

пуклой снижаются. Наиболее резкое снижение имеет место вблизи торцевых стенок, где по данным измерения давления, формируется вихрь. Приведенные на фиг. 2 данные показывают, что изменение касательных напряжений на торцевых стенках и в угловых зонах является результатом влияния вторичных течений. Так, с увеличением угла поворота максимум кривой изменения τ вдоль торцевой стенки (ось Y) заметно смещается в направлении выпуклой стенки.

Полученные количественные характеристики изменения давления и касательных напряжений на стенках могут быть использованы для обоснований теоретических расчетов гидродинамики потоков в криволинейных каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. So R. M. C., Mellor G. L. Experiment on convex curvature effects in turbulent boundary layers.— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, № 1, p. 43–62.
2. Уханова Л. Н. Исследование пространственного турбул. погран. слоя на торцевой стенке криволинейного канала.— В кн.: Пром. аэродинамика. В. 32. М.: Машиностроение, 1975, с. 38–48.
3. Patel V. C. Calibration of the Preston tube and limitations on its use in pressure gradients.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, № 1, p. 185–208.
4. Clauser F. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients.— J. Aeronaut. Sci., 1954, v. 21, p. 91–108.
5. Adachi T., Kawai T., Nawano T., Hama M. Secondary flows in curved ducts of rectangular cross-section.— Bull. JSME, 1977, v. 20, № 143, p. 593–599.

Николаев

Поступила в редакцию
5.VI.1984

УДК 532.527.011

О ВИХРЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОСТИ С УГЛУБЛЕНИЕМ

САДОВСКИЙ В. С., СИНИЦЫНА Н. П.

В точной постановке исследуется решение задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости на плоской поверхности с полуцилиндрическим углублением в поперечном к потоку направлении. Течение в углублении принимается равномерно завихренным, а внешний неограниченный поток — потенциальным. На разделяющей линии тока константа Бернулли испытывает скачок заданной величины. Рассматриваемое вихрепотенциальное течение удовлетворяет условию Праудтля — Бэтчелора [1]. Поэтому полученное решение является необходимым звеном при построении методом сращиваемых асимптотических разложений задачи об обтекании впадины вязкой жидкостью в случае больших чисел Рейнольдса.

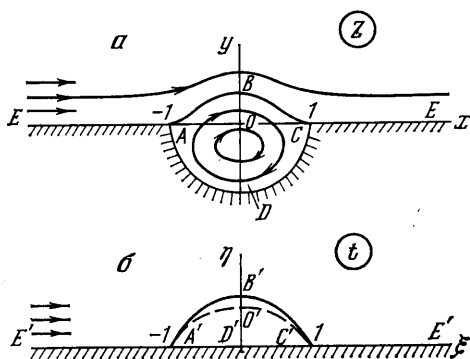
В соответствии с идеями работы [1] рассмотрим в плоскости x, y плоское стационарное течение идеальной жидкости по схеме, изображенной на фиг. 1, а. Примем, что движение жидкости в полуцилиндрическом углублении на плоскости является циркуляционным с постоянной величиной вихря $\omega = \text{const}$, внешнее течение является потенциальным с единичной скоростью на бесконечности. Здесь и в дальнейшем все линейные размеры отнесены к радиусу впадины, а компоненты u и v вектора скорости по осям x, y соответственно — к величине скорости невозмущенного безвихревого течения.

Пусть граничная линия тока ABC , разделяющая вихревой и потенциальный потоки, сходит с угловой точки A и приходит в угловую точку C . Если V_e и V_i — несопадающие величины скорости на внешней (по отношению к углублению) и внутренней сторонах разделяющей линии тока L , то для каждой точки L из интеграла Бернулли и условия непрерывности давления следует равенство $V_e^2 - V_i^2 = \Delta = \text{const} > 0$ (1)

где Δ — удвоенная величина скачка константы Бернулли на L .

Осуществим переход из физической плоскости (x, y) на верхнюю полуплоскость с помощью конформного отображения

$$t = \left[1 + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2/3} \right] / \left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2/3} \right] \quad (2)$$



Фиг. 1

Соответствие точек и границ указано на фиг. 1. Области вихревого течения в плоскости z соответствует область Σ' , образом разделяющей линии тока ABC является кривая $A'B'C'$, а верхняя полуплоскость с выброшенной частью Σ' занята безвихревым потоком со скоростью на бесконечности $u_\infty = 2/3$.

