

УДК 536.46+532.51

СТАЦИОНАРНАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ
НАД ТОЧЕЧНЫМ КОНЦЕНТРАЦИОННО-ТЕПЛОВЫМ
ИСТОЧНИКОМ

ГОСТИНЦЕВ Ю. А., СУХАНОВ Л. А., СОЛОДОВНИК А. Ф.

Предельные законы для стационарных свободновосходящих турбулентных потоков над точечным источником тепла впервые были установлены в [1]. В более общем случае для описания движения газа, отличающегося по молекулярному составу от окружающей среды, возникает необходимость учета влияния разности молекулярных весов на подъемную силу и совместного решения уравнений неразрывности, движения, энергии с уравнением диффузии.

В данной статье приводятся результаты исследования стационарных турбулентных слабозакрученных струй над концентрационно-тепловым источником.

1. В приближении пограничного слоя осредненные уравнения осесимметричного конвективного турбулентного движения многокомпонентной смеси над источником тепла и вещества в поле сил тяжести имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(rvu) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(Er \frac{\partial u}{\partial r} \right) - rg \frac{\Delta \rho}{\rho_a} \\ \frac{\partial}{\partial x}(r^2uw) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2vw) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[Er^2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x}(ru\vartheta) + \frac{\partial}{\partial r}(rv\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(E Pr^{-1} r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) - ru \left(\frac{g}{c_p} + \frac{dT_a}{dx} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(ru\epsilon_j) + \frac{\partial}{\partial r}(rv\epsilon_j) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(E Sc_j^{-1} r \frac{\partial \epsilon_j}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) &= 0; \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_a} = -\beta\vartheta - \frac{\mu_a}{\mu_b} \sum_j \kappa_j \epsilon_j \\ \frac{\mu_a}{\mu_b} &= \left(1 + \sum \kappa_k^a Y_k^a \right)^{-1}; \quad \kappa_j = \frac{\mu_b}{\mu_j} - 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь r, φ, x ; v, w, u — радиальная, угловая и вертикальная координаты и соответствующие составляющие осредненной скорости газа; $\vartheta = T - T_a$; $\epsilon_j = Y_j - Y_j^a$ — избыточные осредненные значения температуры и массовой концентрации примеси в струе по отношению к их значениям в атмосфере (T_a, Y_j^a); β — постоянный для области движения коэффициент теплового расширения; E — турбулентная вязкость; Pr, Sc — турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта; μ_a, μ_b, μ_j — молекулярные веса атмосферы, сухого воздуха и j -го компонента смеси.

Поднимающаяся над источником смесь газов состоит в общем случае из $1+j=1+l+m+n$; ($p=l+m$; $k=l+n$) компонентов, где индекс 1 соответствует сухому воздуху, молекулярный состав которого по высоте атмосферы сохраняется постоянным; индекс l — компонентам примеси (избыточным по отношению к сухому воздуху), содержащимся как в окружающей среде, так и выделяемым источником; m — компонентам примеси только источника, а n — компонентам примеси только атмосферы (например,

парам воды). Для различных компонентов величина ε_j выражается через концентрации следующим образом:

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_l = Y_l - Y_l^a \\ \varepsilon_m = Y_m \\ \varepsilon_n = Y_n - Y_n^a \end{cases}$$

При записи (1.1) принято, что турбулентные параметры переноса много больше соответствующих ламинарных аналогов; вертикальный градиент возмущения давления в струе пренебрежимо мал; скорости конвективного движения малы и изменением плотности в струе из-за изменения давления можно пренебречь; давление в окружающей атмосфере меняется с высотой по закону $dp_a/dx = -\rho_a g$, атмосфера однородна ($\rho_a = \text{const}$) и постоянна по составу ($Y_k^a = \text{const}$).

