изводных правых частей системы (2), а производные параметров по z любого порядка в особой точке выражаются через параметры в особой точке. Используя значения этих производных, получим отрезки рядов Тейлора для неизвестных функций, которые дают начальные значения параметров за особой точкой для решения системы уравнений, полученных из (2) изменением знака правых частей. Решение этой системы уравнений даст последнюю часть искомой интегральной кривой. При расчетах использовались значения только первых производных параметров в особой точке.

На фиг. 1 представлены рисунки сопел, в которых рассчитывалось по изложенной методике течение пара со взвешенными в нем каплями. На фиг. 2 представлены полученные численно профили безразмерных давлений. Кривые *а* и *б* соответствуют соплу 1, а кривая *в* – соплу 2, z_t – координата горловины сопла, а z_* – координата особой точки. Точками на фиг. 2 представлены соответствующие экспериментальные данные [1].

Недостатком, характерным как для [5, 6], так и для настоящей работы, является использование экстраполяции. Его можно устранить, применяя итерационный процесс, основанный на использовании разности между заданной и получаемой площадью поперечного сечения сопла на отрезке экстраполяции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейли, Нильсон, Серра, Цупник.* Течение газа с твердыми частицами в осесимметричном сопле.– Ракетная техника, 1961, № 6, с. 56–62.
2. *Глауц.* Смешанное дозвуковое и сверхзвуковое течение газа с твердыми частицами.– Ракетная техника, 1962, № 5, с. 147–149.
3. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
4. *Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И.* Адиабатные двухфазные течения. М.: Атомиздат, 1973. 448 с.
5. *Эмануэль Дж.* Применение метода численного интегрирования при наличии особенности в виде седловой точки к расчету одномерного неравновесного потока в сопле.– Экспресс-информация, астронавтика и ракетодинамика, 1965, № 41, с. 5–25.
6. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1975. 212 с.
7. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.– ПММ, 1970, т. 34, № 6, с. 1097–1112.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.
9. *Petrowsky I.* Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes. Матем. сб., 1934, т. 41, в. 1, с. 107–156.

Москва

Поступила в редакцию 30.XII.1980

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ РАСТВОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТВЕРДУЮ ФАЗУ, В ПОРИСТУЮ СРЕДУ

АКБУЛАТОВ Т. О., РАКША В. Ю., САННИКОВ Р. Х.

Распределение давления в пористой среде при динамической фильтрации в ней растворов, содержащих твердую фазу, отлагающуюся на поверхности пористой среды в виде фильтрационной корки, исследовано в [1, 2]. Однако в [1] решение получено для конечной длины пористой среды, а в [2] принято допущение о постоянстве толщины фильтрационной корки, что не вполне соответствует реальным условиям. Вопросы фильтрации суспензий детально рассмотрены в монографии [3], но поскольку фильтры имеют ограниченную толщину, в ней не учитываются упругие свойства жидкостей.

Ниже приводится решение указанной задачи в более общей постановке: фильтрация происходит в полуограниченной пористой среде с образованием фильтрационной корки переменной толщины.

1. Пусть на обнаженную плоскую поверхность пористой среды в момент времени $t>0$ начинает действовать давление раствора P_c. Начальное давление в пористой среде (при $t=0$) равно P_0. Вследствие перепада давления начинается процесс фильтрации с образованием трех зон: 1) фильтрационная корка с пористостью m_1, проницаемостью k_1 и пьезопроводностью $\varkappa_1(-l_1\leqslant x\leqslant 0)$; 2) зона проникновения фильтрации раствора в горную породу с параметрами m_2, k_2, $\varkappa_2(0\leqslant x\leqslant l_2)$; 3) горная порода,

[1] Эти экспериментальные данные получены В. А. Джамарджашвили в лаборатории ИТЭУ в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского.

