

и решение (2.1), (2.2) и выражение (2.3) представим в виде

$$P_i = P_c - \frac{P_c - P_0}{A} \left(\omega_i \sqrt{\gamma_i} + \omega_i \frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad i=1, 2; \quad \omega_i = \frac{\mu_i}{k_i} \quad (3.1)$$

$$P_3 = P_0 + (P_c - P_0) \omega_3 \frac{\sqrt{\pi \kappa_3}}{A} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_3 t}} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$A = \omega_1 \sqrt{\gamma_1} + \omega_2 \sqrt{\gamma_2} + \omega_3 (\sqrt{\pi \kappa_3} - \sqrt{\gamma_2}) \quad (3.3)$$

Параметры γ_1 и γ_2 находятся в явном виде из

$$\gamma_1 = \left\{ \frac{-\omega_3 \sqrt{\pi \kappa_3} + \sqrt{\omega_3^2 \pi \kappa_3 + 8(P_c - P_0) a m_2^{-1} [\omega_1 + a(\omega_2 - \omega_3)]}}{2[\omega_1 + a(\omega_2 - \omega_3)]} \right\}^2 \quad (3.4)$$

$$\gamma_2 = \left[\frac{-\omega_3 \sqrt{\pi \kappa_3} + \sqrt{\omega_3^2 \pi \kappa_3 + 8(P_c - P_0) m_2^{-1} (\omega_2 - \omega_3 + a^{-1} \omega_1)}}{2(\omega_2 - \omega_3 + a^{-1} \omega_1)} \right]^2 \quad (3.5)$$

Перепад давления на фильтрационной корке, ее толщина, глубина проникновения фильтрата в породу и расход фильтрата раствора на единицу площади поверхности фильтрации определены выражениями

$$\Delta P = P_c - P_1(0, t) = (P_c - P_0) \omega_1 \frac{\sqrt{\gamma_1}}{A} \quad (3.6)$$

$$l_1 = \sqrt{\gamma_1 t}, \quad l_2 = \sqrt{\gamma_2 t}, \quad Q = \omega_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{P_c - P_0}{A \sqrt{t}}$$

Из общих решений (3.1)–(3.7) легко получить частные случаи.

Если раствор не содержит твердой фазы или вся твердая фаза вместе с раствором проникает в горную породу, фильтрационная корка не образуется; $c = l_1 = \gamma_1 = 0$. При $c = 0$ и $k_2 = k_3$ получаем известное решение [4].

При нагнетании (фильтрации) раствора в газовый пласт можно принять $\mu_3 = 0$.

При фильтрации раствора на водной основе в водоносный пласт можно положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$; $k_2 = k_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников Н. А., Брыков А. А., Кузьмин М. Д., Шестаков В. Н., Коваль О. Г. К вопросу определения давления в разрушаемой горной породе при бурении. — В кн.: Геология и полезные ископаемые Калмыцкой АССР. Вып. 4. Элиста, 1976, с. 149–152.
2. Шерстнев Н. М., Расизаде Я. М., Ширинзаде С. А. Предупреждение и ликвидация осложнений в бурении. М.: Недра, 1973. 304 с.
3. Жужиков В. А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. М.: Химия, 1971. 440 с.
4. Веригин Н. Н. Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. — Изв. АН СССР. ОТН, 1952, № 5, с. 674–687.

Уфа

Поступила в редакцию
15.IV.1981

УДК 533.27

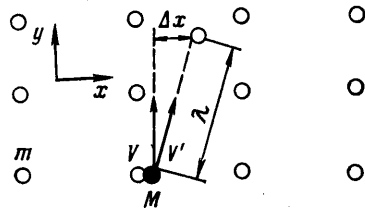
О ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ТЯЖЕЛОЙ МОЛЕКУЛЫ В ЛЕГКОМ РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

КУСНЕР Ю. С., ПАКЛИН Б. Л.