Для связи корреляционных моментов с осредненными параметрами потока использована гипотеза Буссинеска [3]

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -E \frac{\partial u}{\partial r}, & \langle v'w' \rangle &= -E \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ \langle T'v' \rangle &= -E \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial r}, & \langle Y_j'v' \rangle &= -E \text{Sc}^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial r} \end{aligned}$$

Турбулентное число Прандтля Pr в развитых свободных турбулентных струях практически не зависит от физических свойств движущейся жидкости [4]. Ввиду подобия процессов теплопереноса и диффузии представляется естественным предположить, что турбулентные числа Шмидта для различных компонентов примеси в рассматриваемом течении будут одинаковыми ($\text{Sc}_j = \text{Sc}$) и для осесимметричной струи $\text{Sc} = \text{Pr}$. Тогда, умножая уравнение энергии из (1.1) на $g\beta$, каждое из j -уравнений диффузии на $\mu_a g \kappa_j / \mu_b$ и суммируя, с учетом уравнения состояния получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(rvu) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(Er \frac{\partial u}{\partial r} \right) + r\omega \\ \frac{\partial}{\partial x}(r^2uw) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2vw) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[Er^2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x}(ru\omega) + \frac{\partial}{\partial r}(rv\omega) &= \text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(Er \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - rug\beta s \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) &= 0, \quad \omega = -g \frac{\Delta \rho}{\rho_a}, \quad s = \frac{g}{c_p} + \frac{dT_a}{dx} \end{aligned} \quad (1.2)$$

В случае безразличной стратификации атмосферы ($s=0$) или для относительно небольших высот подъема, когда последним членом в уравнении энергии можно пренебречь, имеет место автомодельный режим движения, определяемый только сохраняющимися интегралами (1.2). При $s=0$ для потоков разности удельных весов газа в струе и в атмосфере (потока «плавучести») и момента количества движения следует

$$\int_0^{\infty} ru\omega dr = \frac{\Pi_0}{2\pi\rho_0}, \quad \int_0^{\infty} r^2uw dr = \frac{M_0}{2\pi\rho_0} \quad (1.3)$$

Сохранения импульса в свободновосходящей конвективной струе нет из-за наличия подъемной силы

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} ru^2 dr = \int_0^{\infty} \omega r dr$$

Для слабозакрученной струи, у которой турбулентная вязкость не за-

висит от w , основное течение определяется единственным размерным комплексом $\Pi_0/(2\pi\rho_0)$, поэтому в соответствии с II-теоремой [5], (1.2) и (1.3) функции ω , u , v , E представим в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{\Pi_0}{2\pi\rho_0 A^2} \right)^{2/3} x^{-5/3} f_4(\eta), & u &= \left(\frac{\Pi_0}{2\pi\rho_0 A^2} \right)^{1/3} x^{-1/3} f_3(\eta) \\ v &= \left(\frac{\Pi_0 A}{2\pi\rho_0} \right)^{1/3} x^{-1/3} f_1(\eta), & E &= \left(\frac{\Pi_0 A^4}{2\pi\rho_0} \right)^{1/3} x^{2/3} f_5(\eta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где безразмерные функции $f_1, 3, 4, 5$ зависят только от одной безразмерной переменной $\eta=r/(xA)$. (Константа A , характеризующая величину коэффициента турбулентного обмена, имеет различные значения для каждой из используемых в дальнейшем полуэмпирических моделей турбулентности.)

Величина тангенциальной скорости w определяется значениями трех размерных комплексов: Π_0 , ρ_0 , M_0 и, согласно II-теореме и (1.3)

$$w = \frac{M_0}{(2\pi\rho_0 A^{1/2})^{2/3}} \Pi_0^{-1/3} x^{-2/3} f_2(\eta) \quad (1.5)$$

В ряде случаев помимо нахождения профилей скоростей и относительно плотности необходимо знать распределения избыточной температуры и концентрации. Для потока «плавучести» из уравнения состояния и (1.1) можно получить

$$\Pi_0 = g \left(\frac{Q_0 \beta}{c_p} + \frac{\mu_a}{\mu_b} \sum_j \kappa_j P_{j0} \frac{\rho_0}{\rho_{j0}} \right) = g \frac{Q_0 \beta}{c_p} (1 + \alpha) \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

$$Q_0 = 2\pi\rho_0 c_p \int_0^\infty r u \theta dr, \quad P_{j0} = 2\pi\rho_{j0} \int_0^\infty r u \varepsilon_j dr, \quad \alpha = \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{c_p}{Q_0 \beta} \sum_j \kappa_j P_{j0} \frac{\rho_0}{\rho_{j0}}$$

Здесь Q_0 , P_{j0} , α — сохраняющиеся потоки тепла ($\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1}$), вещества ($\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$) и безразмерный параметр, описывающий относительный вклад потока концентрации в подъемную силу.

