МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1983

УДК 538.4

О ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕД

ТАРАПОВ И. Е.

В силу особенностей основной системы уравнений стационарному течению изотропно намагничивающейся среды вдоль магнитных линий можно сопоставить некоторый газодинамический поток. Газодинамическую аналогию можно также проследить, рассматривая законы гидростатики баротропной намагничивающейся среды. При этом «уравнение состояния» газодинамического потока определяется законом намагничивания среды, движению или равновесию которой сопоставляется этот поток. Все выводы относительно намагничивающейся непроводящей среды могут быть перенесены на случай жидкого диэлектрика без объемных зарядов.

Основные уравнения для стационарного движения невязкой несжимаемой среды, намагничивающейся по закону $\mu=\mu(\rho, H, T)$, могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{gathered}
\operatorname{div} V=0\\
\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\left(p+\psi^{(\rho)}-\frac{H^2}{8\pi}\right)+\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}\\
\operatorname{div}\mu\mathbf{H}=0\\
\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}\right)+\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right\}=0
\end{gathered}\tag{1}$$

$$\psi^{(\rho)}=-\rho^2\int^H\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)dH=\frac{1}{4\pi}\int^H(\mu-\rho\mu_\rho)H\,dH-\frac{H^2}{8\pi}$$

$$\psi^{(T)}=-T^2\int^H\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{M}{T}\right)dH;\qquad \mathbf{M}=\frac{\mu-1}{4\pi}\mathbf{H}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — намагниченность среды; нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Если среда непроводящая, то $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, так что для стационарного случая $\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0$, а в случае ее идеальной проводимости $\mathbf{E}=-1/c(\mathbf{v}\times\mu\mathbf{H})$.

Заметим, что система уравнений движения жидкого диэлектрика без объемных зарядов, поляризующегося по закону $\varepsilon=\varepsilon(\rho, E, T)$, получается из (1) простой заменой μ на ε и $\mathbf{H}$ на $\mathbf{E}$ (в уравнении энергии вектор $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ оставляется без изменений). Поэтому все дальнейшие выводы относительно непроводящей намагничивающейся среды могут быть легко перенесены на соответствующие случаи движения жидкого диэлектрика.

Уравнение энергии системы (1) допускает интегрирование вдоль линий тока (непроводящая среда) или вдоль линий тока, совпадающих с магнитными силовыми линиями (идеально проводящая среда). Интеграл имеет вид

$$\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}=\mathrm{const}\tag{2}$$

Уравнение движения системы (1) также имеет интеграл вдоль линий тока или вихревых линий в случае непроводящей среды $((\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}=\nabla(H^2/2))$, а для проводящей жидкости надо дополнительно потребовать совпадение линий тока с магнитными линиями либо с векторными линиями $\operatorname{rot}\mathbf{H}$. При этом, однако, интеграл имеет место либо при $\mu=\mu(\rho, H)$, либо при $\mu=\mu(\rho, H, T)$, но в состоянии теплового равновесия, т. е. при $T=\text{const}$. Этот интеграл имеет вид

$$\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}-\frac{1}{4\pi}\int^{H}\mu_\rho H\,dH=\text{const} \tag{3}$$

Рассмотрим класс решений системы (1), определяемый соотношением $\mu\mathbf{H}=k\mathbf{v}$, где $k=\text{const}$.

Для решений этого класса из (1) имеем

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\{(1-k^2(4\pi\rho\mu)^{-1}\mathbf{v})\}=-\nabla\left(p+\frac{1}{4\pi}\int^{H}(\mu-\rho\mu_\rho)H\,dH\right)$$

Введем новые переменные $\mathbf{v}^*$ и ρ^*:

$$\mathbf{v}^*=\left(1-\frac{c}{\mu(\rho,T,H)}\right)\mathbf{v},\qquad \rho^*=\left(1-\frac{c}{\mu(\rho,T,H)}\right)^{-1}\rho$$
$$c\equiv\frac{k^2}{4\pi\rho}=\frac{\mu^2H^2}{4\pi\rho v^2}=\frac{A^2}{v^2} \tag{4}$$

где A — альвеновская скорость.

Тогда первые два уравнения системы (1) могут быть записаны в виде

$$\rho^*(\mathbf{v}^*\nabla)\mathbf{v}^*=-\nabla Q^*,\quad \operatorname{div}\rho^*\mathbf{v}^*=0 \tag{5}$$

$$Q^*=\frac{1}{4\pi}\int^{H}(\mu-T\mu_T)H\,dH-\frac{\mu^2H^2}{8\pi c} \tag{6}$$

Давление p здесь исключено при помощи интеграла (2); предположено также, что выполнены условия, когда постоянная в (2) не зависит от линии тока.

В силу того что функция $\mu=\mu(\rho, T, H)$ считается известной, соотношения (4) позволяют считать функцию $Q^*=Q^*(T, H)$, зависящей только от переменной ρ^*, так что

$$\nabla Q^*=\frac{dQ^*}{d\rho^*}\nabla\rho^*=\left\{\frac{\partial Q^*}{\partial H}\left(\frac{d\rho^*}{dH}\right)^{-1}+\frac{\partial Q^*}{\partial T}\left(\frac{d\rho^*}{dT}\right)^{-1}\right\}\nabla\rho^*$$

Таким образом, рассматриваемому потоку намагничивающейся по закону $\mu=\mu(\rho, T, H)$ среды соответствует некоторый стационарный газодинамический поток с плотностью ρ^*, скоростью $\mathbf{v}^*$ и давлением $Q^*=Q^*(\rho^*)$. Газодинамическая аналогия может быть прослежена до конца, если $dQ^*/d\rho^*>0$.

Вычисления дают

$$\frac{dQ^*}{d\rho^*}=\frac{\rho Hc}{4\pi\rho^{*2}(1-\rho/\rho^*)^3}\left\{\left[\mu_H H+\mu-c\left(1-\frac{\mu_T}{\mu}\right)\right]\mu_H{}^{-1}+H+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{cT}{H\mu}\int^{H}\mu_{TT}H\,dH\right)\mu_T{}^{-1}\right\} \tag{7}$$

Отсюда, например, в случае слабых полей ($\mu-1=\mu c_0\rho/T$; $|\mu-1|\ll 1$) получаем из (7)

$$\frac{dQ^*}{d\rho^*}=\rho H^2c(1-c)/4\pi\rho^{*2}\left(1-\frac{\rho}{\rho^*}\right)^3$$

так что в случае $v>A$ можно говорить о газодинамической аналогии.

Нетрудно получить, что для парамагнитной насыщенной среды ($\mu = 1+4\pi M(\rho)H^{-1}$) газодинамическая аналогия имеет место лишь при $v<A$.

Рассмотренное преобразование (4) имеет место и для стационарных потоков сжимаемой намагничивающейся среды; при этом следует рассматривать класс решений, для которого $\mu\mathbf{H}=k_1\rho\mathbf{v}$

$$Q^* = \frac{1}{4\pi}\int^H (\mu - T\mu_T)H\,dH - \rho U - \frac{\mu^2 H^2}{8\pi c_1\rho}, \qquad c_1 \equiv \frac{k_1^2}{4\pi} = \frac{A^2}{\rho v^2}$$

$$\mathbf{v}^* = \left(1 - \frac{c_1\rho}{\mu}\right)\mathbf{v}, \qquad \rho^* = \left(1 - \frac{c_1\rho}{\mu}\right)^{-1}\rho$$

Соответствующие формулы здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Поскольку для газодинамического потока ρ^*, $\mathbf{v}^*$ нельзя указать нестационарных уравнений, из которых бы следовало, что в этом потоке даже при $dQ^*/d\rho^*>0$ могут возникнуть линии возмущения, ударные волны и т. п., то рассмотренная аналогия может быть использована только в том случае, если установлена возможность возникновения соответствующих возмущений, скачков и т. п. в потоке намагничивающейся среды. Работа [2] может служить источником для подобных заключений. Так, например, в ней показано, что в несжимаемой проводящей намагничивающейся среде существует пять типов простых волн, среди которых есть и плоскополяризованные; в непроводящей несжимаемой среде таких волн нет и, следовательно, в ней соответствующей газодинамической аналогии стационарных потоков не существует.

Рассмотрим теперь гидростатическую задачу для изотропной намагничивающейся баротропной среды. Из основной системы (1) при $\mathbf{v}=0$ получаем

$$\mu(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} = -\nabla P, \quad P \equiv -4\pi p + \int^H (\rho\mu_\rho - \mu)H\,dH \tag{8}$$
$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H}=0,\ \mu=\mu(\rho, T, H),\ p=p(\rho, T)$$

Если $\mu=\mu(\rho, H)$ или $\mu=\mu(\rho, T, H)$ в изотермическом режиме ($T=\text{const}$), то из интеграла (3) при $\mathbf{v}=0$ имеем

$$U + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{4\pi}\int^H \mu_\rho H\,dH = \text{const} \tag{9}$$

Интеграл (9) в случае проводящей среды существует вдоль силовых линий или векторных линий $\operatorname{rot}\mathbf{H}$.

Система (8)—(9) позволяет сопоставить рассматриваемую гидростатическую задачу с задачей о некотором газодинамическом потоке со «скоростью» $\mathbf{H}$ и «плотностью» μ. Действительно, интеграл (9) позволяет найти связь между ρ и H. Тогда из $\mu=\mu(\rho, H)$ (либо из $\mu=\mu(\rho, T, H)$ при $T=\text{const}$) получаем $H=H(\mu)$, и, следовательно, P можно рассматривать как известную функцию μ. В общем случае имеем из (8) с учетом (9)

$$\frac{dP}{d\mu} = [4\pi\rho_H(\rho U_{(\rho)})_\rho - \mu H][\mu_H + \mu_\rho\rho_H]^{-1} \tag{10}$$

где величина $\rho_H = \partial\rho/\partial H$ находится для сжимаемой среды из (9).

Если $\rho=\text{const}$, то

$$dP/d\mu = -\mu H/\mu_H \tag{11}$$

Учитывая это, систему (8) можно записать в виде

$$\mu(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} + A^2\nabla\mu = 0;\quad A^2 \equiv dP/d\mu,\quad \operatorname{div}\mu\mathbf{H}=0 \tag{12}$$

Таким образом, для случаев такой зависимости $P(\mu)$, которая обеспечивает $dP/d\mu>0$, система (12) аналогична уравнениям стационарной задачи газовой динамики.

Например, в случае закона

$$\mu(\rho, H)=\mu_\infty(\rho)\left(A_\infty^2-\frac{\gamma}{2}(H^2-H_\infty^2)\right)^{-1/\gamma}$$

где A_∞, γ — постоянные, $\mu_\infty(\rho)$ — значение магнитной проницаемости среды в поле H_∞, уравнения (11) соответствуют стационарному потоку газа с отношением теплоемкостей, равным $1+\gamma$.

Граничные условия для задачи (12) могут быть сформулированы в виде

$$\mathbf{H}|_\infty=\mathbf{H}_\infty, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_L=B^+/\mu_L \tag{13}$$

где B^+ — значение индукции в точках некоторого контура L, μ_L — значение магнитной проницаемости в намагничивающейся среде у точек контура. Если $\mu^+\ll\mu_L$ (твердый контур — хороший диамагнетик, а среда — парамагнетик), то контур можно рассматривать как непроницаемый, в остальных случаях условия (13) будут соответствовать условиям на пористом контуре в газовом потоке.

Рассмотрим примеры.

1) В случае слабых полей, когда $\mu=\mu(\rho)$, для сжимаемой намагничивающейся среды из (9) имеем следующую зависимость между ρ и H:

$$W(\rho)-W(\rho_0)=\frac{\mu_\rho}{8\pi}H^2 \qquad \left(W\equiv U+\frac{p}{\rho}\right)$$

где ρ_0 — значение плотности в среде при $H=0$.

Рассматривая, например, в качестве намагничивающейся среды идеальный газ, для которого $\mu-1=c\rho\mu$, $|\mu-1|\ll1$, получим

$$\frac{dP}{d\mu}\simeq-\frac{4\pi p(\rho)}{(1-\mu)^2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_0}=1+O\left((\mu-1)\frac{H^2}{p(\rho)}\right)$$

Таким образом, система (12) в этом случае будет эллиптической, так что аналогии с газовой динамикой нет.

