

Поскольку уравнение (4) возводилось в квадрат, в (5) могут содержаться «лишние» решения, которые могут быть отсеяны подстановкой в (4). В общем случае это требует довольно громоздких вычислений; правильность выбора ветви решения, соответствующей (6), довольно легко проверяется в слабoreлятивистском пределе ($a \ll 1$).

При $a_* \ll c$, $U_* \ll c$ условие (6) переходит в известный критерий [4]

$$|U| < U_{*0}, \quad U_{*0}^2 = \frac{2a_*^2}{\cos^2 \psi} \quad (7)$$

Из сравнения (6) и (7) следует вывод, что релятивистские эффекты играют стабилизирующую роль: область неустойчивости по сравнению с нерелятивистским рассмотрением может лишь уменьшаться. Этот эффект усиливается с ростом скорости звука и угла между направлениями движения жидкости и распространения возмущения.

Для возмущений, распространяющихся в направлении движения жидкости и перпендикулярно ему, областями неустойчивости соответственно будут

$$|U| < \frac{\sqrt{2} a_*}{\sqrt{1+a_*^2/c^2}}, \quad |U| < c$$

Направление распространения нарастающих возмущений определяется условием

$$\operatorname{tg}^2 \psi > \frac{1}{2} \Gamma^2 (M^2 + \beta^2 - 2) \quad (8)$$

Наблюдаемая картина существенно зависит от системы отсчета. Приближенные и численные результаты [2, 6] относятся к другой системе отсчета, поэтому сопоставление результатов зачастую затруднительно (большинство результатов этих работ к тому же относятся к случаю различных жидкостей по разные стороны разрыва).

Но нетрудно убедиться, что дисперсионное уравнение (4) можно преобразовать к соответствующим уравнениям [2, 6], если предположить в последних одинаковые свойства жидкости по разные стороны разрыва. В настоящей работе это уравнение удалось решить аналитически благодаря использованию более удобной системы отсчета. Легко видеть также, что (8) согласуется с основным выводом [2]: и в релятивистском случае всегда имеются неустойчивые моды, которые соответствуют направлениям, достаточно близким к $\psi = \pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
2. Turland B. D., Scheuer P. A. G. Instabilities of Kelvin-Helmholtz type for relativistic streaming.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 176, № 2, p. 421–441.
3. Очелков Ю. П., Прилуцкий О. Ф., Розенгаль И. Л., Усов В. В. Релятивистская кинетика и гидродинамика. М.: Атомиздат, 1979. 196 с.
4. Fejer J. A., Miles J. W. On the stability of a plane vortex sheet with respect to three-dimensional disturbances.— J. Fluid Mech., 1963, v. 15, № 3, p. 335–336.
5. Gerwin R. A. Stability of the interface between two fluids in relative motion.— Rev. Mod. Phys., 1968, v. 40, № 3, p. 652–668.
6. Blandford R. D., Pringle J. E. Kelvin-Helmholtz instability of relativistic beams.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 176, № 2, p. 443–454.
7. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 107 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
26.V.1981

УДК 532.5.013.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ В СЖИМАЕМЫХ ГАЗАХ

БАХРАХ С. М., ЖИДОВ И. Г., РОГАЧЕВ В. Г., ЯНИЛКИН Ю. В.

Одной из характерных гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина – Гельмгольца (или неустойчивость тангенциального разрыва скорости). Значительная часть исследований этой задачи относится к случаю несжимаемых жидкостей, для которых формулировка задачи проще, а возможности методов шире. Результаты решения задачи в случае несжимаемых жидкостей и обзор

литературы можно найти в [1–5]. В приближении малых возмущений задача о неустойчивости тангенциального разрыва скорости для плоских (двумерных) возмущений в случае сжимаемых газов исследовалась Л. Д. Ландау [6].

Аналитическое описание развития возмущений, амплитуда которых сравнима с длиной волны, вряд ли возможно, поэтому основным методом исследования представляется метод численного моделирования.

Настоящая работа посвящена численному исследованию нелинейной стадии развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в случае сжимаемых газов.

1. Несмотря на эффективность применения конечно-разностных методов для решения сложных гидродинамических неустойчивостей имеется ряд трудностей, связанных с дискретностью счетных сеток и наличием аппроксимационной вязкости.