С использованием свойств оператора Лапласа и конформных отображений крайняя задача для функции тока ψ в плоскости t принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \begin{cases} -\omega \left| \frac{dz}{dt} \right|^2; & t \in \Sigma' \\ 0; & t \in \Sigma' \end{cases} \quad (3)$$

$$\psi = 0 \quad (\eta = 0, t \in L'); \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{2}{3} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial N_e} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial N_i} \right)^2 = \Delta \left| \frac{\partial z}{dt} \right|^2 \quad (t \in L') \quad (5)$$

где Δ — заданный параметр.

По аналогии с [2] и в соответствии с правой частью уравнения (3) и условий (4) представим $\psi(\xi, \eta)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi(\xi_0, \eta_0) &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 = \frac{2}{3} \eta_0 - \\ &- \frac{\omega}{2\pi} \iint_{\Sigma'} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 \ln \sqrt{\frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2}} d\xi d\eta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{L'} \Gamma(\xi) \ln \sqrt{\frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2}} dl \end{aligned} \quad (6)$$

При этом уравнение (3), условие непротекания на границе $\eta=0$ и условия на бесконечности (4) выполняются точно. Видно, что $\psi(\xi, \eta)$ будет полностью определена, если надлежащим образом выбрать плотность $\Gamma(\xi)$ логарифмического потенциала простого слоя ψ_2 , граничную линию тока $\eta=f(\xi)$ и вихрь ω .

Удовлетворение условиям непротекания и непрерывности давления на L' приводит к двум интегральным уравнениям (аналогичным в [2, 3]), которые связывают две искомые функции $\Gamma(\xi)$ и $f(\xi)$.

Одно из краевых условий для искомой функции $f(\xi)$ очевидно: $f(\pm 1) = 0$. Второе условие состоит в том, что при $\Delta > 0$ линия тока ABC в физической плоскости должна быть касательной к отрезку AOC (фиг. 1) в точках $x = \pm 1$, т. е. в плоскости t

$$\left| df/d\xi \right| = \sqrt{3} \quad (\xi = \pm 1) \quad (7)$$

Чтобы получить граничные условия для $\Gamma(\xi)$, воспользуемся очевидными соотношениями

$$\Gamma = \frac{\partial \psi_2}{\partial N_i} - \frac{\partial \psi_2}{\partial N_e} = \frac{\partial \psi}{\partial N_i} - \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = (V_i - V_e) \left| \frac{dz}{dt} \right| \equiv \gamma \left| \frac{dz}{dt} \right|$$

где $\gamma = V_i - V_e$ — плотность вихревого слоя на L в физической плоскости. Так как точки A и C для циркуляционного течения являются критическими, то $V_i(\pm 1) = 0$, поэтому с учетом (1) получаем: $\gamma(\pm 1) = -\sqrt{\Delta}$. В окрестности точек A' и C' из (2) имеем: $|dz/dt| \approx 3/2 \sqrt{r/2}$, где r — полярный радиус, проведенный из точек A' или C' . Таким образом, краевые условия для Γ имеют вид: $\Gamma(\pm 1) = 0$. Завихренность ω , входящая в (6), определяется из условия, что в точке $\xi_0 = -1, \eta_0 = 0$ плоскости t скорость

Δ	$-\omega$	y_0	u_e	u_i	$-u_s$	Δ	$-\omega$	y_0	u_e	u_i	$-u_s$
1,0	0	0	1	0	0	0,4	2,427	0,191	1,257	1,086	0,971
0,95	0,751	0,017	1,026	0,320	0,276	0,3	2,589	0,220	1,290	1,168	1,049
0,9	1,061	0,034	1,051	0,452	0,393	0,2	2,736	0,249	1,323	1,245	1,122
0,8	1,480	0,068	1,099	0,638	0,558	0,1	2,868	0,278	1,353	1,316	1,191
0,7	1,787	0,100	1,142	0,778	0,685	0,05	2,931	0,294	1,369	1,351	1,225
0,6	2,035	0,131	1,183	0,894	0,792	0	3,004	0,330	1,402	1,402	1,274
0,5	2,244	0,161	1,221	0,995	0,886						

потенциального течения равна нулю

$$\omega = - \left[\frac{2}{3} \pi + \int_{L'} \frac{\eta dl}{(1+\xi)^2 + \eta^2} \right] / \iint_{\Sigma'} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 \frac{\eta d\xi d\eta}{(1+\xi)^2 + \eta^2} \quad (8)$$

Итак, краевая задача (3)–(5) при $\Delta > 0$ сведена к системе двух нелинейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций одной переменной: $\eta = f(\xi)$ – разделяющей линии тока, и $\Gamma(\xi)$ (или $\gamma(\xi)$), определяющей скачок нормальной производной на L' (или L).

