкам  $a^\circ a$  и  $b^\circ b$ . В точке  $d$  помещается потенциальный вихрь, так что в произвольной точке  $e$  (Фиг. 1, а)

$$wr = w_e r_e \quad (1)$$



Фиг. 1

где  $w$  — модуль вектора скорости,  $r$  — расстояние от  $d$  до  $e$ , индекс  $s$  приписан значениям  $w$  и  $r$  в точке  $s$ . Линии тока в таком течении являются окружностями с центром в точке  $d$ . Равномерный поток сопрягается с круговым потоком через простые волны  $acg$  и  $bcf$  (Фиг. 1, а).

После поворота на требуемый угол круговой поток в обратном порядке переводится в равномерный поток, и число Маха этого потока в общем случае может и не совпадать с исходным. Но в дальнейшем ограничимся случаем, когда числа Маха на входе и выходе одинаковы, а угол поворота потока равен  $180^\circ$ . В том случае, когда  $\theta_q > 90^\circ$  (фиг. 1, а), вместо канала, приведенного на фиг. 1, а, будем рассматривать канал, изображенный на фиг. 1, б. Здесь в треугольнике  $gqs$  параметры постоянны и  $\theta = 90^\circ$ , характеристики  $gq$  и  $gs$  — прямые. Также будем считать заданными минимально допустимые значения скорости  $w^-$  и числа Маха  $M^-$  для нижней стенки кругового канала и максимально допустимые  $w^+$  и  $M^+$  для верхней стенки;  $1 < M^- < M^+ < \infty$ .

При сформулированных ограничениях требуется построить описанный выше разворачивающий канал с наименьшими поперечными размерами.

Поперечный размер разворачивающего канала равен  $2 \times R$ , где  $R = y_d$ . Тем самым задача о построении разворачивающего канала с наименьшими размерами сводится к нахождению минимально допустимого  $R$ , при котором рассмотренное выше построение возможно.

Для исследования нижнего предела величины  $R$  введем относительный радиус  $z = (R-h)/(1-h)$ , где  $h = y_c$ . Можно показать, что вид простых волн  $acg$  и  $bcf$  (фиг. 1, а) зависит от  $z$ , а величины  $h$  и  $R$  выражаются через  $z$  следующим образом:

$$h = \frac{zk}{1+zk}, \quad R = \frac{z(1+k)}{1+zk}, \quad k = \frac{1}{\rho_0} \int_{w_f}^{w_0} \frac{\rho}{w} dw \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность, а индекс 0 приписан параметрами исходного потока. Отсюда имеем

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1+k}{(1+zk)^2} > 0, \quad \frac{dk}{dw_f} = -\frac{\rho_f}{\rho_0 w_f} < 0$$

$$\frac{dR}{dw_f} = \frac{dR}{dk} \frac{dk}{dw_f} = -\frac{z(1-z)}{(1+zk)^2} \frac{\rho_f}{\rho_0 w_f} > 0 \quad (z > 1). \quad (3)$$

Ниже будет показано, что, как правило,  $z > 1$ . Из соотношений (3) следует, что минимум  $R$  достигается при минимуме  $z$  и минимуме  $w_f$ , т. е. при  $w_f = w^-$ .

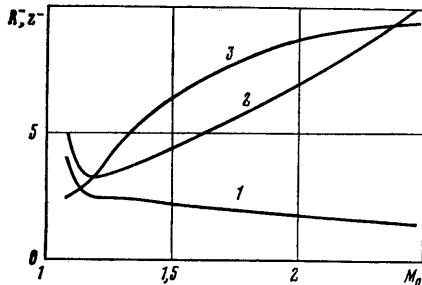
Очевидно, при достаточно большом  $z$  течение в простой волне  $acg$  (фиг. 1, а) может быть реализовано и  $M_g < M^+$ . С уменьшением  $z$  производные величин  $w$  и  $M$  вдоль характеристики  $cg$  и стенки  $ag$  растут, так же как растет и  $M_g$ , и при достижении некоторого значения  $z^-$  либо производные от  $w$  и  $M$  вдоль  $ag$  достигают бесконечности, либо  $M_g$  достигнет  $M^+$ . Это значение  $z^-$  и есть минимально достижимое значение  $z$ . Равенство бесконечности производной от  $M$  вдоль  $ag$  в некоторой точке стенки  $ag$  соответствует фокусировке некоторого веера характеристик второго семейства, пересекающих в свою очередь характеристику первого семейства  $cg$ .

Дадим одно оценочное значение для  $z^-$ . Используя известное выражение для поперечной характеристики в простой центрированной волне, приведенное, например, в [3], и выражение (1), можно найти такое значение  $z = z^*$ , при котором произойдет фокусировка характеристик в точке  $a$  (фиг. 1, а). Для этого надо приравнять друг к другу две производные от  $w$  по  $\psi$  (где  $\psi$  — функция тока) в точке  $C$  вдоль характеристики первого семейства, причем в одном случае  $w$  соответствует круговому потоку и формуле (1), а в другом — поперечной характеристике в простой центрированной волне разрежения [3] с центром в точке  $a$ . В результате найдем

$$z = z^* = \frac{\kappa + 1}{4} \frac{M_0^4}{M_0^2 - 1}$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты. Очевидно,  $z^- \geq z^*$ . Из этого следует, что при  $M_0 \rightarrow 1$ ,  $z^- \rightarrow \infty$ . Используя (2), можно показать, что и  $R^- \rightarrow \infty$  при  $M_0 \rightarrow 1$ .

Рассмотрим численные результаты, полученные с помощью формул (1) и (2), и выражения для центрированной волны разрежения. На фиг. 2 по вертикали отложены значения минимально возможного радиуса  $R^-$ , относительного радиуса  $z^-$  и



Фиг. 2

величина  $h$  (кривые 1–3 соответственно). По горизонтали отложены значения  $M_0$ ,  $1,08 \leq M_0 \leq 2,48$ . Принято, что  $\kappa = 1,4$ ,  $M^- = 1$ ,  $M^+ = 15$ .

Видно, что с ростом  $M_0$   $R^-$  убывает, несмотря на то, что при  $M_0 > 1,18$   $z^-$  растет. Связано это с тем, что с ростом  $M_0$  увеличивается и  $h$ . Если же  $M^- = M_0$ , т. е.  $h=0$ , то  $R^- = z^-$ . (Заметим, что  $z^-$  от  $M_0$  не зависит.) Следовательно, в случае  $M^- = M_0 R^-$  существенно больше, чем при  $M^- = 1$ .

Было исследовано и влияние величины максимально допустимого числа Маха  $M^+$  на размеры разворачивающего канала. Так, например, замена  $M^+ = 15$  на  $M^+ = 4$  мало сказывается на величинах  $R^-$ ,  $z^-$ ,  $h$ .

В рассмотренном выше круговом канале может быть создан большой перепад давлений между верхней и нижней стенками. Это является одной из причин, которая делает данный канал пригодным для аэродинамических окон газодинамических лазеров [5].

2. Перейдем теперь к рассмотрению другого разворачивающего канала, основанного на многократном применении волн сжатия и разрежения и областей их взаимодействия [3, 4].

Пусть в сечении  $0a$  и на характеристике второго семейства  $ak$  (Фиг. 3, *a*) реализуется равномерный поток с параметрами  $M = M_0 > 1$ ,  $\theta = \theta_0 = 0$ . Затем в центрированной волне разрежения  $km$  поток разгоняется до  $M = M_m$  и поворачивается до  $\theta = \theta_m$ . Нетрудно показать, что  $M_0$ ,  $M_m$ ,  $\theta_m$  связаны соотношениями

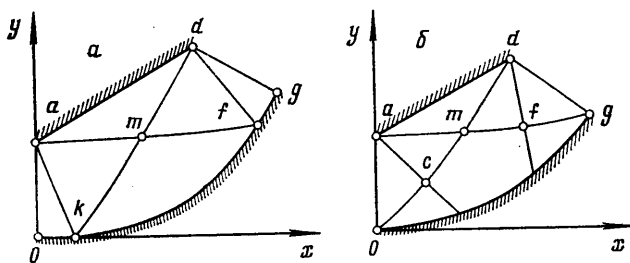
$$\theta_m - h(M_m) = -h(M_0), \quad h(M) = \frac{1}{t} \arctg(t\beta) - \arctg(\beta)$$

$$t = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}, \quad \beta = \sqrt{M^2-1}$$

В  $amd$  ( $am$  и  $md$  — характеристики разных семейств) параметры постоянны:  $M = M_m$ ,  $\theta = \theta_m$ . Далее в центрированной волне сжатия поток тормозится до  $M = M_0$  и поворачивается до  $\theta = 2\theta_m$ . В  $fdg$   $M = M_0$ ,  $\theta = 2\theta_m$ , а точка  $g$  выбрана так, что сечение  $dg$  перпендикулярно линиям тока. В области  $kmf$  течение находится из решения задачи Гурса по известным характеристикам  $km$  и  $mf$ . Такое течение было построено в [3], а в [4] было показано, что для существования сверхзвукового течения в  $kmf$  необходимо, чтобы  $M_0$  превосходило некоторое число  $M_* = M_*(M_m)$ . При  $M_0 \rightarrow M_*$  на нижней стенке  $kf$  существуют точки, в которых  $M \rightarrow 1$ . Так, например для  $M_m = 2,23$  и  $\kappa = 1,4$   $M_* \approx 1,06$  [4]. Пусть  $\theta_m = 90^\circ/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Построим канал, состоящий из  $n$  последовательно соединенных звеньев, каждое из которых аналогично рассмотренному выше каналу (Фиг. 3, *a*). Такое построение возможно, так как входное и выходное сечения  $0a$  и  $dg$  и числа Маха в этих сечениях одинаковы. На выходе такого канала из  $n$  звеньев  $M = M_0$ ,  $\theta = 180^\circ$ , а само выходное сечение лежит на оси  $y$ . Радиусом  $R$  такого канала назовем половину расстояния от нижней точки входного сечения до верхней точки выходного.