Так как автомодельные функции температуры, плотности и концентрации любого из j -компонентов струи (при $\text{Sc}_j = \text{Pr}$) подобны, то из (1.1) и соображений теории размерности следует

$$\begin{aligned} \theta &= \left(\frac{\Pi_0}{2\pi\rho_0 A^2} \right)^{2/3} (g\beta)^{-1/3} (1 + \alpha)^{-1} x^{-5/3} f_4(\eta) \\ \varepsilon_j &= \frac{P_{j0}}{2\pi\rho_{j0}} \left(\frac{\Pi_0 A^4}{2\pi\rho_0} \right)^{-1/3} x^{-5/3} f_4(\eta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

При известных значениях Π_0 , P_{j0} и α (для чисто тепловых источников $\Pi_0 = Q_0 g \beta / c_p$, $\alpha = 0$) распределения абсолютных значений температуры и концентрации могут быть найдены из (1.8) после решения (1.2), (1.3), (1.4) без дополнительного рассмотрения уравнений турбулентной теплопроводности и диффузии. Подстановка (1.4), (1.5) в (1.2) при $s=0$ и (1.3) дает автомодельную относительно переменной $\eta=r/(xA)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_1/\eta + f_1' - \eta f_3' - 1/3 f_3 &= 0 \\ f_1 f_3 - \eta f_3 f_3' - 1/3 f_3^2 &= \eta^{-1} (\eta f_3' f_3)' + f_4 \\ (\eta^2 f_1 f_2)' - (\eta^3 f_3 f_2)' &= [\eta^2 f_5 (f_2' - f_2/\eta)]' \\ f_1 f_4' - \eta f_3 f_4' - 5/3 f_3 f_4 &= \text{Pr}^{-1} \eta^{-1} (\eta f_5 f_4)' \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} \eta f_3 f_4 d\eta = 1, \quad \int_0^{\infty} \eta^2 f_2 f_3 d\eta = 1$$

Для замыкания полученной системы необходимо задание дополнительного условия на вид автомодельной функции турбулентной вязкости $f_5(\eta)$. В пределах полумпирических гипотез турбулентности ее принято связывать с осредненными параметрами течения.

2. В [6] для записи турбулентной вязкости предложено соотношение

$$E = \sigma x \psi / r^2 \quad (2.1)$$

где ψ — функция тока, σ — константа турбулентного обмена.

Вводя в рассмотрение в соответствии с уравнением неразрывности и (1.4) выражение для функции тока

$$\psi = \left(\frac{\Pi_0 \sigma^2}{2\pi \rho_0} \right)^{1/2} x^{5/3} \varphi(\eta), \quad A = \bar{V} \sigma, \quad \eta = r / (x \bar{V} \sigma) \quad (2.2)$$

найдем

$$f_5(\eta) = \varphi(\eta) \eta^{-2} \quad (2.3)$$

Система (1.9), записанная через безразмерную функцию тока, трансформируется в этом случае в

$$\begin{aligned} \varphi''' \varphi - \varphi'' \varphi' \left(\frac{3}{\eta} - \frac{5}{3} \eta \right) + \varphi'' \varphi' - (\varphi')^2 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{3} \right) - \\ - \varphi' \varphi \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{\eta^2} \right) + \eta^3 f_4 = 0 \\ f_1 = \varphi' - 5/3 \varphi / \eta, \quad f_3 = \varphi' / \eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$5/3 (\varphi f_2)' = - [\varphi (f_2' - f_2 / \eta)]', \quad 5/3 (\varphi f_4)' = - \text{Pr}^{-1} (\varphi f_4' / \eta)'$$

$$\int_0^{\infty} \varphi' f_4 d\eta = 1, \quad \int_0^{\infty} \varphi' f_2 \eta d\eta = 1 \quad (2.5)$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi' = f_1 = f_2 = f_3' = f_4' = 0, \quad \eta = 0 \quad (2.6)$$

$$\varphi' = \varphi'' = f_{1,2,3,4} = f_{1,2,3,4}' = 0, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Два последних уравнения из (2.4) дважды интегрируются и с учетом (2.6) дают

$$f_4 = a \exp(-5/6 \text{Pr} \eta^2), \quad f_2 = b \eta \exp(-5/6 \eta^2) \quad (2.7)$$

где a и b — константы интегрирования, определяемые из интегралов сохранения (2.5) после нахождения $\varphi(\eta)$.

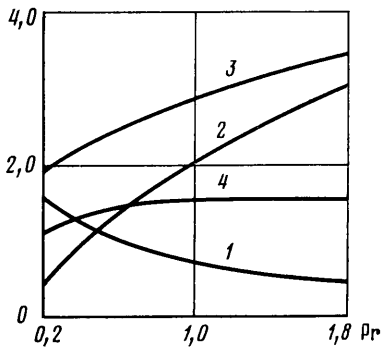
Система (2.4)–(2.7) имеет аналитическое решение при значениях числа $\text{Pr} = 0,6$ и 2. Для $\text{Pr} = \text{Sc} = 0,6$

$$\varphi = 1,442(1 - e^{-\eta^2/2}), \quad f_3 = 1,442e^{-\eta^2/2}, \quad f_4 = 1,39e^{-\eta^2/2} \quad (2.8)$$

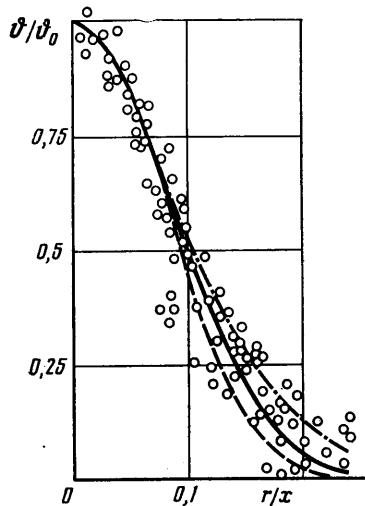
для $\text{Pr} = \text{Sc} = 2$

$$\varphi = 0,932(1 - e^{-5/6 \eta^2}), \quad f_2 = 3,575 \eta e^{-5/6 \eta^2}, \quad f_3 = 1,554 e^{-5/6 \eta^2}, \quad f_4 = 3,22 e^{-5/6 \eta^2}$$

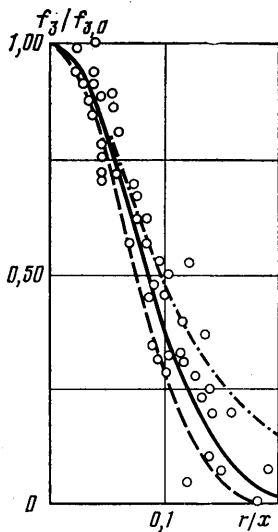
В соответствии с (2.8) при $\text{Pr} = \text{Sc} = 2$ эффективный динамический пограничный слой в свободновосходящей турбулентной струе толще теплового и концентрационного, а при $\text{Pr} = \text{Sc} = 0,6$ имеет место подобие профилей вертикальной скорости, температуры и концентрации. Последний вывод



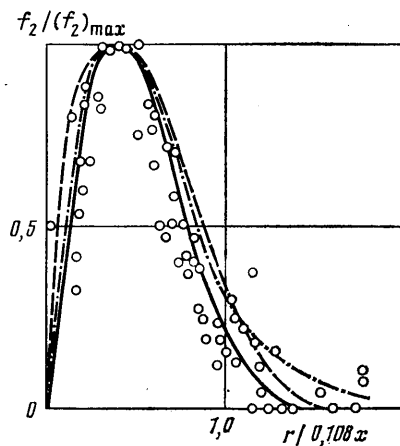
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

выявляет принципиальное отличие свободновосходящей конвективной турбулентной струи от вынужденной, где подобие профилей скорости, температуры и концентрации имеет место при $Pr=Sc=1$. Физически такое различие обусловлено тем, что в вынужденных турбулентных струях тепло и концентрация распространяются как пассивные примеси, а в свободновосходящих они являются причиной движения.

Для нахождения зависимости профиля вертикальной скорости от числа Прандтля в диапазоне изменения Pr от 0,2 до 2,0 система (2.4)–(2.7) решалась численно. Данные счета хорошо аппроксимируются функцией $f_3=c(Pr) \exp(-\eta^2/\Delta_1)$, где $\Delta_1(Pr)$ — эффективная толщина динамического пограничного слоя струи. На фиг. 1 представлены рассчитанные зависимости отношения характерных толщин слоев Δ_2/Δ_1 (кривая 1), где, согласно (2.7), толщина теплового слоя $\Delta_2=6/(5Pr)$, и коэффициентов a , b , c (кривые 2–4) от числа Pr .

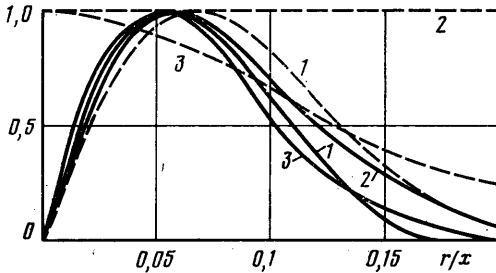
Вопрос об экспериментальном определении числа Pr для свободновосходящих турбулентных струй на основании прямых измерений пульсационных характеристик потока в настоящее время окончательно не решен.

Данные фиг. 1 позволяют найти значение турбулентного числа Pr по экспериментально найденным профилям осредненной температуры и вертикальной скорости в осесимметричной струе. Так, например, согласно опытам [7], для автомоделного участка конвективной струи над точечным источником тепла ($\alpha=0$)

$$u/u_0 = \exp(-96r^2/x^2), \quad \vartheta/\vartheta_0 = \exp(-71r^2/x^2) \quad (2.9)$$

(u_0, ϑ_0 — значения вертикальной скорости и температуры на оси), откуда $\Delta_2/\Delta_1=1,35$. Такому соотношению между эффективными толщинами теплового и динамического пограничных слоев соответствует $Pr=0,3$. При этом константа σ для принятой модели турбулентного обмена, определяемая из условия согласования температурных профилей (2.7) и (2.9), равна $\sigma=3,2 \cdot 10^{-3}$.

Рассчитанные по полуэмпирической модели [6] автомоделные профили избыточной температуры f_4/f_{40} , вертикальной f_3/f_{30} и угловой $f_2/(f_2)_{\max}$ скоростей при $Pr=0,3$, $\sigma=3,2 \cdot 10^{-3}$ представлены на фиг. 2—4 сплошными линиями. Точки на фиг. 2, 3 соответствуют экспериментам [7], а на фиг. 4 — данным [8] по измерению скорости вращения в свободно-восходящей струе.



Фиг. 5

кальной скорости $E=L^2x^2|\partial u/\partial r|$, где L — эмпирическая константа турбулентного обмена. В соответствии с (1.4) это равносильно заданию функции $f_5(\eta)$ в виде

$$f_5(\eta) = |f_5'|, \quad \eta = r/(xL^{1/2}) \quad (3.1)$$

По второй гипотезе Прандтля $E=\kappa B(u_{\max}-u_{\min})$, но так как радиус турбулентной струи $B \sim x$, а $u_{\min}=0$, то $E=\kappa x u_0$ (u_0 — значение вертикальной скорости на оси струи, κ — коэффициент обмена), чему соответствует

$$f_5 = f_3|_{\eta=0}, \quad \eta = r/(x\sqrt{\kappa}) \quad (3.2)$$

Автомоделная система уравнений (1.9) с учетом (3.1) или (3.2) решалась численно для различных чисел Pr .

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что в обеих моделях Прандтля так же, как и в гипотезе Васильченко при $Pr \approx 0,6$, имеет место подобие профилей избыточной плотности, температуры и концентрации и вертикальной скорости; при $Pr=Sc < 0,6$ тепловой (концентрационный) пограничный слой шире динамического, а при $Pr=Sc > 0,6$ — тоньше.

Профили автомоделных функций температуры, вертикальной, горизонтальной и угловой скоростей газа при $Pr=0,3$ представлены на фиг. 2—4 пунктирными линиями для первой (при $L=1,35 \cdot 10^{-2}$) и штрихпунктирными линиями — для второй (при $\kappa=1,6 \cdot 10^{-3}$) гипотез Прандтля. Расчет по любой из рассмотренных выше моделей дает хорошее согласование с измерениями [7, 8] осредненных параметров тепловых свободно-восходящих струй при $Pr=0,3$.

Следует отметить, что в связи со значительным разбросом имеющихся в литературе экспериментальных данных по осредненным параметрам свободно-восходящих струй [8—10] найденное по результатам [7] число $Pr=0,3$ не является достаточно надежным. Однако в большинстве экспери-

ментов отмечается, что в таких струях эффективный тепловой пограничный слой шире динамического, чему, согласно фиг. 1, соответствует $Pr < 0,6$.

Несмотря на хорошее согласование автомодельных профилей осредненных величин температуры, концентрации, составляющих скорости и напряжения турбулентного трения $\langle u'v' \rangle$ по каждой из рассмотренных полуэмпирических гипотез турбулентного обмена (на фиг. 5 сплошные линии 1–3 – распределение $\langle u'v' \rangle / (\langle u'v' \rangle)_{\max}$ по r/x при $Pr = 0,3$ по первой и второй моделям Прандтля и модели [6]), имеет место качественное различие профилей турбулентной вязкости $f_5(r/x) / (f_5)_{\max}$ (штриховые линии 1–3 на фиг. 5). Согласно фиг. 5, гипотеза [6] выглядит физически более оправданной, однако отсутствие экспериментальных данных по измерению величины $E = \langle -u'v' \rangle / (\partial u / \partial r)$ в свободновосходящих турбулентных струях не позволяет провести количественное сравнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б.* Предельные законы свободновосходящих конвективных потоков. – ЖЭТФ, 1937, т. 7, вып. 12, с. 1463–1465.
2. *Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В.* К теории аэродинамики, самовоспламенения и выгорания турбулентных термиков вихревых колец и струй в свободной атмосфере. – Ж. химич. физики, 1982, № 9, с. 1279–1290.
3. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смещение газовых струй. М.: Наука, 1974. 272 с.
4. *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
6. *Васильченко И. В.* К вопросу о стационарном конвективном потоке. – Тр. гл. геофиз. обсерв., 1959, вып. 93, с. 29–36.
7. *Rouse H., Yih C. S., Humphreys H. W.* Gravitational Convection from a boundary source. – Tellus, 1952, v. 4, № 3, p. 201–210.
8. *Lee Shao-Lin.* Axisymmetrical turbulent swirling natural-convection plume. Pt. 1. – J. Appl. Mech., 1966, v. 33, № 3, p. 647–653.
9. *Fukusako S., Kiya M., Arie M.* Velocity and temperature distributions in a heat turbulent vertical jet. – Geophys. Bull. Hokkaido Univ., 1969, № 54, p. 143–153.
10. *George W. K., Alpert R. L., Tamanini F.* Turbulent measurements in an axisymmetric buoyant plume. – Int. J. Heat and Mass Transfer, 1977, v. 20, № 11, p. 1145–1154.

Москва

Поступила в редакцию
15.IX.1981