Необходимо отметить следующее немаловажное обстоятельство. Все проведенные выше рассуждения и математические выкладки не зависят от свойств симметрии рассматриваемого течения относительно оси y . Однако если возможно несимметричное течение, то решение системы двух интегральных уравнений должно удовлетворять дополнительному условию. Действительно, помимо (8) выражение для величины вихря может быть получено из рассмотрения величины скорости в точке C . Равенство величин ω в обоих случаях приводит к соотношению, которое является нетривиальным для несимметричного относительно оси y решения.

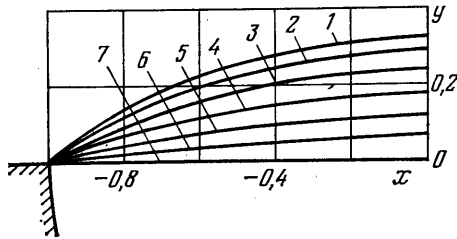
Пусть $f(\xi)$ и $\Gamma(\xi)$ – решение системы интегральных уравнений, удовлетворяющее всем крайевым условиям и (8). Нетрудно показать, что функции $f_1(\xi) = f(-\xi)$ и $\Gamma_1(\xi) = \Gamma(-\xi)$ также являются решением (это обстоятельство вытекает из общего свойства стационарных течений идеальной жидкости – неизменности линий тока при замене поля скоростей на противоположное по знаку). Поэтому вопрос о возможности несимметричных относительно оси y течений тесно связан с вопросом о единственности решения – из единственности решения следовало бы его симметрию. Однако вопрос о единственности к настоящему моменту не исследован, тем самым вопрос о возможности несимметричных течений в симметричном углублении также остается открытым. При численном исследовании решения в данной работе его симметрия постулировалась.

Случай течения при $\Delta = 0$ значительно более прост и не требует принципиального видоизменения с точки зрения построения решения (задача о вихрепотенциальном течении на плоскости с прямоугольной траншеей при $\Delta = 0$ рассмотрена в [4]). В некотором уточнении нуждается лишь крайнее условие (7). Можно показать, что в физической плоскости разделяющая линия тока ABC в угловых точках наклонена к отрезку AOC под углом 45° .

Решение системы уравнений производилось численно на ЭВМ БЭСМ-6 методом последовательных приближений. Все особенности, имеющиеся в интегралах, раскрывались аналитически. Сходимость итераций оказалась вполне удовлетворительной: после 10–15 итераций разброс во всех последующих приближениях имел место лишь за пределами первых четырех значащих цифр. Ни в одном из рассчитанных вариантов (см. таблицу) не было отмечено «разбалтывания» решения.

В таблице приведены значения свободного параметра Δ , при которых проводились расчеты (случай $\Delta = 1$ соответствует тривиальному решению – равномерному потоку при $y > 0$ и отсутствию движения жидкости во впадине). Там же приведены соответствующие расчетные значения завихренности, y -координата разделяющей линии тока (y_0) и величина скорости на внешней (u_e) и внутренней (u_i) ее сторонах, а также значение скорости u_s на дне углубления – все при $x = 0$. Видно, что имеет место монотонное изменение приведенных характеристик течения при убывании параметра Δ .

На фиг. 2 приведены расчетные линии тока $\psi = 0$. Цифрам 1–7 соответствуют следующие значения параметра Δ : 0; 0,05; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1. Как и следовало ожидать, возмущающее действие внутреннего вихревого движения жидкости на внешний потенциальный поток возрастает с убыванием величины скачка постоянной Бернулли, а коэффициент давления c_p в центре вихревой зоны монотонно уменьшается от нуля до $c_p = -1,691$ при $\Delta = 0$.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. – J. Fluid Mech., 1957, v. 1, № 2, p. 177–190.
2. Садовский В. С. О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе. – ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 773–779.
3. Садовский В. С. Исследование решений уравнений Эйлера, содержащих области с постоянной завихренностью. – Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1474, 14 с.
4. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. – Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6, с. 1242–1245.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1979