2) В случае сильных полей, когда можно принять $\mu=1+4\pi K(\rho)H^n$, для несжимаемой среды имеем

$$\frac{dP}{d\mu}=-\frac{\mu(\mu-1)^{2/n-1}}{n(4\pi K)^{2/n}}$$

При $n=-1$ (жидкость находится в состоянии магнитного насыщения) существует возможность моделировать газовые потоки картиной распределения магнитного поля в покоящейся намагничивающейся среде, причем зависимость «давления» P от «плотности» μ имеет вид

$$P(\mu)=8\pi K^2\frac{1-2\mu}{(\mu-1)^2}$$

Если надо учесть сжимаемость намагничивающейся среды для закона $\mu=1+$ $+4\pi K_0\rho H^n$, то получаем

$$\frac{dP}{d\mu}=\frac{H^2}{\mu-1}\left[(\mu-1)\frac{(\rho U)_\rho}{\rho W_\rho}-\mu\right]\left[(\mu-1)\frac{H^2}{4\pi\rho^2W_\rho}+n\right]^{-1}$$

так что в случае идеального газа

$$\frac{dP}{d\mu}=\frac{H^2}{\mu-1}\left(\frac{\mu-1}{\varkappa-1}-\mu\right)\left(\frac{(\mu-1)H^2}{4\pi\varkappa p}+n\right)^{-1}$$

Когда $|\mu-1|\ll1$ и $(\mu-1)H^2\ll4\pi\varkappa p$, то $dP/d\mu>0$ только при $n<0$, а при $n>0$ и произвольных $\mu>1$ действительность «скорости звука» обеспечивается неравенством $\mu>(2-\varkappa)^{-1}$.

Газодинамическая аналогия гидростатической задачи намагничивающейся среды может быть расширена при рассмотрении потоков с поверхностями разрыва. Условия на разрывах непрерывности в покоящейся намагничивающейся среде могут быть получены из общих условий [2] путем перехода $v\to 0$. Они имеют вид

$$\left\langle \frac{\mu H_n^2}{4\pi} - p - \frac{1}{4\pi}\int^{H} (\mu-\rho\mu_\rho) H\,dH \right\rangle = 0, \qquad \langle \mu H_n\rangle = 0; \qquad \langle \mathbf{H}_\tau\rangle = 0 \quad (14)$$

Здесь скачок $\langle\rho\rangle$ остается произвольным, причем можно рассматривать общий случай $\mu=\mu(\rho, T, H)$.

В силу этого из соотношений (14) можно определить: $\langle H_n\rangle$, $\langle p\rangle$ в случае несжимаемой среды, поскольку $\langle T\rangle=0$, что обычно принимается для несжимаемой идеальной среды; $\langle H_n\rangle$, $\langle T\rangle$ в случае сжимаемой среды, для которой дополнительно надо задать уравнение состояния $p=p(\rho, T)$. В обоих случаях скачок $\langle\rho\rangle$ остается произвольным.

При $\mu=\mathrm{const}$ из (14) получаем $\langle p\rangle=\langle H\rangle=0$.

Рассмотрим примеры.

1) В слабых полях, когда можно считать $\mu-1=c\mu\rho T^{-1}$, получаем из (13)

$$\langle H_n\rangle = -H_{n1}\frac{\langle\mu\rangle}{\mu_1+\langle\mu\rangle}; \qquad \langle p\rangle = \frac{H_\tau^2}{8\pi}\langle\mu\rangle\{\langle\mu\rangle + 2(\mu_1-1)\}$$

В случае несжимаемых сред ($\langle T\rangle=0$) из этих формул нетрудно заключить, что у границы раздела двух парамагнетиков ($\mu_1>1$, $\mu_2>1$) поле больше в среде с меньшей плотностью, а в диамагнетиках – наоборот. В обоих типах магнетиков давление больше в среде с большей плотностью. В рассмотренном случае несжимаемых сред разрыв может быть только границей раздела двух сред с разными плотностями, поскольку при $\langle\rho\rangle=0$ разрыва не существует (ибо $\langle\mu\rangle=0$). Заметим также, что в прямых скачках ($H_\tau=0$) давление непрерывно.

В случае сжимаемой среды (идеальный газ), намагничивающейся по тому же закону, характерному для слабых полей, можно также получить, что при $\langle\rho\rangle=0$ другого, кроме $\langle T\rangle=\langle H_n\rangle=0$, решения системы (14) не существует, так что скачков без разрыва плотности нет.

2) В сильных полях, когда в состоянии магнитного насыщения можно считать, что $\mu=1+4\pi\rho K_0(\theta-T)H^{-1}$, где $K_0=\mathrm{const}$, $\theta>T$, ограничиваясь рассмотрением прямых скачков ($H_\tau=0$), для несжимаемой среды получаем

$$\langle H\rangle = -H_1(\mu_1-1)\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_1}; \qquad \langle p\rangle = -H_1^2(\mu_1-1)^2\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_1}\left(1+\frac{\langle\rho\rangle}{2\rho_1}\right)$$

И здесь скачок полностью определяется скачком плотности $\langle\rho\rangle$.

У границы раздела двух насыщенных парамагнетиков поле и давление больше в среде с меньшей плотностью. Однако прямые скачки с $\langle\rho\rangle=0$ в такой сжимаемой намагничивающейся среде, как идеальный газ, оказывается, могут существовать в достаточно больших полях. Действительно, полагая $p=\rho RT$ и $\langle\rho\rangle=0$, из (13) получаем

$$\langle H\rangle = 4\pi K_0\rho_1\langle T\rangle, \quad \langle T\rangle = 2T_1[\theta-1-4\pi p_1(\theta_1-1)^2 H_1^{-2}(\mu_1-1)^{-2}] \quad (\theta_1\equiv\theta/T_1) \qquad (15)$$

Отсюда следует, что если

$$H_1^2 > 4\pi p_1(\theta_1-1)(\mu_1-1)^{-2} \qquad (16)$$

то $T_2>T_1$, а при

$$4\pi p_1(\theta_1-1)(\mu_1-1)^{-2} > H_1^2 > 4\pi p_1(\theta_1-1)^2(\mu_2-1)^{-2}\left(\theta_1-\frac{1}{2}\right) \qquad (17)$$

имеем $T_1>T_2$.

Таким образом, в полях (16), повышая температуру газа до значения T_2, определяемого из (14), можно получить прямой скачок, с одной стороны которого будет H_1, T_1, ρ_1, а с другой – H_2, T_2 и та же плотность ρ_1. Если же газ находится в поле (17), то, понижая температуру до T_2 (например, помещая газ между двумя параллельными полюсами магнита, один из которых охлаждается), можно получить прямой скачок, на котором плотность не меняется, но $T_1>T_2$, $H_1>H_2$.

Рассмотренные скачки существуют только в намагничивающихся средах.

Следует иметь в виду, что при рассмотрении газодинамической аналогии гидростатической задачи намагничивающихся сред необходимо учитывать результаты исследования распространения возмущений в намагничивающихся средах. Аналогия с газовой динамикой предполагает существование в покоящейся в намагничивающейся среде устойчивых скачков поля, температуры и др., которые могут возникнуть в результате эволюции волн конечной амплитуды. Существование и типы этих волн всякий раз определяются сжимаемостью, проводимостью и другими свойствами среды [2].

В заключение отметим, что система уравнений для намагничивающихся сред, полученная в [1], нашла экспериментальное подтверждение в некоторых работах (см., например, [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.– В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Респ. межвед. темат. науч. сб., вып. 17. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1973, с. 221–239.
2. *Пацегон Н. Ф., Половин Р. В., Тарапов И. Е.* Простые волны и сильные разрывы в намагничивающейся среде.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 57–64.
3. *Gotoh K., Isler W. E., Chung D. Y.* Theory of ultrasonic attenuation in magnetic fluids.– IEEE Trans. on Magnetics, 1980, v. 16, № 2, p. 211–213.

Харьков

Поступила в редакцию
29.IX.1981