При исследовании неустойчивых течений, как правило, рассматривают эволюцию детерминированного возмущения, заданного в начальный момент в виде одной или нескольких гармоник. С течением времени из-за нелинейности процесса развиваются возмущения с более короткими длинами волн, однако имеющаяся в разностных схемах аппроксимационная вязкость приводит к искаженному описанию течений на малых масштабах. Поэтому количественное описание нелинейной стадии ограничивается моментом, начиная с которого существенным образом развиваются гармоника с длиной волны, соизмеримой с размером счетной ячейки.

Линейная стадия некоторых неустойчивых течений, в том числе и неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, характеризуется ростом инкрементов при уменьшении длины волны возмущения. При численном расчете это обстоятельство может привести к быстрому развитию коротковолновых возмущений, имеющих в начальных распределениях из-за дискретности счетной схемы, и, как следствие, к ухудшению точности расчета эволюции детерминированного возмущения. Отмеченные трудности численного исследования неустойчивых течений накладывают ограничения на выбор счетной сетки и на точность аппроксимации начальных распределений. В подтверждении достоверности численных результатов важную роль играют вариации численной постановки одной и той же физической задачи.

2. Рассмотрим плоское течение двух газов, содержащее тангенциальный разрыв скорости. Пусть верхнее полупространство в начальный момент времени заполнено идеальным газом с плотностью ρ_1 , нижнее полупространство – газом с плотностью $\rho_2=1$. Давления $p_1=p_2$, показатель адиабаты $\gamma_1=\gamma_2=5/3$. В начальный момент времени граница раздела задана в виде

$$y = 0,1 \sin 2\pi x \quad (2.1)$$

Скорость газа, расположенного над границей раздела, $V_1=(v_1, 0)$. Скорость газа под границей $V_2=(-v_2, 0)$. Таким образом, на границе задан скачок v_x -компоненты скорости $\Delta v_x=v_1-v_2$. Величина скачка скорости Δv_x в расчетах 1–7 (см. таблицу) удовлетворяла условию неустойчивости плоского течения относительно малых возмущений [6]: $\Delta v_x < (c_1^{2/3} + c_2^{2/3})^{3/2}$, где c_1, c_2 – скорости звука в верхнем и нижнем газе соответственно. В расчете 8 таблицы это условие не выполнялось.

При проведении численных расчетов граница раздела задавалась приближенно кусочно-постоянной функцией, аппроксимирующей зависимость (2.1) с некоторой точностью. При этом скачок скорости распределялся в направлении y на интервале $d=1-2h$, где h – размер счетной ячейки.

В сформулированной постановке был выполнен ряд расчетов, отличающихся следующими параметрами:

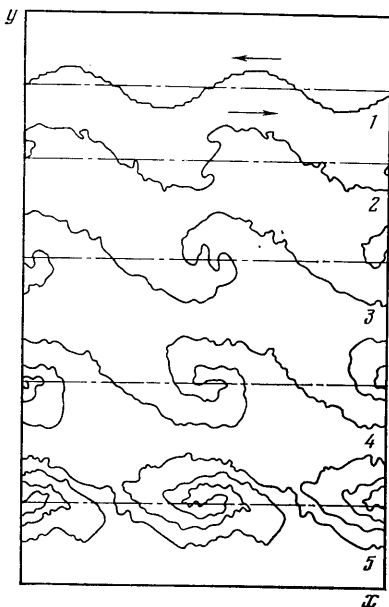
N	ρ_1	v_1	v_2	p_1	d
1	1	1	0	0,6	h
2	5	1	0	0,6	h
3	10	1	0	0,6	h
4	1	0,5	0,5	0,6	h
5	1	0,5	0,5	0,6	$2h$
6	1	0,5	0,5	1,2	h
7	1	0,5	0,5	0,6	$2h$
8	1	2,5	2,5	0,6	$2h$

В расчетах 1–5, 7, 8 скорость звука в нижней области $c_2=1$. В шестом расчете $c_2=2$, что соответствует случаю меньшей сжимаемости. Расчеты 1, 2, 3 выполнены в одинаковой постановке и отличаются лишь плотностью газа ρ_1 . Наибольшие деформации границы раздела были получены в случае, когда $\rho_1=\rho_2$ (первый вариант), поэтому именно этот вариант выбран для исследования влияния численной постановки (расчеты 1, 4, 5). Во всех расчетах, кроме 5, 7, 8, использована одинаковая аппроксимация начальной формы границы, при этом сглаживание скачка скорости вдоль оси y происходило на интервале $d \approx h$. В расчетах 5, 7, 8 была задана более точная аппроксимация начальной формы границы, обладающая антисимметрией относительно точек $x=y=0$; $x=0,5, y=0$, а величина $d \approx 2h$.

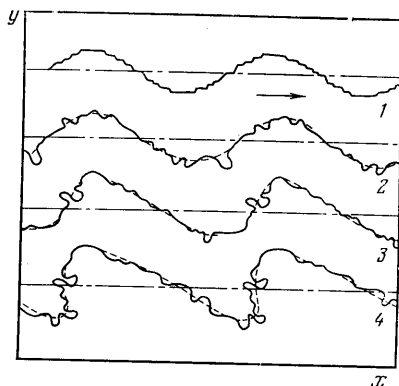
3. Решение сформулированных выше задач проводилось по методике [7], использующей переменные Эйлера и массовые концентрации веществ для выделения контактных границ.

При проведении расчетов использовалось условие периодичности течения, протяженность счетной области в направлении x составляла $\lambda=1$. Границы области в направлении y выбирались на достаточно большом расстоянии, с тем чтобы исключить их влияние на исследуемое течение. Линейный размер счетной ячейки составлял $h=0,02$, так что число разбиений на период составляло $N=50$.

Для анализа спектра начальных возмущений, фактически задаваемых в расчетах, проводилось разложение в ряд



Фиг. 1



Фиг. 2

Фурье ступенчатой функции, аппроксимирующей границу (2.1). Анализ разложения показал, что в расчетах 1–4, 6 амплитуда основной гармоники ($n=1$) отличается от $a_1=0,1$ на величину $\sim 1\%$, а амплитуды гармоник a_n ($1 < n \leq 10$) не превышают значение $\sim 0,01a_1$. В остальных расчетах в разложении Фурье отсутствуют гармоники с четными номерами, а амплитуды нечетных гармоник (вплоть до $n=21$) не превышают значений $0,005-0,01a_1$.

При численном счете рост коротковолновых гармоник ограничивается схемой вязкостью. Кроме того, к стабилизации течения приводит и сглаживание скорости в начальный момент времени на интервале $d \approx 1-2h$. Исследование сдвиговой неустойчивости течения несжимаемой жидкости (в расчетах максимальное изменение плотности не превышает 30%), содержащей сглаженный скачок скорости, показывает (например, [2]), что спектр неустойчивых возмущений ограничен величиной волнового числа k^* . В случае, когда v_x линейно зависит от y на интервале d , $k^* = 1,3/d$. При $k > k^*$ возмущения не растут. При $k \leq 0,4h^*$ инкременты роста возмущений отличаются от инкрементов задачи с разрывом скорости менее чем на $\sim 10\%$. Полагая $d \approx 0,02$, $\lambda_n = 1/n$, получим $n^* = 11$. Следовательно, малые возмущения с $n > 11$ не должны расти со временем, а рост возмущений с $n=6-11$ должен происходить с существенно меньшим инкрементом, чем в случае разрыва скорости.

Таким образом, малость амплитуд дополнительных гармоник, появляющихся в начальных условиях из-за аппроксимации границы, а также наличие факторов, ограничивающих рост коротковолновых возмущений, указывают на возможность количественного описания нелинейной стадии развития детерминированного возмущения, заданного в начальный момент гармоникой (2.1). С другой стороны, интервал времени, в течение которого возможно количественное описание этой стадии, ограничен моментом, когда аппроксимационные погрешности начинают существенно влиять на развитие коротковолновых гармоник, появляющихся в спектре вследствие нелинейности описываемого процесса.

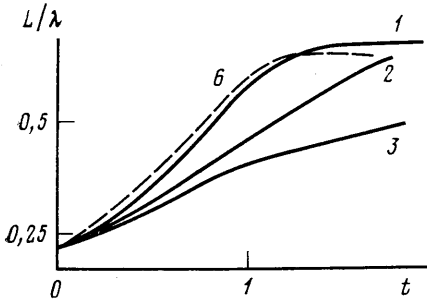
4. Результаты расчетов иллюстрируются фиг. 1–4. На фиг. 1 и 2 изображены формы границы раздела для расчетов 5 ($t=0; 0,7; 1,1; 1,6; 2,5$) и 3 ($t=0; 0,6; 1,0; 1,4$) соответственно. В случае $\rho_1=1$ наблюдается закручивание границы в спираль. Менее отчетливо тенденция образования спирали наблюдается в случае $\rho_1=10$.

На фиг. 3 представлена полученная в расчетах 1, 2, 3, 6 зависимость ширины зоны взаимопроникновения газов $L(t)$, т.е. $L = y_{\max} - y_{\min}$, где y_{\max} , y_{\min} – максимальная и минимальная ординаты границы раздела. При $t \leq 0,5$ эти зависимости имеют линейный характер, причем скорость роста тем меньше, чем больше разность плотностей (номер кривой соответствует номеру расчета).

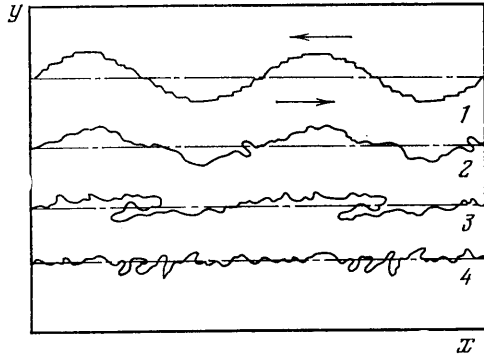
Это находится в качественном соответствии с результатами линейной теории роста малых возмущений. Однако если для случаев $\rho_1=5$ и 10 зависимость $\bar{L}(t)$

сохраняет приблизительно линейный характер вплоть до $t \approx 2$, то для случая $\rho_1 = 1$ эта величина при $t > 1$ стремится к постоянному значению. Увеличение скорости звука в 2 раза (расчет 6) не приводит к существенному изменению картины течения; различие величины $L(t)$, например, составляет $\approx 0,05$ и близко к погрешности определения границы.

При счетных вариациях одной и той же задачи с $\rho_1 = 1$ (расчеты 1, 4, 5) наблюдалась удовлетворительная воспроизводимость результатов при $t \leq 1,5$. Наибольшее их отличие наблюдалось в области, где содержится малое число ячеек для детального описания течения. Анализ роли аппроксимационной вязкости с помощью оценок и расчетов вспомогательных модельных задач указывает, что результаты расчетов на времена $t \approx 2$ носят скорее качественный характер. Максимальная ширина зоны взаимопроникновения газов в расчете 5 получилась несколько меньше, чем в расчете 1, и составляет $\sim 0,5\lambda$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для выяснения влияния счетных параметров на эффект прекращения роста ширины зоны взаимопроникновения газов был проведен расчет 7, в котором линейные размеры счетных ячеек были уменьшены в 2 раза по каждому из направлений. Зависимости ширины зоны взаимопроникновения газов от времени в расчетах 5 и 7 с хорошей точностью совпадают, причем L_{\max} в расчете 7 также составляет $\sim 0,5\lambda$.

Постановка расчета 8 отвечает течению, устойчивому согласно работе [6]. В отличие от случая неустойчивого течения (расчеты 1–7) здесь не наблюдается роста амплитуды возмущения формы границы (фиг. 4; $t = 0; 0,2; 0,4; 0,6$), что находится в качественном соответствии с выводами [6].

Таким образом, в результате проведенных исследований с помощью двумерных расчетов показано, что гармонически возмущенная граница с течением времени преобразуется в периодическую совокупность спиралей, причем образование спиралей происходит тем быстрее, чем меньше разность плотностей газов, находящихся по обе стороны сдвиговой границы. В расчетах обнаружено, что происходит ограничение роста поперечного размера спиралей, что связано с периодичностью начальных возмущений; это ограничение составляет $\sim 0,5\lambda$. С помощью расчетов показано, что результаты Л. Д. Ландау о существовании устойчивых (относительно плоских двумерных возмущений) режимов сдвиговых течений сжимаемых газов остаются справедливыми и для конечных амплитуд начальных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. London, Oxford: Clarendon Press, 1968. 652 p.
3. Софронов И. Д. К задаче о движении тангенциального разрыва в идеальной несжимаемой жидкости. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 3, с. 494–499.
4. Волевич Л. Р. Исследование неустойчивости Гельмгольца – Кельвина. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1979, № 38, 74 с.
5. Fritts M. I., Boris I. P. The Lagrangian solution of transient problems in hydrodynamics using a triangular mesh. — J. Comput. Phys., 1979, v. 31, № 3, p. 173–215.
6. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1944, т. 64, № 4, с. 151.
7. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Ячилкин Ю. В. Расчет газодинамических течений на основе метода концентрации. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 3, с. 566.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1981