Рассматривается поступательная релаксация (в смысле потери первоначального направления скорости) молекулы массы M , инжектируемой в поле течения легкого газа (масса молекулы m). Показано, что, когда последний достаточно разрежен, а $M \gg m$, распыление волнового пакета тяжелой частицы может маскировать среднее «классическое» отклонение тяжелой молекулы от первоначального направления при ее столкновении с легкой. Поэтому не все столкновения, определенные газокинетическим сечением, эффективны для наблюдаемого отклонения тяжелой молекулы. Обсуждаются некоторые следствия такого поведения тяжелых молекул. Указанные ограничения классической теории должны учитываться при рассмотрении задач газовой динамики разреженных смесей.

В последнее время интерес к задаче о поступательной релаксации тяжелой молекулы в легком газе, происходящей за несколько десятков «первых» столкнове-

ний, связан с разработкой и исследованием схем газодинамического разделения смесей и изотопов [1, 2]. Принципиальная схема таких экспериментов показана на фигуре. В поле легкого газа (движущегося с произвольной скоростью или покоящегося) инжектируется с направленной скоростью V молекула массы M . Если средние кинетические энергии молекул m и M равны, то тепловая скорость легких молекул $v \gg V$.



При условии $m \ll M$ тяжелая молекула в столкновении с легкой отклонится на некоторый малый угол порядка m/M [3]. Поскольку величина угла отклонения зависит от M , то при инжекции смеси тяжелых молекул в легкий газ возникает пространственное разделение компонент. Это явление и используется в различных вариантах газодинамического разделения.

В экспериментах по схеме фигуры [1, 2, 4] было обнаружено, что тяжелые молекулы очень далеко проникают вглубь легкого газа, сохраняя направленную скорость (вдоль оси y). В работе [1] пространственное разделение компонент с молекулярным весом 349 и 352 а.е.м. в легком газе (водороде) наблюдается при плотности последнего около 10^{20} см $^{-3}$, когда средняя длина свободного пробега тяжелой молекулы примерно равна 10^{-6} см. В экспериментах [4] в поле течения плоского однородного потока гелия, движущегося приблизительно со звуковой скоростью перпендикулярно вектору скорости потока, инжектировался молекулярный пучок воздуха. Концентрация молекул воздуха на расстоянии 100 длин свободного пробега λ от места инжекции (вдоль оси y , фигура) составляла величину 10^{-2} от начальной. Поскольку число столкновений, необходимых в среднем для потери начального направления скорости, порядка M/m , то вероятность попадания молекулы азота на такое расстояние по порядку равна $\exp(-100 m/M) \approx 10^{-6}$. Расчеты методом Монте-Карло, проведенные в [4], подтверждают такую оценку. В работе [5] при обсуждении результатов экспериментов по движению молекул с массой 349 и 352 а.е.м. в сверхзвуковой струе водорода с точки зрения теории диффузии (в рамках механики сплошной среды, без рассмотрения вопроса о справедливости уравнения механики сплошной среды, и граничных условий) было указано, что коэффициент диффузии тяжелых молекул значительно выше, чем посчитанный по газодинамическому сечению. Указанные экспериментальные факты свидетельствуют о том, что тяжелые молекулы, движущиеся и сталкивающиеся только с легким газом, значительно дольше сохраняют направление своего движения, чем показывают расчеты по классической теории.

Рассмотрим движение тяжелой молекулы в легком газе (фигура) с классической и квантовой точек зрения.