Пусть  $M_0 = 1,08$ ,  $\kappa = 1,4$ . Для данных параметров наименьшее значение  $R$  достигается при  $n = 3$ , т. е. при  $\theta_m = 30^\circ$ . При этом  $R = 2,95$ . Для  $n = 3$ , а также и для  $n = 1, 2, 4$  численно методом характеристик было проверено существование сверхзвукового течения в областях взаимодействия волн сжатия и разрежения.

Итак, при  $M_0 = 1,08$  построенный разворачивающий канал имеет меньшие поперечные размеры, чем круговой канал (Фиг. 1, *a*).



Фиг. 3

Вместо канала *a*, приведенного на Фиг. 3, *a*, можно предложить также и канал *b*, приведенный на Фиг. 3, *b*. Здесь на входе в канал в сечении  $0a$  и на характеристиках  $ac$  и  $0c$  поток равномерный и горизонтальный:  $M = M_0$ ,  $\theta = 0$ . Области  $cam$  и  $mdf$  — центрированные волны разрежения и сжатия. На выходе, на характеристиках  $fd$  и  $fg$   $M = M_0$ ,  $\theta = 2\theta_m$ . Очевидно, при прочих одинаковых параметрах канал *b* меньше канала *a*, но в канале *b* сверхзвуковое течение реализуется при числах Маха на

ходе в сопло больших, чем в случае канала  $a$  [4]. Так, при  $M_m=2,41$  и  $\kappa=1,4$   $M_0=1,37$ . Поэтому канал  $b$  и разворачивающие каналы, построенные последовательным соединением каналов  $b$ , могут быть применены лишь для умеренных и больших чисел Маха на входе в канал. Численные примеры для канала  $b$  (фиг. 3, б) таковы: для  $M_0=1,4$   $R=2,94$ , для  $M_0=1,5$   $R=3,23$ , для  $M_0=2$   $R=3,50$ . Во всех этих случаях наименьшее значение  $R$  достигается при  $n=3$ .

В случае нежелательности центрированных волн сжатия с фокусировкой характеристик в угловых точках  $d$  (фиг. 3, а, б) эти угловые точки могут быть заменены отрезками дуг с допустимым градиентом давления вдоль них [6].

В заключение по рассмотренным каналам можно сделать следующие выводы. Разворачивающий канал наименьших размеров из класса каналов, основанных на использовании потенциального вихря (фиг. 1), при умеренных и больших числах Маха исходного потока имеет весьма малые размеры, причем этот поперечный размер уменьшается с ростом исходного числа Маха.

При малых числах Маха исходного потока меньшие размеры имеет разворачивающий канал, составленный из трех последовательно соединенных каналов, в каждом из которых реализуется волна сжатия, разрежения и область их взаимодействия (фиг. 3, а). Указанное построение разворачивающего канала на основе чередующихся волн сжатия, разрежения и областей их взаимодействия с некоторыми оговорками может быть перенесено и на осесимметричные кольцевые потоки.

Автор благодарен В. Г. Дождеву, обратившему его внимание на эту задачу, А. Н. Крайко за полезные обсуждения и Н. А. Желтухину, сделавшему ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
2. Oswatitsch K. Potentialwirbel.— Gitter für Überschallgeschwindigkeiten.— Z. f. Flugwiss., 1956, Bd. 4, № 1/2, S. 53—57.
3. Рылов А. И. Решение вариационной задачи о профилировании сопла, реализующего равномерный сверхзвуковой поток.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 85—92.
4. Рылов А. И. О вырождении сверхзвукового течения при взаимодействии центрированных волн сжатия и разрежения.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 45—50.
5. Guile R. N., Hilding W. E. Investigation of a free — vortex aerodynamic window.— AIAA Pap., 1975, № 122. 9 p.
6. Рылов А. И. К построению сверхзвуковых несимметричных сопел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 87—94.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
24.IV.1981

УДК 533.6.011.5:532.582.3

### ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ

ЛИПНИЦКИЙ Ю. М., РЕЗНИЧЕНКО Ю. Т., СИРЕНКО В. Н.

Рассматривается пространственное сверхзвуковое обтекание потоком идеального газа конических тел, совершающих гармонические колебания в плоскости угла атаки относительно некоторого угла  $\beta_0$  по закону  $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$  так, что суммарный угол атаки  $\beta = \beta_0 + \alpha_0 \cos \omega t$ .

В задачах аэродинамики обычно выполняются условия

$$\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_\beta \frac{\omega L}{V_\infty} \ll 1$$

обеспечивающие малость скоростей перемещения точек поверхности конуса за счет колебания по сравнению со скоростью набегающего потока  $V_\infty$ .

Система уравнений газовой динамики, записанная в векторной форме для абсолютного движения в подвижной жестко связанной с телом системе координат, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \mathbf{V}_e \right) - (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) \times \text{rot} \mathbf{V} &= - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}[\rho(\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)] &= 0 \\ \frac{de}{dt} + \text{div}[(e+P)(\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$