ЛИТЕРАТУРА

1. *Якимов Ю. Л., Ерошин В. А., Романенков Н. И.* Моделирование движения тела в воде с учетом ее сжимаемости.– В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, 290 с.
2. *Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 44–51.
3. *Журавлев Ю. Ф.* Погружение в жидкость диска под углом к свободной поверхности.– В кн.: Сб. работ по гидродинамике. М.: Бюро науч. инф. ЦАГИ, 1959, с. 227–250.
4. *Шорыгин О. П., Шульман Н. А.* Вход в воду диска с углом атаки.– Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 1, с. 12–21.
5. *Яковлев Ю. С.* Гидродинамика взрыва. Л.: Судпромгиз, 1961.

Москва

Поступила в редакцию
2.III.1981

УДК 532.5.013.4:530.12:531.18

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ИНГЕЛЬ Л. Х.

Предпринята попытка обобщить стандартный аппарат линейного анализа гидродинамической неустойчивости течений идеальной жидкости на случай релятивистских течений (в рамках специальной теории относительности). В качестве конкретного примера исследована устойчивость плоского течения с тангенциальным разрывом скорости.

Релятивистское обобщение уравнений Эйлера и неразрывности в трехмерной форме [1] будет

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{c^2}{\gamma^2(\varepsilon+p)}\left(\nabla p+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right)^{1} \tag{1}$$

$$\gamma\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla p\right)-\frac{\partial}{\partial t}[\gamma(\varepsilon+p)]-\nabla[\gamma(\varepsilon+p)\mathbf{v}]=2 \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – трехмерная скорость, c – скорость света, $\gamma\equiv(1-v^2/c^2)^{-1/2}$, $v^2=|\mathbf{v}|^2$, t – время, p – давление, ε – плотность полной энергии. Для замыкания системы уравнений считаем известной связь $p(\varepsilon)$ [3].

Будем исследовать на устойчивость некоторое плоскопараллельное течение, скорость которого $U(z)$ направлена по оси x. Считаем, что в отсутствие возмущений заданы также постоянные значения $p=p_0$ и $\varepsilon=\varepsilon_0$. Линеаризуем уравнения (1), (2) по возмущениям

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1}{\Gamma^2\Pi}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}+\frac{U}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\Gamma^2\Pi}\frac{\partial p'}{\partial y},\qquad \frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{1}{\Gamma^2\Pi}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+U\frac{\partial \rho'}{\partial x}-\frac{U}{c^2}\left(\frac{U}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t}+\frac{\partial p'}{\partial x}\right)+\Pi\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=0$$

$$\rho\equiv\frac{\varepsilon}{c^2},\qquad \Gamma\equiv\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)^{-1/2},\qquad \Pi\equiv\rho_0+\frac{p_0}{c^2},\qquad \rho_0\equiv\frac{\varepsilon_0}{c^2}$$

Здесь штрихом помечены возмущения; u', v', w' – возмущения составляющих скорости вдоль осей x, y, z соответственно (направления этих осей ясны из предыдущего). Будем рассматривать возмущения типа нормальных волн; например, в случае давления

$$p'(x,y,z,t)=P(z)e^{i(k_x x+k_y y-\omega t)}=P(z)e^{ik_x(x+\zeta y-st)}$$

[1] Заметим, что уравнение (1) приведено в [2] с другим знаком при последнем члене. Эта ошибка (или опечатка), видимо, не повлияла на результаты [2], так как это уравнение фактически не используется в упомянутой работе.

$$s = \frac{\omega}{k_x}, \qquad \zeta = \frac{k_y}{k_x} = \operatorname{tg} \psi$$

Здесь ψ – угол между волновым вектором k и направлением течения.

Исключая из полученной системы уравнений все возмущения, кроме давления, нетрудно свести ее к одному уравнению

$$\frac{d^2P}{dz^2} - 2\frac{\Gamma^2(1-sU/c^2)}{U-s}\frac{dU}{dz}\frac{dP}{dz} - k_x^2\Gamma^2\left[\left(1-\frac{sU}{c^2}\right)^2 - \frac{(U-s)^2}{a_s^2} + \frac{\zeta^2}{\Gamma^2}\right]P=0 \tag{3}$$

$$a_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_a} = c\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_a}$$

где a_s – скорость звука.

Как видно, релятивистские поправки в общем случае резко усложняют задачу. Их влияние на гидродинамическую неустойчивость целесообразно проанализировать на каком-либо достаточно простом примере. В качестве такого примера исследуем устойчивость течения с тангенциальным разрывом (обобщение задачи Келвина – Гельмгольца) [4, 5]. Такая задача ранее рассматривалась в [2, 6] (работа [2] частично изложена также в [3]). В этих работах допускалось, что жидкости по разные стороны от разрыва скорости различны. Дисперсионное уравнение при этом получалось достаточно сложным и исследовалось численно или приближенно. В настоящей работе найдено точное аналитическое решение для частного случая однородной жидкости, что позволяет более определенно выяснить влияние релятивистских поправок (не обязательно малых) на устойчивость.

Пусть при $0<z<\infty$ (область I) жидкость движется с некоторой скоростью $U=\text{const}>0$, а при $-\infty<z<0$ (область II) – со скоростью $-U$. Тогда в области II уравнение (3) имеет вид

$$\frac{d^2P}{dz^2} - k_x^2\Gamma^2\left[(1+a\beta S)^2-(M+S)^2+\frac{\zeta^2}{\Gamma^2}\right]P=0$$

$$S=\frac{s}{a_s}=\frac{\omega}{k_x a_x}, \qquad a=\frac{a_s}{c}, \qquad \beta=\frac{U}{c}, \qquad M=\frac{U}{a_s}$$

Уравнение для области I отличается лишь знаками при U (и, следовательно, при β и числе Маха M). Общее решение каждого из этих уравнений представляет собой сумму двух экспонент. Далее, как обычно, необходимо удовлетворить условиям невозрастания возмущений при $|z|\to\infty$, равенству давлений и кинематическому условию на разрыве [7]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U\frac{\partial}{\partial x}\right) w|_{z=+0} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) w|_{z=-0}$$

Удовлетворяя этим условиям, получим дисперсионное уравнение

$$(M+S)^2\sqrt{(1-a\beta S)^2-(M-S)^2+\frac{\zeta^2}{\Gamma^2}} = -(M-S)^2\sqrt{(1+a\beta S)^2-(M+S)^2+\frac{\zeta^2}{\Gamma^2}} \tag{4}$$

(значения корней выбираются с положительной реальной частью).

Чтобы решить уравнение (4), возведем его в квадрат. После сокращения на SM (при этом, очевидно, не теряются неустойчивые моды) получается биквадратное уравнение

$$(1+a^2-2a^2\beta^2)S^4-2(\varkappa+M^2-3\beta^2+\beta^4)S^2-M^2(2\varkappa-M^2-\beta^2)=0 \tag{5}$$

$$\varkappa = 1+\frac{\zeta^2}{\Gamma^2}$$

Граница области устойчивости может быть установлена из следующих соображений. Дискриминант (5) имеет вид

$$D=(\varkappa-\beta^4)^2+4(M^2-\beta^2)(\varkappa-2\beta^2+\beta^4)\geqslant 0, \qquad M\geqslant\beta, \qquad \varkappa\geqslant 1, \qquad \beta\leqslant 1$$

Следовательно, величина S^2 действительна при любых значениях параметров задачи и может принимать отрицательные значения (что соответствует мнимым значениям S и, следовательно, неустойчивости) при

$$0<|U|<U_*, \qquad U_*^2=\frac{2a_s^2}{\cos^2\psi+a^2(1+\sin^2\psi)} \tag{6}$$

Поскольку уравнение (4) возводилось в квадрат, в (5) могут содержаться «лишние» решения, которые могут быть отсеяны подстановкой в (4). В общем случае это требует довольно громоздких вычислений; правильность выбора ветви решения, соответствующей (6), довольно легко проверяется в слаборелятивистском пределе ($a \ll 1$).

При $a_s \ll c$, $U_* \ll c$ условие (6) переходит в известный критерий [4]

$$|U| < U_{*0}, \qquad U_{*0}^2 = \frac{2a_s^2}{\cos^2\psi} \tag{7}$$

Из сравнения (6) и (7) следует вывод, что релятивистские эффекты играют стабилизирующую роль: область неустойчивости по сравнению с нерелятивистским рассмотрением может лишь уменьшаться. Этот эффект усиливается с ростом скорости звука и угла между направлениями движения жидкости и распространения возмущения.

Для возмущений, распространяющихся в направлении движения жидкости и перпендикулярно ему, областями неустойчивости соответственно будут

$$|U| < \frac{\sqrt{2}\,a_s}{\sqrt{1+a_s^2/c^2}}, \qquad |U| < c$$

Направление распространения нарастающих возмущений определяется условием

$$\operatorname{tg}^2\psi > \frac{1}{2}\Gamma^2(M^2+\beta^2-2) \tag{8}$$

Наблюдаемая картина существенно зависит от системы отсчета. Приближенные и численные результаты [2, 6] относятся к другой системе отсчета, поэтому сопоставление результатов зачастую затруднительно (большинство результатов этих работ к тому же относятся к случаю различных жидкостей по разные стороны разрыва).

Но нетрудно убедиться, что дисперсионное уравнение (4) можно преобразовать к соответствующим уравнениям [2, 6], если предположить в последних одинаковые свойства жидкости по разные стороны разрыва. В настоящей работе это уравнение удалось решить аналитически благодаря использованию более удобной системы отсчета. Легко видеть также, что (8) согласуется с основным выводом [2]: и в релятивистском случае всегда имеются неустойчивые моды, которые соответствуют направлениям, достаточно близким к $\psi=\pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
2. *Turland B. D., Scheuer P. A. G.* Instabilities of Kelvin-Helmholtz type for relativistic streaming.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 176, № 2, p. 421–441.
3. *Очелков Ю. П., Прилуцкий О. Ф., Розенталь И. Л., Усов В. В.* Релятивистская кинетика и гидродинамика. М.: Атомиздат, 1979. 196 с.
4. *Fejer J. A., Miles J. W.* On the stability of a plane vortex sheet with respect to three-dimensional disturbances.— J. Fluid Mech., 1963, v. 15, № 3, p. 335–336.
5. *Gerwin R. A.* Stability of the interface between two fluids in relative motion.— Rev. Mod. Phys., 1968, v. 40, № 3, p. 652–668.
6. *Blandford R. D., Pringle J. E.* Kelvin-Helmholtz instability of relativistic beams.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1976, v. 176, № 2, p. 443–454.
7. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 107 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
26.V.1981

УДК 532.5.013.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ В СЖИМАЕМЫХ ГАЗАХ

БАХРАХ С. М., ЖИДОВ И. Г., РОГАЧЕВ В. Г., ЯНИЛКИН Ю. В.

Одной из характерных гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина – Гельмгольца (или неустойчивость тангенциального разрыва скорости). Значительная часть исследований этой задачи относится к случаю несжимаемых жидкостей, для которых формулировка задачи проще, а возможности методов шире. Результаты решения задачи в случае несжимаемых жидкостей и обзор