насыщенная пластовой жидкостью, с параметрами m_3, k_3, $\varkappa_3 (l_2 \leqslant x)$. Вследствие взаимодействия фильтрата раствора с горной породой проницаемость зоны 2 в общем случае отличается от первоначальной проницаемости массива породы (зона 3). По этой же причине может отличаться вязкость фильтрующейся жидкости в зонах 1 и 2. Если фильтрация подчиняется закону Дарси, то для давления в зонах 1–3 соответственно имеем

$$\varkappa_i \frac{\partial^2 P_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t}, \qquad i=1,2,3$$

$$\varkappa_i = \frac{k_i}{\mu_i(\beta_{ci}+m_i\beta_i)} \tag{1.1}$$

Краевые и начальные условия имеют вид

$$x \geqslant 0, \quad P_3(x,\ 0)=P_0, \quad P_1(-l_1,\ t)=P_c, \quad P_3(\infty,\ t)=P_0 \tag{1.2}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial P_1(0,t)}{\partial x} = \frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial P_2(0,t)}{\partial x}, \quad P_1(0,t)=P_2(0,t) \tag{1.3}$$

$$\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial P_2(l_2,t)}{\partial x} = \frac{k_3}{\mu_3} = \frac{\partial P_3(l_2,t)}{\partial x}, \quad P_2(l_2,t)=P_3(l_2,t). \tag{1.4}$$

Здесь μ_i, β_i – динамическая вязкость и коэффициент сжимаемости жидкости в i-й зоне; β_{ci} – коэффициент сжимаемости скелета породы в i-й зоне (для 1-й зоны – фильтрационная корка). Параметры l_1 и l_2 находятся из уравнений

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{k_1 c}{\mu_1(1-m_1)}, \qquad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{k_2}{\mu_2 m_2}\frac{\partial P_2(l_2,t)}{\partial x} \tag{1.5}$$

Здесь c – содержание твердой фазы в растворе, не проникающей в поры породы.

2. Решая задачу (1.1) – (1.4) путем следующей подстановки [4], получим

$$P_i = P_i(\lambda_i) = P_i\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_i z}}\right)$$

$$P_i = P_c - \frac{P_c-P_0}{A}\left[\alpha_1\Phi(\psi_1)+\alpha_i\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_i t}}\right)\right], \quad i=1,2 \tag{2.1}$$

$$P_3 = P_0 + (P_c-P_0)\frac{\alpha_3}{A}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_3 t}}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$A = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\Phi(\psi_i), \qquad \alpha_i = \frac{\mu_i}{k_i}\sqrt{\pi\varkappa_i}\exp\left(\frac{\gamma_2}{4\varkappa_i}\right) \tag{2.3}$$

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{4\varkappa_i}}, \qquad \gamma_3=\gamma_2$$

Здесь Φ – функция Крампа.

Отметим, что полученные решения справедливы при $\gamma_1 = l_1^2/t = \text{const}$, $\gamma_2 = l_2^2/t = \text{const}$, откуда имеем

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_i}{t}}, \qquad i=1,2 \tag{2.4}$$

Из (1.5) с учетом (2.1), (2.4) получаем следующую систему уравнений для определения γ_1 и γ_2

$$A = \frac{2(P_c-P_0)}{am_2\sqrt{\gamma_1}}\exp(\psi_2^2-\psi_1^2) \tag{2.5}$$

$$\sqrt{\gamma_1} = \sqrt{\gamma_2}\,\frac{1}{a}\exp(\psi_2^2-\psi_1^2), \qquad a = \frac{1-m_1}{cm_2} \tag{2.6}$$

3. Уравнения (2.1) и (2.2) могут быть существенно упрощены. Если перепад давления $P_c - P_0 < 10$ МПа, параметры γ_1 и γ_2 малы, так что $\psi_i \ll 1$, $i=1,\ 2,\ 3$. Тогда

$$\exp(\psi_i) \simeq 1, \quad \Phi(\psi_i) \simeq \sqrt{\gamma/(\pi\varkappa)}$$

