УДК 532.529

О РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ СОПЛА ЛАВАЛЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

АЛАДЬЕВ И. Т., ГАНЖЕЛО А. Н.

В работе рассматривается методика численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих течение двухфазной среды в сопле Лаваля в одномерном приближении. Имеется в виду прямая задача, когда по заданному закону изменения площади поперечного сечения сопла и функциональным связям между входными параметрами находятся неизвестные величины параметров двухфазного потока по длине сопла. В работах [1–3] рассматривается решение таких задач в упрощенной постановке, в [4] предлагается методика, пригодная лишь для конических сопел. В [5] рассмотрена задача такого типа для химически неравновесных течений в соплах. В [6] указывается на возможность использования методики, данной в [5], для расчета двухфазных течений, но обобщение ее на этот случай отсутствует. В настоящей работе предлагается итерационный процесс подбора начальных данных, замена переменных, позволяющая достаточно точно решать уравнения в окрестности особой точки, корректное прохождение особой точки. Все это применимо для любых неравновесных течений.

Систему дифференциальных уравнений, описывающую течение двухфазной среды в одномерном приближении, можно записать в таком виде:

$$dy_1/dz=f(z, y_1,\dots,y_n)/c(y_1,\dots,y_n)$$

$$dy_i/dz=b_i(z, y_1,\dots,y_n)f(z, y_1,\dots,y_n)/c(y_1,\dots,y_n)+g_i(z, y_1,\dots,y_n), \tag{1}$$

$$(i=2, 3, \dots, n)$$

Будем рассматривать такие решения системы (1), когда $f(z, y_1, \dots, y_n)$ и $c(y_1, \dots, y_n)$ обращаются в нуль одновременно в особой точке. Система (1) непригодна для численного интегрирования, так как особой точке соответствует неопределенность вида 0/0. Перейдем к другой системе уравнений, эквивалентной исходной, введя параметр t по формуле

$$dz/dt=c(y_1,\dots,y_n)$$

В результате замены независимой переменной мы получим автономную систему $n+1$ дифференциальных уравнений

$$dy_1/dt=f(z, y_1,\dots,y_n) \tag{2}$$

$$dy_i/dt=b_i(z, y_1,\dots,y_n)f(z, y_1,\dots,y_n)+c(y_1,\dots,y_n)g_i(z, y_1,\dots,y_n)$$

$$dz/dt=c(y_1,\dots,y_n),\qquad (i=2, 3,\dots,n)$$

Эту систему удобно численно интегрировать в любом случае. Для численного интегрирования необходимо подобрать исходные данные так, чтобы в некоторой точке выполнялась система равенств

$$f(z, y_1,\dots,y_n)=0;\qquad c(y_1,\dots,y_n)=0 \tag{3}$$

Будем считать, что начальные данные связаны некоторыми зависимостями вида

$$y_{1+}=\eta_1(y_{i+});\quad y_{2+}=\eta_2(y_{i+});\quad y_{i-1+}=\eta_{i-1}(y_{i+}) \tag{4}$$

$$y_{i+1+}=\eta_{i+1}(y_{i+});\dots\quad y_{n+}=\eta_n(y_{i+});\quad z_+=\eta_{n+1}(y_{i+})$$

Здесь i фиксировано. Тогда процесс нахождения интересующих нас входных данных равносилен решению системы двух уравнений (5), которая получается из (3):

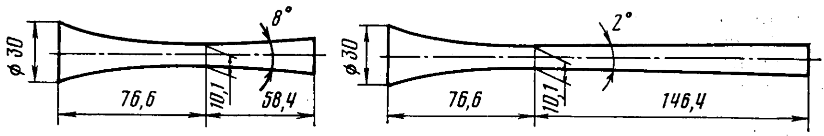
$$c(y_1(y_{1+},\dots,y_{n+}, z_+, z_*),\dots,y_n(y_{1+},\dots,y_{n+}, z_+, z_*))=0 \tag{5}$$

$$f(z_*, y_1(y_{1+},\dots,y_{n+}, z_+, z_*),\dots,y_n(y_{1+},\dots,y_{n+}, z_+, z_*))=0$$

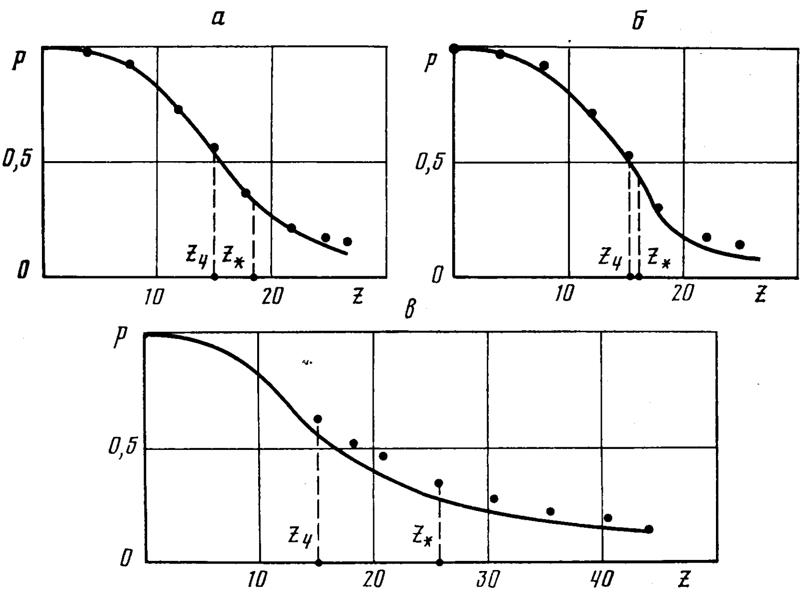
В (5) неизвестные начальные данные связаны соотношениями (4), поэтому (5) – это система алгебраических уравнений относительно неизвестных y_{i+} и z_*; «+» соответствует параметрам на входе в сопло, а $*$ – особой точке. Поскольку общее решение системы (2) отсутствует в явном виде, мы можем говорить лишь о существовании системы (5). Решать эту систему будем так. Задаем два начальных приближения для y_i, A_0 и B_0. Остальные начальные данные получаются из (4). Одна совокупность их соответствует A_0, а другая B_0. Величине A_0 соответствуют такие начальные данные, что на интегральной кривой системы (2) в некоторой точке $z=z_1$

$$f(z_1, y_1,\dots,y_n)=0;\qquad c(y_1,\dots,y_n)\neq 0$$

Здесь B_0 соответствуют такие начальные данные, что на интегральной кривой



Фиг. 1



Фиг. 2

в некоторой точке $z=z_2$

$$c(y_1, \ldots, y_n)=0; \quad f(z_2, y_1, \ldots, y_n)\neq 0$$

Нулевое приближение для y_{i+} определяем по формуле $y_{i+}=(A_0+B_0)/2$. Значения остальных начальных данных определяются по формулам (4). Затем система (2) численно интегрируется до тех пор, пока $f(z, y_1, \ldots, y_n)$ или $c(y_1, \ldots, y_n)$ не поменяет знак. Могут быть три случая:

1) в некоторой точке $z_1 f(z_1, y_1, \ldots, y_n)=0$; $c(y_1, \ldots, y_n)\neq 0$;
2) в некоторой точке $z_2 f(z_2, y_1, \ldots, y_n)\neq 0$; $c(y_1, \ldots, y_n)=0$;
3) в некоторой точке $z_3 f(z_3, y_1, \ldots, y_n)=0$; $c(y_1, \ldots, y_n)=0$.

В третьем случае y_{i+} является искомой величиной и на этом итерационный процесс заканчивается. На практике случай 3 маловероятен. В первом случае новые границы для y_{i+} получаются по формулам $A_1=y_{i+}$; $B_1=B_0$, а во втором случае – по формулам $A_1=A_0$; $B_1=y_{i+}$. Первое приближение для y_{i+} определяется по формуле $y_{i+}=(A_1+B_1)/2$. Остальные начальные параметры определяются по формулам (4). Следующие приближения определяются аналогично первому. Величины A_0 и B_0 выбираются после предварительных расчетов. Интегральная кривая, соответствующая подобранным начальным данным, существенно отличается от точной кривой лишь в окрестности особой точки, где значительно изменяется ее кривизна. Поэтому первая часть приближенного решения должна заканчиваться в области, где $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |d^2y_i/dz^2|$ изменяется незначительно. Так, при решении конкретной системы уравнений, представленной в [7], после итерационного процесса подбора начальных данных выбиралась кривая, на которой $c(y_1, \ldots, y_n)$ обращается в нуль. На отрезке этой кривой, отношение длины которого к радиусу горловины сопла равнялось 3, а на правой границе $c(y_1, \ldots, y_n)=0$, выбиралась точка с минимальной второй производной скорости газа. Эта точка является концом первой части искомой интегральной кривой. После определения этой точки осуществляется экстраполяция параметров на промежуток, правая граница которого находится на сколь угодно малом расстоянии за точкой, в которой функция $c(y_1, \ldots, y_n)$ или $f(z, y_1, \ldots, y_n)$ меняет знак последней. Конец этого промежутка дает приближенные значения параметров в особой точке. При расчетах использовалась линейная экстраполяция. Можно показать [8, 9], что искомая интегральная кривая соответствует одному из двух собственных направлений матрицы, составленной из значений первых частных производных правых частей системы (2), а производные параметров по z любого порядка в особой точке выражаются через параметры в особой точке. Используя значения этих производных, получим отрезки рядов Тейлора для неизвестных функций, которые дают начальные значения параметров за особой точкой для решения системы уравнений, полученных из (2) изменением знака правых частей. Решение этой системы уравнений даст последнюю часть искомой интегральной кривой. При расчетах использовались значения только первых производных параметров в особой точке.