Вычислим отклонение тяжелой молекулы, Δx_c , на расстоянии средней длины свободного пробега λ от места предыдущего столкновения (фигура) по классической теории. Принимая среднюю скорость в направлении оси x после столкновения частиц (с одинаковой энергией) равной $V \cdot m/M$ [3], получаем

$$\Delta x_c \approx (m/M) \cdot V \cdot (\lambda/v) = (m/M)^{1/2} \cdot \lambda \quad (1)$$

В квантовой теории свободная частица рассматривается как волновой пакет, расширяющийся при движении в пространстве. Если пакет, описывающий движение частицы массы M первоначально, в момент столкновения, был локализован на размере порядка газокинетического диаметра σ , то ширина пакета через время t [6] определяется формулой (\hbar — постоянная Планка)

$$\Delta x_q = \sigma (\hbar^2 t^2 M^{-2} \sigma^{-4} + 1)^{1/2} \quad (2)$$

Как видно из (2), при $t \gg M \sigma^2 / \hbar$ ширина пакета линейно увеличивается со временем. Полагая $t = \lambda/v$, определим максимальное значение плотности, при которой пакет еще линейно расширяется со временем, для соответствующих значений M и m (λ_D — длина волны де-Бройля легкой молекулы).

$$n \approx \lambda_D \sigma^{-1} \cdot \sigma^{-3} \cdot m M^{-1}, \quad \lambda_D = \hbar/mv \quad (3)$$

Полагая для оценки $\lambda_D/\sigma = 3 \cdot 10^{-1}$, $m/M = 10^{-2}$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-8}$ см, получаем $n \approx 10^{20}$ см $^{-3}$, поэтому даже в плотном газе пакет линейно расширяется со временем. В таком случае за время между столкновениями $t = \lambda/v$, учитывая (2) и (3), имеем

$$\Delta x_q = m M^{-1} \lambda_D \sigma^{-1} \lambda \quad (4)$$

Из формул (1) и (4) следует, что при достаточно большом отношении M/m классическое отклонение тяжелой молекулы может маскироваться расширением волнового пакета: $\Delta x_q > \Delta x_c$. Поэтому критерий применимости классической теории для описания поступательного движения в смесях молекул с различающимися массами выглядит так:

$$\lambda_D / \sigma < \sqrt{m/M} \quad (5)$$

Для $m=2$ а.е.м. неравенство (5) не выполняется уже при $M/m > 10$. При $m \approx M$ условие (5) совпадает с общеизвестным критерием применимости классической теории $\lambda_D/\sigma < 1$, следующим из соотношения неопределенностей.

Когда неравенство (5) не выполняется, не все столкновения, определенные по классическому значению сечения, эффективны для наблюдаемого отклонения тяжелой молекулы от первоначального направления, а лишь те из них, для которых $\Delta x_c > \Delta x_q$. Это означает, что для описания движения тяжелых частиц в легком газе при малой величине m/M , когда тяжелые частицы отклоняются в основном на малые углы, необходимо пользоваться квантовым значением сечения рассеяния даже при высоких поступательных температурах. В работе [7] в эйкональном приближении получено соотношение, связывающее классическое и квантовое сечение рассеяния (в системе центра масс)

$$d\sigma_q(\theta_0) = d\sigma_c[\theta_0 + \hbar(\mu v_r \xi)^{-1}] \quad (6)$$

Здесь θ_0 — угол рассеяния в системе центра масс, μ — приведенная масса, v_r — относительная скорость, ξ — прицельный параметр, практически совпадающий по величине с газокинетическим диаметром σ . В лабораторной системе координат для легких частиц при условии $m \ll M$ аргумент в соотношении (6) не меняется, поскольку $\mu \approx m$, $v_r \approx v$, $\theta_i \approx \theta_0$, откуда следует обычное условие применимости классической теории $\hbar(mv\xi)^{-1} < 1$. Для тяжелых частиц в лабораторной системе, как следует из (6)

$$d\sigma_q(\theta_i + \hbar(\mu v \xi)^{-1}) = d\sigma_c[\sqrt{m/M}(\sqrt{m/M}\theta_0 + \hbar(mv\xi)^{-1})] \quad (7)$$

поскольку для малых углов $\theta_i = \theta_0 \cdot m/M$ и при одинаковых энергиях частиц $MV = mv\sqrt{M/m}$. Поэтому из соотношения (7) следует критерий (5), полученный выше при рассмотрении расширением волнового пакета. При потенциалах взаимодействия, быстро убывающих с расстоянием из результатов работы [7], можно получить для тяжелых частиц в лабораторной системе следующее выражение:

$$d\sigma_c/d\sigma_q = [1 + \hbar(MV\xi\theta)^{-1}]^2$$

Полагая теперь для оценок $m=4$ а.е.м., $M=150$ а.е.м. $MV=4 \cdot 10^{-19}$ г·см/с (средний импульс частиц M при температуре 300 К), $\xi=4 \cdot 10^{-8}$ см, получим вполне заметную величину для $\theta = (m/M) d\sigma_c/d\sigma_q = 1,7$.

Проверка влияния «запрета» некоторых столкновений, рассчитанных по классическому сечению, была осуществлена при статистическом моделировании задачи на ЭВМ. Бесструктурная частица с массой 150 а.е.м., имеющая энергию, соответствующую температуре 300 К, инжектируется в покоящийся газ He с массой молекул 4 а.е.м. Длина свободного пробега тяжелой частицы и прицельный параметр столкновения в модели жестких сфер разыгрывались случайным образом, а затем определяется (точно) вектор скорости тяжелой частицы после столкновения. Схема расчета подробно описана в [4]. Столкновения, приводящие к отклонению на малые углы, исключались согласно соотношению $\lambda_D/\sigma < 1$ (а не более сильному условию (5)), так как при этом просто иллюстрируется эффект «запрета». Если при столкновении неравенство не выполняется, то после столкновения вектор скорости частицы не меняется. При температуре легкого газа 1,5 К примерно в $2/3$ столкновений используемое неравенство не выполняется (из примерно $2 \cdot 10^5$ столкновений). Расчет проводился так, что каждая из 1000 инжектируемых молекул двигалась в течение времени 125τ, где τ — классическое время между столкновениями легких молекул. Оказалось, что в «классическом» случае, т. е. при отклонении в каждом столкновении, средняя координата в направлении первоначального движения молекулы за указанное время определяется выражением $y=40\lambda$, тогда как в квантовом случае $y=70\lambda$. Очевидно значительно более глубокое проникновение молекул в «квантовом» случае. Отношение глубины проникновения в этих двух случаях хорошо совпадает с посчитанным выше для данных условий отношением классического и квантового сечений.

При увеличении температуры гелия эффект для данной пары уменьшается как из-за уменьшения длины волны де Бройля, так и из-за расширения распределения по импульсам. При низкой температуре, когда столкновения частиц с большими импульсами маловероятны и почти всегда выполняется принятое неравенство, не говоря о более слабом условии (5), молекулярные пучки тяжелых молекул могут распространяться в легком газе, как в вакууме. Вероятно, такая ситуация реализовалась в экспериментах по изучению охлаждения струи азота в гелии, находящемся в равновесии с жидкой фазой при температуре 1,5–3 К [8]. Азот сохранял ярко выраженную структуру пучка. Аналогичным образом можно объяснить описанные выше явления проникновения тяжелых молекул в глубь легкого газа.

Нарушение применимости классической теории в разреженном газе молекул с разной массой должно учитываться при рассмотрении целого ряда задач молекулярной газовой динамики, например: при вычислении среднего отклонения тяжелой частицы от первоначального направления движения — персистенции скорости [3]; при решении уравнения Больцмана для газовых смесей; при модельных вы-

числениях коэффициентов переноса. В частности, персистенция скорости тяжелой молекулы в термостате становится зависящей не только от отношения масс, как в классическом рассмотрении [3], но и от поступательной температуры.