и решение (2.1), (2.2) и выражение (2.3) представим в виде

$$P_i=P_c-\frac{P_c-P_0}{A}\left(\omega_1\sqrt{\gamma_1}+\omega_i\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\quad i=1,2;\quad \omega_i=\frac{\mu_i}{k_i} \tag{3.1}$$

$$P_3=P_0+(P_c-P_0)\,\omega_3\frac{\sqrt{\pi\varkappa_3}}{A}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_3 t}}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$A=\omega_1\sqrt{\gamma_1}+\omega_2\sqrt{\gamma_2}+\omega_3(\sqrt{\pi\varkappa_3}-\sqrt{\gamma_2}) \tag{3.3}$$

Параметры γ_1 и γ_2 находятся в явном виде из

$$\gamma_1=\left\{\frac{-\omega_3\sqrt{\pi\varkappa_3}+\sqrt{\omega_3^2\pi\varkappa_3+8(P_c-P_0)\,a m_2^{-1}[\omega_1+a(\omega_2-\omega_3)]}}{2[\omega_1+a(\omega_2-\omega_3)]}\right\}^2 \tag{3.4}$$

$$\gamma_2=\left[\frac{-\omega_3\sqrt{\pi\varkappa_3}+\sqrt{\omega_3^2\pi\varkappa_3+8(P_c-P_0)\,m_2^{-1}(\omega_2-\omega_3+a^{-1}\omega_1)}}{2(\omega_2-\omega_3+a^{-1}\omega_1)}\right]^2 \tag{3.5}$$

Перепад давления на фильтрационной корке, ее толщина, глубина проникновения фильтрата в породу и расход фильтрата раствора на единицу площади поверхности фильтрации определены выражениями

$$\Delta P=P_c-P_1(0,t)=(P_c-P_0)\,\omega_1\frac{\sqrt{\gamma_1}}{A} \tag{3.6}$$

$$l_1=\sqrt{\gamma_1 t},\qquad l_2=\sqrt{\gamma_2 t},\qquad Q=\omega_1\frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{P_c-P_0}{A\sqrt{t}}$$

Из общих решений (3.1)—(3.7) легко получить частные случаи.

Если раствор не содержит твердой фазы или вся твердая фаза вместе с раствором проникает в горную породу, фильтрационная корка не образуется; $c=l_1=\gamma_1=0$. При $c=0$ и $k_2=k_3$ получаем известное решение [4].

При нагнетании (фильтрации) раствора в газовый пласт можно принять $\mu_3=0$. При фильтрации раствора на водной основе в водоносный пласт можно положить $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$; $k_2=k_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колесников Н. А., Брыков А. А., Кузьмин М. Д., Шестаков В. Н., Коваль О. Г.* К вопросу определения давления в разрушаемой горной породе при бурении.— В кн.: Геология и полезные ископаемые Калмыцкой АССР. Вып. 4. Элиста, 1976, с. 149–152.
2. *Шерстнев Н. М., Расизаде Я. М., Ширинзаде С. А.* Предупреждение и ликвидация осложнений в бурении. М.: Недра, 1973. 304 с.
3. *Жужиков В. А.* Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. М.: Химия, 1971. 440 с.
4. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений.— Изв. АН СССР. ОТН, 1952, № 5, с. 674–687.

Уфа

Поступила в редакцию 15.IV.1981

УДК 533.27

О ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ТЯЖЕЛОЙ МОЛЕКУЛЫ В ЛЕГКОМ РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

КУСНЕР Ю. С., ПАКЛИН Б. Л.

Рассматривается поступательная релаксация (в смысле потери первоначального направления скорости) молекулы массы M, инжектируемой в поле течения легкого газа (масса молекулы m). Показано, что, когда последний достаточно разрежен, а $M\gg m$, расплывание волнового пакета тяжелой частицы может маскировать среднее «классическое» отклонение тяжелой молекулы от первоначального направления при ее столкновении с легкой. Поэтому не все столкновения, определенные газокинетическим сечением, эффективны для наблюдаемого отклонения тяжелой молекулы. Обсуждаются некоторые следствия такого поведения тяжелых молекул. Указанные ограничения классической теории должны учитываться при рассмотрении задач газовой динамики разреженных смесей.

В последнее время интерес к задаче о поступательной релаксации тяжелой молекулы в легком газе, происходящей за несколько десятков «первых» столкнове-