На фиг. 1 представлены рисунки сопел, в которых рассчитывалось по изложенной методике течение пара со взвешенными в нем каплями. На фиг. 2 представлены полученные численно профили безразмерных давлений. Кривые *а* и *б* соответствуют соплу 1, а кривая *в* – соплу 2, z_t – координата горловины сопла, а z_* – координата особой точки. Точками на фиг. 2 представлены соответствующие экспериментальные данные [1].

Недостатком, характерным как для [5, 6], так и для настоящей работы, является использование экстраполяции. Его можно устранить, применяя итерационный процесс, основанный на использовании разности между заданной и получаемой площадью поперечного сечения сопла на отрезке экстраполяции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейли, Нильсон, Серра, Цупник.* Течение газа с твердыми частицами в осесимметричном сопле.– Ракетная техника, 1961, № 6, с. 56–62.
2. *Глауц.* Смешанное дозвуковое и сверхзвуковое течение газа с твердыми частицами.– Ракетная техника, 1962, № 5, с. 147–149.
3. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
4. *Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И.* Адиабатные двухфазные течения. М.: Атомиздат, 1973. 448 с.
5. *Эмануэль Дж.* Применение метода численного интегрирования при наличии особенности в виде седловой точки к расчету одномерного неравновесного потока в сопле.– Экспресс-информация, астронавтика и ракетодинамика, 1965, № 41, с. 5–25.
6. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1975. 212 с.
7. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.– ПММ, 1970, т. 34, № 6, с. 1097–1112.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.
9. *Petrowsky I.* Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes. Матем. сб., 1934, т. 41, в. 1, с. 107–156.

Москва

Поступила в редакцию 30.XII.1980

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ РАСТВОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТВЕРДУЮ ФАЗУ, В ПОРИСТУЮ СРЕДУ

АКБУЛАТОВ Т. О., РАКША В. Ю., САННИКОВ Р. Х.

Распределение давления в пористой среде при динамической фильтрации в ней растворов, содержащих твердую фазу, отлагающуюся на поверхности пористой среды в виде фильтрационной корки, исследовано в [1, 2]. Однако в [1] решение получено для конечной длины пористой среды, а в [2] принято допущение о постоянстве толщины фильтрационной корки, что не вполне соответствует реальным условиям. Вопросы фильтрации суспензий детально рассмотрены в монографии [3], но поскольку фильтры имеют ограниченную толщину, в ней не учитываются упругие свойства жидкостей.

Ниже приводится решение указанной задачи в более общей постановке: фильтрация происходит в полуограниченной пористой среде с образованием фильтрационной корки переменной толщины.

1. Пусть на обнаженную плоскую поверхность пористой среды в момент времени $t>0$ начинает действовать давление раствора P_c. Начальное давление в пористой среде (при $t=0$) равно P_0. Вследствие перепада давления начинается процесс фильтрации с образованием трех зон: 1) фильтрационная корка с пористостью m_1, проницаемостью k_1 и пьезопроводностью $\varkappa_1(-l_1\leqslant x\leqslant 0)$; 2) зона проникновения фильтрации раствора в горную породу с параметрами m_2, k_2, $\varkappa_2(0\leqslant x\leqslant l_2)$; 3) горная порода,

[1] Эти экспериментальные данные получены В. А. Джамарджашвили в лаборатории ИТЭУ в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского.