УДК 532.5.013.4:532.595

# ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ СОСУДА

НЕВОЛИН В. Г.

Продольные колебания летательных аппаратов приводят к возбуждению волн на поверхности жидкости в их резервуарах, которые с ростом амплитуды вибраций становятся неустойчивыми и разрушаются, образуя брызги [1]. При некоторых соотношениях между частотой и амплитудой вибраций возможен захват газа жидкостью (газирование топлива) [2]. Всасывание газа в жидкость может существенно изменить гидродинамические характеристики течения через резервуар и связанную с ним насосную систему.

Таким образом, возникает задача о возбуждении и тем самым о подавлении волн на поверхности вертикально колеблющегося резервуара. Эта проблема рассматривалась достаточно подробно [3–6]. Однако до сих пор не изучалось влияния вытекания жидкости из вибрирующего резервуара на возбуждение поверхностных волн. Между тем вытекающая из сосуда жидкость может существенно изменить как характер возбуждения, так и спектр поверхностных волн.

1. Пусть невязкая жидкость плотности $\rho$ коэффициентом поверхностного натяжения $\alpha$ занимает часть цилиндрического сосуда произвольного поперечного сечения и вытекает через дно. Обозначим высоту заполнения емкости жидкостью через $h(t)$, тогда скорость потечения будет равна $\dot h(t)$, где точкой обозначено дифференцирование по времени. Сосуд совершает колебания вдоль вертикальной оси по гармоническому закону $a\cos\omega t$, где $a$ – амплитуда, а $\omega$ – частота вибраций сосуда.

Введем декартову систему координат $(xyz)$, плоскость $(xy)$ которой совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось $z$ направлена вертикально вверх. Тогда в движущейся вместе с сосудом системе координат уравнения движения жидкости запишутся обычным образом [7], только вместо гравитационного ускорения $\mathbf{g}=(00-g)$ следует писать эффективное ускорение силы тяжести

$$\mathbf{g}(t)=(1-b\cos\omega t)\mathbf{g},\qquad b<1\qquad \left(b\equiv\frac{a\omega^2}{g}\right)$$

где $b$ – безразмерная амплитуда модуляции.

При любых значениях амплитуды вибраций система имеет решение

$$w_0=-\dot h(t),\qquad p_0=-\rho g(1-\ddot h(t)/g-b\cos\omega t)z,\qquad \zeta_0=h_0-h(t) \tag{1.1}$$

соответствующее постоянному по всему сечению цилиндра истечению жидкости. Здесь $w$ является $z$-составляющей скорости жидкости, $p$ – давление, $\zeta$ – смещение поверхности от положения равновесия.

Исследуем устойчивость данного решения, для чего обычным образом внесем возмущения скорости и давления и, выбирая в качестве единиц длины, времени, скорости и давления соответственно $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, $(\alpha/\rho g^3)^{1/4}$, $(\alpha g/\rho)^{1/4}$ и $(\alpha\rho g)^{1/2}$, получим, исключив из уравнения Навье – Стокса давление, для возмущений линеаризованную систему уравнений со следующими граничными условиями [7]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\dot H\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta w'=0 \tag{1.2}$$

$$\dot\zeta=w\qquad (z=0)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\dot H\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial z}=\left(1-\ddot H-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-b\cos\Omega t\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta \tag{1.3}$$

$$w=0\qquad (z=-H) \tag{1.4}$$

$$H=\frac{h(t)}{\sqrt{\alpha/\rho g}},\qquad \Omega=\frac{\omega}{\sqrt[4]{\rho g^3/\alpha}}$$

Здесь $H$, $\Omega$ – безразмерная высота слоя жидкости и частота вибрации.

Будем искать решение уравнения (1.2) с условиями на поверхности (1.3) и условиями на дне (1.4) в виде

$$w(t,x,y,z)=\sum_n \chi_n(t)\varphi_n(x,y)\frac{\operatorname{sh}k_n(z+H)}{\operatorname{sh}k_nH} \tag{1.5}$$

$$\zeta(t,x,y)=\sum_n \xi_n(t)\varphi_n(x,y); \qquad n=1,2,\dots,$$

где $k_n$ и $\varphi_n$ – собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+k^2\varphi=0 \qquad (x,y)\in S; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0 \qquad (x,y)\in\Gamma \tag{1.6}$$

Здесь через $S$ обозначена свободная поверхность жидкости, а через $\nu$ – внешняя нормаль к ее границе $\Gamma$.

Решение в форме (1.5), (1.6) позволяет удовлетворить дифференциальному уравнению задачи (1.2), а также условиям на боковой стенке сосуда. Подставляя решение (1.5) в условия на поверхности жидкости, получим для $\xi(t)$:

$$\ddot\xi_n\pm(\delta_1+\delta_2)\dot\xi_n+\operatorname{th}k_nH(\Omega_0^2\pm k_n\ddot H-bk_n\cos\Omega t)\xi_n=0 \tag{1.7}$$

$$\delta_1\equiv k_n\dot H\operatorname{th}k_nH, \qquad \delta_2\equiv k_n\dot H/\operatorname{sh}k_nH\operatorname{ch}k_nH, \qquad \Omega_0^2\equiv k_n^3+k_n$$

Здесь знак плюс соответствует случаю наполнения сосуда, а знак минус – истечению жидкости из сосуда.

Аналогичное уравнение получено в работах [8, 9] для свободных колебаний поверхности жидкости, однако авторами этих работ было опущено слагаемое, равное $\delta_1\dot\xi_n$, которое существенно при большой высоте $H$ наполнения сосуда жидкостью.

2. Рассмотрим ситуацию, когда $H$ медленно меняется со временем с постоянной скоростью, т. е. $H=H_0+\dot Ht$ при $\dot H=\mathrm{const}$, тогда можем написать, полагая $k_nH_0>1$, для $\xi_n$ с точностью до $\dot H$ следующее:

$$\ddot\xi_n\pm2\delta\dot\xi_n+(\Omega_0^2-bk_n\cos\Omega t)\xi_n=0, \qquad \delta\equiv k_n\dot H/2 \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) представляет собой уравнение Матье с диссипативным членом [10]. Решая его вблизи основного резонанса $\Omega_0=\Omega/2$ для случая наполнения сосуда жидкостью (знак плюс), получим для границ области устойчивости следующее уравнение:

$$b^2k_n^2/4\Omega^2\delta^2-(\Omega_0^2-\Omega^2/4)^2/\Omega^2\delta^2=1$$

откуда на поверхности жидкости возникают волны с волновым числом $k_n$ при $b\geqslant\Omega\dot H$. Волновые числа наиболее легко возбуждаемых поверхностных волн определятся из уравнения

$$k_{n*}^3+k_{n*}=\Omega^2/4 \tag{2.2}$$

В случае же истечения жидкости из сосуда (знак минус) поверхность жидкости неустойчива. Однако учет вязкости будет стабилизировать равновесное состояние поверхности жидкости, если коэффициент динамической вязкости $\eta\geqslant\rho h(t)/4k_n$, т. е. вязкость стабилизирует лишь короткие волны.

3. Рассмотрим случай, когда вибрация сосуда отсутствует, т. е. $a\equiv0$, а уровень жидкости колеблется около равновесного значения $H_0$ по гармоническому закону, т. е. $H=H_0+d\cos\Omega t$. Тогда для смещения поверхности от положения равновесия при $k_nH_0>1$ и $d<1$ можем написать из (1.7) следующее уравнение:

$$\ddot\xi_n-k_nd\Omega\dot\xi_n\sin\Omega t+(\Omega_0^2-k_nd\Omega^2\cos\Omega t)\xi_n=0 \tag{3.1}$$

Решая уравнение (3.1) вблизи основного резонанса, получим для границ области неустойчивости следующее уравнение:

$$d=\pm4(\Omega_0^2/\Omega^2-1/4)/k_n \tag{3.2}$$

Волновые числа наиболее легко возбуждаемых поверхностных волн определяются из уравнения (2.2).

Таким образом, модуляция уровня жидкости в сосуде (баке) может приводить к параметрическому возбуждению волн на поверхности жидкости.

Аналогичное явление возникает и в случае колебания жидкости в сообщающихся сосудах. Так, нарастание менисковых колебаний жидкости приводит к поршневым колебаниям (колебаниям столба как целого) жидкости в сосуде [11], которые в свою очередь могут привести к возбуждению поверхностных волн.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Сорокин В. И.* Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости.– Акуст. ж., 1957, т. 3, в. 3, с. 262–273.
2. *Ганиев Р. Ф., Лапчинский В. Ф.* Проблемы механики в космической технологии. М.: Машиностроение, 1978. 119 с.
3. *Натанзон М. С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977. 205 с.

4. *Моисеев Н. Н.* Динамика корабля, имеющего жидкие грузы.– Изв. АН СССР. ОТН, 1954, в. 7, с. 27–45.
5. *Болотин В. В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде.– ПММ, 1956, т. 20, в. 2, с. 293–294.
6. *Крушинская С. И.* Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3, с. 519–536.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.– Л.: Гостехиздат, 1944, 624 с.
8. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
9. *Перекрест В. И., Кононов Ю. Н.* Асимптотическое поведение поверхностных волн в цилиндрических сосудах переменной глубины.– В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. Вып. 6. Киев – Донецк: Вища школа, 1975, с. 13–18.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
11. *Брискман В. А., Иванова А. А., Шайдуров Г. Ф.* Параметрические колебания жидкости в сообщающихся сосудах.– Изв. АН СССР, МЖГ, в. 2, 1976, № 2, с. 36–42.

Пермь

Поступила в редакцию
25.V.1981

УДК 532.51.011

# ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО КОНУСА ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВОДЫ

**АЛЬЕВ Г. А.**

Решается задача отрывного обтекания кругового конуса конечной длины дозвуковым, трансзвуковым и сверхзвуковым потоком воды. Вода полагается идеальной сжимаемой жидкостью. Стационарная картина обтекания получается в процессе установления по времени с помощью двумерной конечно-разностной схемы [1]. Исследуется зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Маха набегающего потока, распределение давления по конической поверхности и форма свободной поверхности, образующейся за конусом.

Ранее такого рода задачи решались для адиабатического течения идеального газа [1]. Отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что в рассчитываемом диапазоне изменения давления воды $0<p\leqslant 2940$ МПа статическая и динамическая адиабаты практически совпадают [2]. Это обстоятельство несколько упрощает расчеты. Вместе с тем в основании конуса происходит срыв потока воды с конической поверхности – образуется свободная поверхность, что в свою очередь значительно осложняет решение задачи.

Численные расчеты сопоставляются с результатами решения задач о сверхзвуковом обтекании тонкого конуса в линейной постановке [3] и об отрывном обтекании конуса несжимаемой жидкостью [4, 5].

1. Рассматривается осесимметричное обтекание конуса конечной длины с постоянной скоростью $V_\infty$ в набегающем потоке воды. Вода полагается идеальной сжимаемой жидкостью. Считается, что давление в ней не превышает 2940 МПа. При этом статическая и динамическая адиабаты для воды практически совпадают и выражаются уравнением Тэта [2]

$$p-p_\infty=\frac{\rho_\infty a_\infty^2}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^n-1\right] \tag{1.1}$$

где $p$ и $\rho$ – давление и плотность, $p_\infty$ – давление в набегающем потоке, $a_\infty=1460$ м/с; $n=7{,}15$; $\rho_\infty a_\infty^2/n=298{,}41$ МПа.

Совместим начало цилиндрической системы координат $xr$ с вершиной конуса и пусть ось $x$ направлена по оси симметрии конуса в сторону его основания.

В основании конуса поток воды срывается с конической поверхности – образуется свободная поверхность. Давление на свободной поверхности полагается известным.

Уравнения сплошности и движения жидкости в осесимметричном случае имеют следующий вид [1]: