

УДК 533.951:536.25

ПЕРЕГРЕВНО-КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

ГЛИНОВ А. П.

Работа посвящена изучению конвективной неустойчивости плоского слоя электропроводной среды с учетом неоднородности джоулева тепловыделения. Случай однородного объемного тепловыделения рассмотрен в [1] при различных граничных условиях. Влияние магнитного поля на конвективную неустойчивость, обусловленную однородным объемным тепловыделением, для горизонтального слоя жидкости изучалось в [2]. В [3] в качестве объемного источника тепла рассмотрено джоулево тепловыделение в электропроводной жидкости, обусловленное высокочастотным электрическим полем, параллельным плоскостям, ограничивающим горизонтальный слой. При этом электропроводность среды считалась постоянной величиной. Однако зависимость электропроводности σ от температуры T может приводить к перегревной неустойчивости [4]. Исследование конкретных задач по перегревной неустойчивости проведено, например, в [5–8]. В данной работе рассматривается влияние зависимости $\sigma(T)$ на конвективную [9, 10] неустойчивость горизонтального слоя электропроводной среды при протекании электрического тока в вертикальном направлении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоские горизонтально расположенные электроды $y = \pm L$, между которыми протекает электрический ток с плотностью тока j_0 . На электродах поддерживаются постоянные электрические потенциалы и температуры $\varphi = \pm \varphi_e$, $T = T_w$. Состояние, которое исследуется на устойчивость, стационарно $\partial/\partial t = 0$ и одномерно $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, а межэлектродная среда покоится. Предполагается, что магнитное число Рейнольдса мало, так что индуцированными магнитными полями можно пренебречь. Пренебрегается также и приэлектродными падениями потенциала, а исследование устойчивости проводится в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики. Для простоты считается, что электропроводность σ является экспоненциальной функцией температуры $\sigma = \sigma_* e^{T/T_*}$.

В указанных предположениях распределение температуры T_0 невозмущенного состояния имеет вид [5]

$$T_0 = T_m + 2T_* \ln \cos \eta \xi, \quad \sin \eta = u_0 \sqrt{\frac{\sigma(T_w)}{8\kappa T_*}}$$

$$T_m = T_w - 2T_* \ln \cos \eta, \quad \xi = \frac{y}{L} \quad (1.1)$$

где u_0 — разность потенциалов между электродами, κ — коэффициент теплопроводности.

Вольт-амперная характеристика в данном случае монотонна ($0 < \eta < \pi/2$), а разряд устойчив [5], если не учитывать возможное конвективное движение среды. Однако протекание электрического тока ведет к объемному тепловыделению (джоулево тепло $j_0^2/\sigma(T_0)$). Когда объемное тепловыделение однородно, то возникает [1–3, 9] гравитационная конвекция, если тепловыделение достаточно велико. В рассматриваемом случае $\sigma = \sigma(T)$, $j_0 = \text{const}$ и, следовательно, объемное тепловыделение неоднородно. Исследование устойчивости будем проводить в линейном приближении.

Из уравнений закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, непрерывности тока $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, потенциальности электрического поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ следует после исключения возмущений электрического поля уравнение для возмущений температуры T' и плотности тока j_v'

$$\left(\sigma_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) j_v' = j_0 \frac{d \ln \sigma_0}{dT_0} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}, \quad \sigma_0 = \sigma(T_0) \quad (1.2)$$

Уравнение теплопроводности с учетом движения среды и джоулева тепловыделения дает второе уравнение для возмущений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{j_0^2}{\kappa \sigma_0^2} \frac{d\sigma_0}{dT_0} \right) T' = - \frac{2j_0 j_v'}{\kappa \sigma_0} + \frac{1}{\chi} v_v' \frac{\partial T_0}{\partial y} \quad (1.3)$$

где $\chi = \kappa / (\rho c_p)$, v_v' — возмущение скорости.

Рассматриваются плоские возмущения $\partial/\partial z = 0$. Тогда в приближении Обербека — Буссинеска [9, 10] из уравнений неразрывности и импульсов получим

$$v_v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x' = - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \nu \Delta \Delta \psi + g \alpha \frac{\partial T'}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

Здесь ψ — функция тока, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент теплового расширения, ν — кинематическая вязкость.

Возмущения j_v' , T' , ψ ищутся в виде

$$T' = T_* \tau(\xi) \exp\left(-\frac{\lambda \nu t}{L^2} + \frac{ikx}{L}\right), \quad \psi = -i\chi \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{\lambda \nu t}{L^2} + \frac{ikx}{L}\right)$$

$$j_v' = - \frac{\sigma(T_m) \kappa T_*}{j_0 L^2} \eta^2 w(\xi) \exp\left(-\frac{\lambda \nu t}{L^2} + \frac{ikx}{L}\right)$$

Из уравнений (1.1)–(1.4) получим уравнения для амплитуд нормальных возмущений $\tau(\xi)$, $w(\xi)$, $\varphi(\xi)$

$$-\lambda \Delta_k \varphi = \Delta_k \Delta_k \varphi - R_* k \tau \quad (1.5)$$

$$\left(\cos^2 \eta \xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\cos^2 \eta \xi} \frac{d}{d\xi} - k^2 \right) w = 2k^2 \tau \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + \left(P \lambda - k^2 - \frac{2\eta^2}{\cos^2 \eta \xi} \right) \tau = \frac{2w\eta^2}{\cos^2 \eta \xi} - 2\eta k \operatorname{tg} \eta \xi \varphi(\xi) \quad (1.7)$$

$$\eta^2 = \frac{j_0^2 L^2}{2\kappa T_* \sigma(T_m)}, \quad R_* = \frac{g \alpha T_* L^3}{\nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \Delta_k = \frac{d^2}{d\xi^2} - k^2$$

Граничные условия для возмущений вытекают из условий постоянства температуры и электрического потенциала на электродах, а также из условия прилипания (твердые стенки)

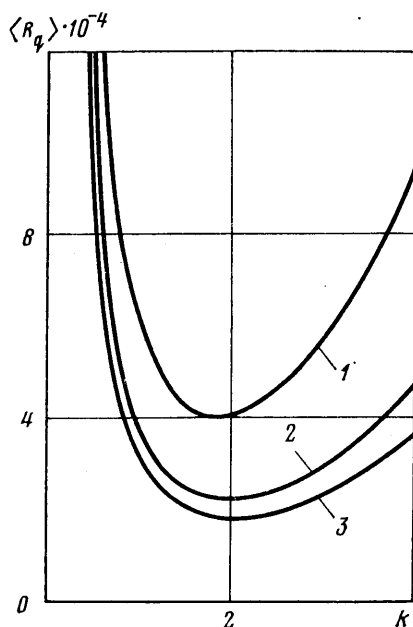
$$\tau = \frac{dw}{d\xi} = \varphi = \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \quad \xi = \pm 1 \quad (1.8)$$

Исследование устойчивости распределения тока свелось, таким образом, к решению линейной дифференциальной краевой задачи (1.5)–(1.8) на собственные значения $\lambda = \lambda(k, R_*, \eta, P)$. Особый интерес представляют нейтральные возмущения $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Они определяют кривые нейтральной устойчивости $R_* = R_*(\eta, k, P)$.

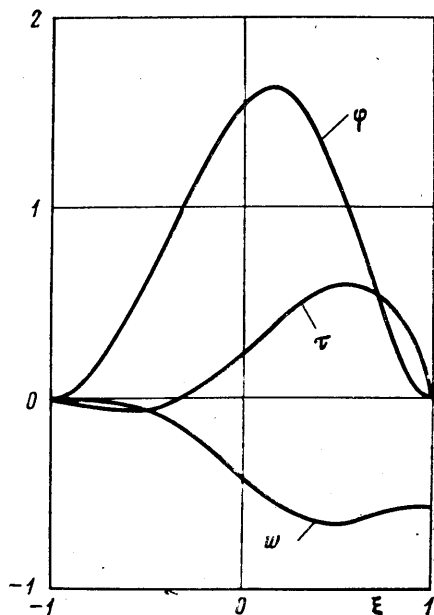
2. Анализ устойчивости. Для решения задачи (1.5)–(1.8) применяется нелинейный вариант метода дифференциальной прогонки. Этот метод успешно применялся в [11] для решения различных задач гидродинами-

ческой устойчивости. Идея метода состоит в том, что, используя дифференциальные уравнения (1.5)–(1.7) и граничные условия (1.8), находят-ся искомые функции при $\xi=+1$, затем на всем отрезке $-1 \leq \xi < 1$ вычисляются τ , φ , w как решения задачи Коши.

При исследовании конвекции, обусловленной внутренними объемными источниками тепла, принято [9] использовать число Рэлея R_q , определенное по объемному тепловыделению q : $R_q = g\alpha q (2L)^5 / (2\kappa\nu\chi)$. Если $\sigma \neq \text{const}$, то $q = q(\xi) = j_0^2 / \sigma_0 = 2\kappa T_* \eta^2 / (L^2 \cos^2 \eta \xi)$. Таким образом, $R_q = 32R_* \eta^2 / \cos^2 \eta \xi$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Проведя осреднение R_q , получим $\langle R_q \rangle = 32\eta \operatorname{tg} \eta R_*$. Случай $\sigma = \text{const}$ ($T_* = \infty$) исследовался особо, так это отвечает $\eta = 0$, $R_* = \infty$. В данном случае в качестве масштаба температуры бралась величина $T_m - T_w$, а не T_* . Соответственно в (1.5) R_* заменялась на $R_{mw} = g\alpha (T_m - T_w) L^3 / (\nu\chi)$.

Реализация численного алгоритма позволила определить кривые нейтральной устойчивости ($\operatorname{Re} \lambda = 0$) как зависимость осредненного внутреннего числа Рэлея $\langle R_q \rangle$ от волнового числа k (фиг. 1) для различных значений параметра η , характеризующего неоднородность джоулева тепловыделения q (1 — $\eta = 1.4$; 2 — 1.0; 3 — 0 ($T_* = \infty$)). При этом величина $\operatorname{Im} \lambda \approx 0$, что соответствует прежним исследованиям [1–3, 9], где полагалось, что кризис устойчивости обусловлен монотонными возмущениями.

Оказалось, что неоднородность джоулева тепловыделения ($T_* \neq \infty$, $\eta \neq 0$) оказывает стабилизирующее воздействие на возникающую конвективную неустойчивость по сравнению со случаем однородного джоулева тепловыделения ($T_* = \infty$, $\eta = 0$). Этот вывод, по-видимому, изменится для других граничных условий (например, с учетом термического сопротивления [7] электродов, где возникает неустойчивость перегревная и без учета конвекции, а также для разрядов с перпендикулярным току теплопроводности [5, 6] и для разрядов в средах с убывающей зависимостью электропроводности от температуры, так как указанные случаи способствуют развитию перегривной неустойчивости). Однако настоящее исследование ограничивается рассмотрением разряда с теплоотводом, параллельным электрическому току, изотермическими электродами и растущей зависимостью электропроводности от температуры.

Неоднородность джоулева тепловыделения способствует также некото-

рому уменьшению волнового числа $k=k_m$, соответствующего минимуму $\langle R_q \rangle = \langle R_q \rangle_m$ на нейтральной кривой $\langle R_q \rangle(k)$. Когда $\sigma = \text{const}$ ($T_* = \infty$, $\eta = 0$), то полученные значения $\langle R_q \rangle_m = 18663$, $k_m = 2,0$ (с учетом того, что k обезразмерено по величине обратной только половине межэлектродного расстояния) хорошо согласуется с прежними исследованиями [1, 2].

На фиг. 2 показаны амплитуды нормальных нейтральных ($\text{Re } \lambda = 0$) возмущений температуры τ , гидродинамической функции тока $-i\varphi$ и плотности электрического тока w в зависимости от безразмерной поперечной координаты $\xi = y/L$ для $\eta = 1,4$; $k = 1,9$. Видно, что основные возмущения температуры и плотности тока сосредоточены в верхней части межэлектродного промежутка ($\xi > 0$), соответствующей как бы «подогреву снизу», так как при $\xi = 0$ температура начального распределения максимальна.

Автор выражает благодарность А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile. — J. Fluid Mech., 1964, v. 18, № 4, p. 513–528.
2. Yu C. P., Shih Y. D. Thermal instability of an internally heated fluid layer in a magnetic field. — Phys. Fluids., 1980, v. 23, № 2, p. 411–412.
3. Лыков А. В., Берковский Б. М., Ву Зуй Куанг. Конвективная неустойчивость горизонтального слоя электропроводной жидкости в электрическом высокочастотном поле. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1, ч. 1. Минск, 1972, с. 321–330.
4. Кадомцев Б. В. Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963, с. 132–176.
5. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1979. 168 с.
6. Аргемов В. И., Руткевич И. М., Синкевич О. А. Исследование устойчивости нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы. — Теплофиз. высоких температур, 1980, т. 18, № 6, с. 1126–1136.
7. Глинов А. П. Взаимодействие потоков, обладающих различными физико-химическими свойствами, с электромагнитным полем и ограничивающими стенками. О перегревной неустойчивости электрического разряда, стабилизированного электродами. — Отчет НИИ механ. МГУ, 1980, № 2467(а), 27 с.
8. Куликовский А. Г., Регирер С. А. О влиянии стенок на перегревную неустойчивость в магнитогидродинамическом канале. — ПМТФ, 1965, № 5, с. 34–39.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
10. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
11. Гольдштик М. А., Шгери В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1981