Авторы благодарят В. Г. Приходько и А. К. Реброва за полезные дискуссии, Е. Г. Колесниченко за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roux A. J. A., Grant W. L. Uranium enrichment in south Africa. Proc. First European Nuclear Conf., Paris, 1975, p. 39.
2. Куснер Ю. С., Кугателадзе С. С., Приходько В. Г., Ребров А. К., Чекмарев С. Ф. Инерционное газокINETическое разделение газовых смесей и изотопов.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 845–848.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностран. лит., 1960. 510 с.
4. Куснер Ю. С., Паклин Б. Л., Приходько В. Г. Разделение воздуха при инъекции в поток легкого газа.— В кн.: Динамика разрежен. газа. Тр. 6-й Всес. конф. 1979. Ч. 2. Новосибирск, 1980, с. 176–181.
5. Becker E. W., Bier W., Ehrfeld W., Eisenbeiss G. Die physikalischen Grundlagen der Uran²³⁵ — Anreicherung nach dem Trenndüsenverfahren.— Z. Naturforschung, 1971, v. 26, № 9, S. 1377–1384.
6. Бом Д. Квантовая теория. М.: Наука, 1965. 727 с.
7. Богданов А. В., Дубровский Г. В. О рассеянии на малые углы в квазиклассическом приближении.— Вестн. ЛГУ, 1975, № 19, вып. 4, с. 69–72.
8. Гордон Е. Б., Межов-Деглин Л. П., Пугачев О. Ф. Стабилизация атомов азота в сверхтекучем гелии.— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, вып. 2, с. 103–106.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.VI.1981

УДК 533.6.014

О КОМПАКТНОМ РАЗВОРОТЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПЛОСКОГО ПОТОКА

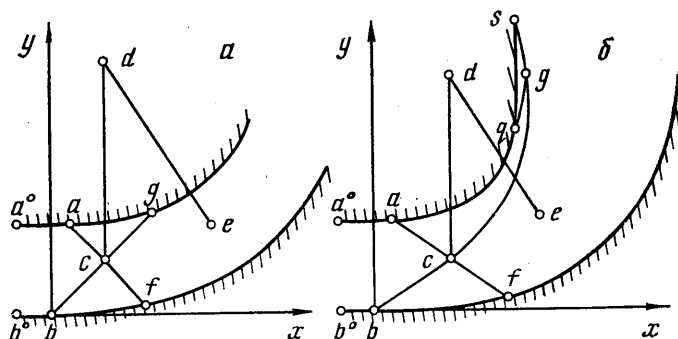
РЫЛОВ А. И.

Построен и численно исследован разворачивающий канал минимальных размеров из класса каналов, предложенных в [1, 2] и основанных на использовании течения «потенциальный вихрь». Численно получена зависимость размера канала от числа Маха исходного потока. Предложен разворачивающий канал, основанный на многократном использовании изэнтропических волн сжатия и разрежения и областей их взаимодействия. Ранее такие течения были получены и проанализированы в [3, 4]. Проведено сравнение каналов и показано, в частности, что при малых числах Маха исходного потока вновь предложенный канал имеет меньшие размеры, чем канал, основанный на использовании потенциального вихря.

1. Рассмотрим течение в канале, предложенном в [1] и позже независимо в [2]. Пусть в канале $a^\circ acbb^\circ$ (Фиг. 1) имеет место равномерный сверхзвуковой плоский поток. Здесь $a^\circ a$ и $b^\circ b$ — горизонтальные стенки, ac и bc — характеристики. Примем за единицу линейного размера высоту канала $b^\circ a^\circ$.

Для поворота и, в частности, для разворота равномерного сверхзвукового потока в [1, 2] предложено использовать потенциальный вихрь. Суть этого решения состоит в следующем. Пусть отрезок cd перпендикулярен стенкам $a^\circ a$ и $b^\circ b$. В точке d помещается потенциальный вихрь, так что в произвольной точке e (Фиг. 1, а)

$$wr = w_e r_e \quad (1)$$



Фиг. 1

где w — модуль вектора скорости, r — расстояние от d до e , индекс s приписан значениям w и r в точке s . Линии тока в таком течении являются окружностями с центром в точке d . Равномерный поток сопрягается с круговым потоком через простые волны acg и bcf (Фиг. 1, а).