

УДК 533.6.011.72:538.4

ОБТЕКАНИЕ НЕПРОВОДЯЩЕГО КЛИНА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ПУШКАРЬ Е. А.

Одной из наиболее простых двумерных стационарных задач магнитной гидродинамики является задача об обтекании клина. Эта задача давно уже привлекала внимание исследователей [1–4], однако она до сих пор не решена в случае магнитного поля, непараллельного скорости потока. Если магнитное поле параллельно скорости, решение строится для проводящего клина методами, аналогичными газовой динамике [5–8]. В этом случае оно состоит из одной волны с каждой стороны от клина: ударной [5, 6] или центрированной простой волны разрежения [9], в зависимости от угла наклона соответствующей грани, причем решение строится независимо для каждой щеки.

В общем случае непараллельного скорости магнитного поля решение для бесконечно проводящего клина не существует [1], но может быть построено для непроводящего. Ранее были рассмотрены: линейная постановка задачи (обтекание тонкого клина) [1]; случай перпендикулярного скорости магнитного поля: симметричное обтекание в слабом поле или со слабыми волнами [2], симметричное обтекание в нелинейном случае [4], однако вид решения (по две ударных волны с каждой стороны) задавался заранее; случай малого угла между скоростью и магнитным полем [3].

В настоящей работе численно строится плоскополяризованное автомодельное стационарное решение задачи об обтекании непроводящего клина в магнитной гидродинамике, когда магнитное поле непараллельно скорости. Исследуется зависимость вида решения от параметров течения: скорости, напряженности магнитного поля и угла между скоростью и полем ψ . Выяснено, что возможна резкая перестройка решения при критических значениях ψ , когда в потоке либо сливаются характеристики, либо появляются решения с непрерывным магнитным полем.

1. Пусть задан плоский стационарный однородный поток бесконечно проводящего идеального газа, все параметры которого постоянны, причем угол ψ между полем и скоростью не равен нулю. Выберем декартову систему координат таким образом, что ось X направлена по скорости газа, ось Y — в плоскости течения. Начало координат свяжем с ребром непроводящего клина, который находится в рассматриваемом потоке газа (фиг. 1). Клин характеризуется углами наклона θ_1 и θ_2 своих верхней и нижней граней. Выберем положительное направление отсчета θ_1 против, а θ_2 по часовой стрелке.

Исходный поток характеризуется тремя безразмерными величинами (кроме показателя адиабаты γ , который в расчетах был равен $5/3$): числом Маха $M=v_0/a_0$; числом Альфвена $N=a_A/a_0$, квадрат которого равен отношению магнитного и газодинамического давлений; углом ψ между скоростью и магнитным полем. Здесь v_0 — скорость потока, $a_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ — газодинамическая скорость звука, $a_A=H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ — модуль альфвеновской скорости, H_0 — абсолютная величина магнитного поля, p_0 — давление, ρ_0 — плотность.

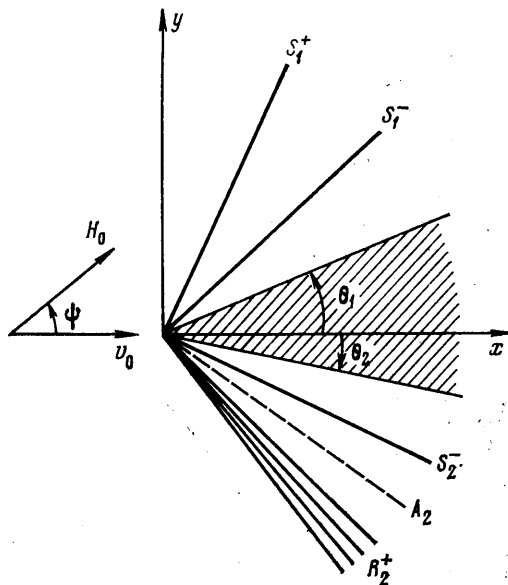
Будем предполагать, что исходный поток имеет гиперболический тип, поскольку для анализа потока квазигиперболического типа необходимо привлекать условия на бесконечности вниз по течению [10], а при эллипико-гиперболическом типе течения построить автомодельное решение

нельзя, как и в дозвуковой газовой динамике. В потоке существуют четыре магнитозвуковые характеристики (две быстрые и две медленные) и две альфвеновские, скорость по нормали к последним равна a_A .

При построении решения будем использовать рассмотренные ранее обобщенные поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений [11], которые описывают все возможные решения с верхней или нижней стороны клина в отдельности. Обобщенная поляра представляет собой область в пространстве переменных $v_x, v_y, H_x, H_y, p, \rho$, каждая точка которой определяется комбинацией из быстрой (индекс плюс) и следующей за ней медленной (индекс минус) волн (ударных S или центрированных волн разрежения R), между которыми может находиться плоскополяризованный альфвеновский разрыв A . Границы на обобщенной поляре между различными типами решений есть гиперповерхности (при проектировании на ту или иную плоскость — линии), на которых интенсивность одной из волн, определяющих решение, является предельной: нулевая интенсивность медленных волн (совпадение с характеристикой) — линия быстрых волн $S^+UR^+UR^+AU$ US^+A ; нулевая интенсивность быстрых волн — линия медленных волн $R^-US^-UAS^-UAR^-$; максимально возможные интенсивности S_*^- и R_*^+ — линия центров $S^+S_*^-UR^+S_*^-UR_*^+S^-U$ $UR_*^+R^-$. Кроме них границами могут служить линии раздела $S_c^+R^-$, $S_c^+AR^-$, $R_c^+R^-$, $R_c^+AR^-$ [11], ограничивающие решения с разными знаками радиальной компоненты \mathbf{H} в R^- и разделяющие решения с альфвеновским разрывом или без него.

Каждая точка на обобщенной поляре является функцией двух независимых переменных φ^+ и φ^- , где φ — угол наклона ударной волны к скорости потока или угол задней границы сектора центрированной волны разрежения соответственно в случае быстрой и медленной волн. Формулы для зависимости всех величин от угла наклона ударной волны приведены в [12], а системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих течение в простой волне разрежения в зависимости от φ при заданных начальных условиях, — в [11, 13]. Эти соотношения для медленных волн при решении рассматриваемой задачи были соответствующим образом перенормированы, так как для медленных волн начальные являются состоянием газа за быстрой волной. Наклон плоскополяризованного альфвеновского разрыва к скорости потока и, следовательно, его интенсивность однозначно определяются состоянием газа перед ним [12], поэтому наличие альфвеновского разрыва не вводит еще одной независимой переменной, а приводит только к вполне определенной трансформации аргумента φ^- .

На клине должны быть выполнены следующие граничные условия. Скорости на верхней и нижней гранях направлены по касательным к последним (условие непротекания $v_n=0$) или, что то же самое, угол наклона скорости равен углу наклона щеки клина. Магнитное поле на верхней и нижней щеках должно быть одинаково: $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2$. Здесь и в дальнейшем



Фиг. 1

Каждая точка на обобщенной поляре является функцией двух независимых переменных φ^+ и φ^- , где φ — угол наклона ударной волны к скорости потока или угол задней границы сектора центрированной волны разрежения соответственно в случае быстрой и медленной волн. Формулы для зависимости всех величин от угла наклона ударной волны приведены в [12], а системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих течение в простой волне разрежения в зависимости от φ при заданных начальных условиях, — в [11, 13]. Эти соотношения для медленных волн при решении рассматриваемой задачи были соответствующим образом перенормированы, так как для медленных волн начальные являются состоянием газа за быстрой волной. Наклон плоскополяризованного альфвеновского разрыва к скорости потока и, следовательно, его интенсивность однозначно определяются состоянием газа перед ним [12], поэтому наличие альфвеновского разрыва не вводит еще одной независимой переменной, а приводит только к вполне определенной трансформации аргумента φ^- .

На клине должны быть выполнены следующие граничные условия. Скорости на верхней и нижней гранях направлены по касательным к последним (условие непротекания $v_n=0$) или, что то же самое, угол наклона скорости равен углу наклона щеки клина. Магнитное поле на верхней и нижней щеках должно быть одинаково: $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2$. Здесь и в дальнейшем

индекс 1 относится к течению над верхней щекой клина, а индекс 2 — к течению под нижней щекой.

Условия равенства магнитного поля являются следствием того, что на поверхностях раздела жидкость — диэлектрик магнитное поле непрерывно. Действительно, нормальная компонента H_n непрерывна вследствие того, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, а касательная H_τ непрерывна в результате отсутствия токовых слоев в твердом теле (диэлектрике) и в жидкости (касательные напряжения невозможны в идеальной среде). Таким образом, на каждой щеке \mathbf{H} постоянно, а поскольку \mathbf{H} в диэлектрике является непрерывным решением уравнения Лапласа, то из постоянства на линии следует постоянство во всем клине, следовательно, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$. В медленных центрированных волнах возможно разрежение до вакуума. На границе с вакуумом магнитное поле непрерывно, а в вакууме $\mathbf{H} = \text{const}$, следовательно, решение строится так же, как если бы на границе с вакуумом находилась грань клина (в вакууме условие $v_n = 0$ выполнено автоматически).

Таким образом, имеем четыре граничных условия: $v_{n1} = 0$, $v_{n2} = 0$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$. Поскольку течение с каждой стороны может быть описано двумя аргументами (φ^+ и φ^-), число граничных условий совпадает с числом неизвестных — задача корректно поставлена.

2. Решить поставленную задачу — значит узнать, во-первых, комбинация каких волн дает выполнение граничных условий на клине, во-вторых, при каких интенсивностях этих волн существует решение и, в-третьих, какие свойства имеет среда на границе с клином. Поскольку вид решения неизвестен заранее, а ударные волны и стационарные простые волны разрежения описываются разными уравнениями, то в принципе заранее неизвестно, какими уравнениями пользоваться при нахождении решения для заданных углов θ_1 и θ_2 наклона верхней и нижней граней клина.

Задача решалась численно на ЭВМ следующим образом. На первом этапе методами, описанными в [11], строилась обобщенная поляра. Необходимо отметить, что в настоящем исследовании строились только «слабые» решения, а «сильные» решения с быстрыми ударными волнами большой интенсивности (их угол наклона близок к $\pi/2$), которые соответствуют «второму листу» обобщенной поляры скорости, опускались. На первом этапе рассчитывались не только границы областей с разными типами решений на обобщенной поляре, но также вся поляра покрывалась неравномерной сеткой: табулировались линии равного угла наклона скорости для верхней и нижней щеки клина (с заданным шагом по углу). На втором этапе для заданных углов θ_1 , θ_2 наклона щеки клина (равных углам наклона скорости, то есть условие $v_n = 0$ выполнено автоматически) численно находились приближенные решения задачи как пересечение на плоскости магнитного поля затабулированных на первом этапе линий $\theta_1 = C_1$ и $\theta_2 = C_2$. Полученное решение на третьем этапе уточнялось методом Ньютона, при этом тип решения в процессе уточнения мог меняться. Поскольку для каждого типа решения необходимы особые формулы для определения производных по искомым параметрам φ^+ и φ^- , эти производные определялись численно как отношения конечных разностей при заданных приращениях $\Delta\varphi^+$ и $\Delta\varphi^-$. Итерационный процесс заканчивался, когда все граничные условия выполнялись с заданной точностью.

При решении предполагалось, что $\psi \in]0, \pi/2]$, поскольку, как было замечено ранее [11–13], имеет место симметрия изменения скорости и магнитного поля в ударных и стационарных простых волнах по отношению к углу ψ , например если $\psi \in]\pi/2, \pi[$, то следует построить решение для угла $\pi - \psi$, поменять местами верхнюю и нижнюю щеки клина и заменить всюду \mathbf{H} на $-\mathbf{H}$.

При исследовании обобщенных поляр [11] было найдено, что изменение поляр скорости и магнитного поля при $N < 1$, $N = 1$ и $N > 1$ происходит качественно различными способами, поэтому исследуем эти случаи отдельно.

3. Пусть в набегающем потоке магнитное давление меньше газодинамического ($N < 1$). Зафиксируем числа Маха и Альфвена и исследуем изменение решения в зависимости от угла ψ .

Решение будем строить в плоскости θ_1 , θ_2 углов наклона верхней и нижней граней клина. Границами разных типов решений с каждой стороны будут перечисленные выше линии быстрых и медленных волн,

плюс и минус опущены, первая буква обозначает тип быстрой волны, последняя — тип медленной волны.

Тип границы легко может быть определен: для этого надо опустить совпадающие с одной из сторон решения, а в несовпадающих решениях оставить общую для обоих решений волну. Например, границей между решениями (SS/SR) и (SS/RR) является R_2^- . Если в одном из решений есть альфвеновский разрыв, а в другом его нет, то границей является линия центров или линия раздела.

а. При $\psi=90^\circ$ диаграмма решения симметрична относительно биссектрисы первого квадранта (фиг. 2, а). Границами между различными типами решений являются S_2^+ , R_2^- и S_1^+ , R_1^- . Максимальный раствор симметрично обтекаемого клина равен 31° ($\theta_1=\theta_2\approx 15,5^\circ$).

Наибольший угол отклонения потока достигается при несимметричном обтекании ($\theta_1\neq\theta_2$) и близок к 19° . Решение об обтекании симметричного клина состоит из двух ударных волн S^+S^- с каждой стороны, волны разрежения R^- появляются при положительных углах θ_1, θ_2 ($\theta_1\neq\theta_2$).

б. При уменьшении угла ψ картина обтекания теряет симметрию. Топологическая перестройка диаграммы решения происходит нелинейным образом: качественно новое решение возникает при обтекании пластинки с максимальным ненулевым углом атаки. На обобщенной поляре граница существования физического решения $\theta_1=-\theta_2$ касается линии раздела $R_{c2}^+R_2^-$ и при меньших ψ в области с решением (S^+S^-/R^+R^-) появляется решение (S^+S^-/R^+AR^-), границей которого служит $R_{c2}^+R_2^-$.

в. По мере убывания ψ линия $R_{c2}^+R_2^-$ приближается к линии R_2^- (интенсивность волны R_{c2}^- приближается к нулю). Область с решением (S^+S^-/R^+R^-) уменьшается, а область (S^+S^-/R^+AR^-) растет. Поскольку при этом линия центров приближается к границе $\theta_1=-\theta_2$, вновь нелинейно возникает новый тип диаграммы решения: вначале при $\theta_2>0$, $\theta_1=-\theta_2$ при минимальном отрицательном угле атаки возникает решение (R^+R^-/S^+AS^-), отделенное от (R^+R^-/S^+S^-) линией $S_2^+S_{*2}^-$, а затем при $\theta_1>0$, $\theta_2=-\theta_1$ в области с решением вида (S^+S^-/R^+AR^-) образуется решение (S^+S^-/R^+AS^-), границей которого является $R_2^+A_2$ при $|R_2^+|>>|R_{c2}^+|$ (знаком модуля обозначена интенсивность соответствующей волны).

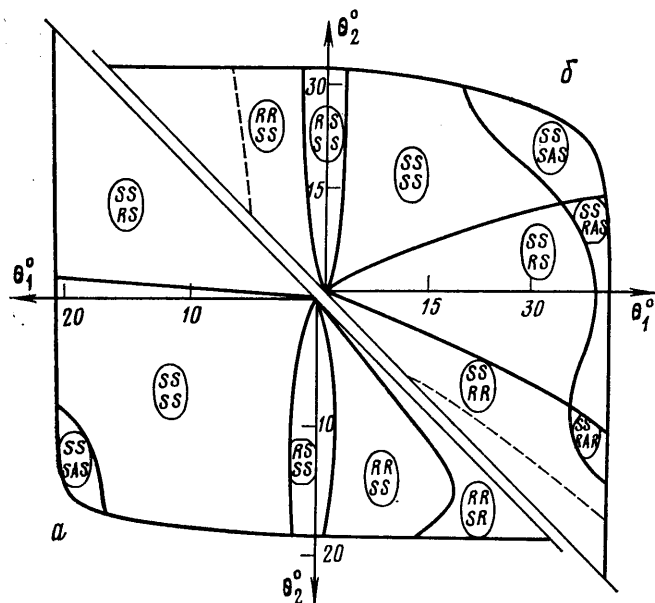
г. При $\psi=\psi_*=\arccos(N/M)$, когда с нижней стороны от клина сливаются медленная и альфвеновская характеристики (фиг. 3а), линия R_2^- сливается с $R_{c2}^+R_2^-$ ($|R_{c2}^+|=0$), область с решением (S^+S^-/R^+R^-) вырождается в линию (исчезает), границы решений (S^+S^-/R^+AR^-), (S^+S^-/R^+AS^-), (R^+R^-/S^+AS^-) — линии R_2^- , $R_2^+A_2$ и $S_2^+S_{*2}^-$ проходят через начало координат (фиг. 3, а).

д. При переходе ψ через критическое значение ψ_* возникает бифуркация диаграммы решения — «большая катастрофа» в окрестности начала координат. С нижней стороны клина становятся возможны ударные волны S_{c2}^+ , за которыми сливаются медленная и альфвеновская характеристики, скорость по нормали не равна альфвеновской. На обобщенной поляре для нижней части потока возникает тройная точка S_{c2}^+ , через которую проходят линии S_2^+ , $S_2^+A_2$, $S_2^+S_{*2}^-$ и граница раздела $S_{c2}^+R_2^-$. Эта особенность присутствует и на диаграмме θ_1, θ_2 (фиг. 4, а), вследствие чего помимо описанных выше решений $S_2^+A_2S_2^-$, $S_2^+S_2^-$, $S_2^+R_2^-$, $R_2^+A_2R_2^-$, $R_2^+A_2S_2^-$ возникают решения $S_2^+A_2R_2^-$ и $R_2^+S_2^-$, причем решения $S_2^+A_2S_2^-$, $S_2^+A_2R_2^-$, $S_2^+S_2^-$, $S_2^+R_2^-$ имеют место в двух разных областях, соприкасающихся в тройной точке S_{c2}^+ (фиг. 4, а). Необходимо отметить, что в S_{c2}^+ магнитное поле изменяется.

При уменьшении угла ψ интенсивность S_{c2}^+ растет и тройная точка на диаграмме θ_1, θ_2 удаляется от начала координат. При этом области выше линии $S_{c2}^+R_2^- \cup S_2^+S_{*2}^- \cup R_2^+S_{*2}^-$, которые существовали при $\psi>\psi_*$, уменьшаются, а области, возникшие при большой катастрофе, увеличиваются в размерах.

ется и она переходит в волну разрежения R_2^- (решение $S_2^+A_2R_2^-$). При дальнейшем увеличении θ_2 интенсивность альфвеновского разрыва убывает до нуля и возникает решение $S_2^+R_2^-$, интенсивность R_2^- убывает и волна разрежения превращается в ударную волну S_2^- , так что при достаточно больших углах θ_2 решение вновь состоит из двух ударных волн $S_2^+S_2^-$ (фиг. 4, а) вплоть до максимальных углов $\theta_1=\theta_2\approx 16^\circ$.

е. При $\psi=\psi_c=\arccos(1/M)$ происходит «малая катастрофа»: магнитное поле становится перпендикулярным быстрой характеристике под нижней щекой клина, а при $\psi<\psi_c$ ударной волне S_2^+ конечной интенсивности. Поскольку $N<1$, магнитное поле на такой быстрой волне непрерывно [12].



Фиг. 6

При $\psi=\psi_c$ линии S_1^+ и R_1^+ на диаграмме θ_1, θ_2 имеют общую касательную, а при $\psi<\psi_c$ на оси θ_2 появляется т. С, в которой магнитное поле совпадает с полем в набегающем потоке (фиг. 5, а). Через эту точку проходят линии $S_1^-UR_1^-$ и $R_1^+US_1^+$: S_1^- выходит из т. (0, 0) и приходит в т. С при $|S_1^-|=0$, ее продолжением служит R_1^- ; линия R_1^+ соединяет начало координат и т. С, имея в граничных точках $|R_1^+|=0$. Помимо границ для верхней щеки через т. С проходит S_2^+ (фиг. 5, а). Таким образом, в т. С над верхней щекой клина имеем непрерывное течение, все параметры которого совпадают с параметрами набегающего потока, а под нижней щекой имеется газодинамическая ударная волна.

Некоторые решения, например $R_2^+A_2R_2^-$, при уменьшении ψ уходят на второй лист решения через огибающую, их «вытесняют» решения, появившиеся при большой катастрофе. Обтекание симметричного клина происходит так же, как и в пункте δ , однако решение (S^+S^-/S^+R^-) имеет место вплоть до максимального угла раствора клина $\theta_1=\theta_2\approx 16^\circ$ (фиг. 5, а).

ж. При дальнейшем уменьшении угла между скоростью и магнитным полем точки С и S_{c2}^+ удаляются от начала координат. При этом области с решениями, содержащими альфвеновский разрыв, уменьшаются в размерах и отступают на второй лист. При некотором значении за огибающую уходит S_{c2}^+ , а вслед за ней и т. С (фиг. 6, а), границами решений являются линии S_1^- и R_1^+ , не имеющие общих точек, и линии $S_2^-, S_2^+S_{*2}^-$ и S_2^- . При убывании ψ вначале уходит на второй лист за огибающую граница

$S_2^+ S_{*2}^-$ (и вместе с ней решение $(S^+ S^- / S^+ A S^-)$), линия S_2^+ приближается к прямой $\theta_2 = -\theta_1$ (при $\theta_2 > 0$) и уходит из области решения. При любых углах раствора симметричного клина решение состоит из четырех ударных волн.

з. При приближении ψ к нулю возможные интенсивности медленных волн уменьшаются (в пределе медленные волны совпадают с линиями тока). При этом линия R_1^+ приближается к границе $\theta_1 = -\theta_2$ (при $\theta_2 > 0$) и уходит из области решения, а оставшиеся границы S_2^- и S_1^- при $\psi \rightarrow 0$ сливаются с осями координат, давая в пределе для $\psi = 0$ решение вида (S^+ / R^+) (при $\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$), (S^+ / S^+) (при $\theta_1 > 0, \theta_2 < 0$) или (R^+ / S^+) (при $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$).

Таким образом, можно выделить следующие основные этапы перестройки решения при уменьшении ψ (для $N < 1$): а) симметрия при $\psi = 90^\circ$; б) потеря симметрии, появление решений с альфвеновскими разрывами при ненулевых углах θ_1, θ_2 ; в) границы этих решений приближаются к т. $(0, 0)$; г) при $\psi = \psi_*$ они проходят через нее; д) при $\psi < \psi_*$ происходит большая катастрофа — диаграмма решения полностью перестраивается в окрестности начала координат (появляется тройная точка S_{c2}^+); е) при $\psi = \psi_c$ появляется т. C с непрерывным магнитным полем; ж) точки S_{c2}^+ и C удаляются от начала координат, уменьшаются области решений с альфвеновскими разрывами; з) точки S_{c2}^+ и C уходят за огибающую, решения с альфвеновскими разрывами пропадают, за границу решений уходят все линии, кроме S_1^- и S_2^- , которые стремятся к осям координат.

Необходимо отметить, что с уменьшением ψ увеличивается максимальный угол отклонения потока (до $21-22^\circ$).

4. Пусть в набегающем потоке магнитное давление больше газодинамического ($N > 1$). Исследуем изменение решения в зависимости от угла ψ при фиксированных M и N . На фиг. 2, б — в, б приведены диаграммы решений для $M=10, N=5$ при различных значениях ψ ($90, 75, 60, 57$ и 30° соответственно).

а. При $\psi = 90^\circ$ диаграмма решения симметрична относительно биссектрисы первого квадранта (фиг. 2, б). Границами решений служат линии S_1^+ и S_2^+ , а также линии (здесь и далее изображены пунктиром), на которых в волнах разрежения R^- достигается вакуум.

При обтекании симметричного клина ($\theta_1 = \theta_2$) решение одинаково с обеих сторон и состоит из двух пар ударных волн $(S^+ S^- / S^+ S^-)$. Максимальный угол полураствора клина, при котором существует решение (для $\theta_1 = \theta_2$), равен примерно 31° . Наибольший угол отклонения потока достигается при несимметричном обтекании $\theta_1 \neq \theta_2$ и близок к 37° . Волны разрежения R^- появляются при положительных углах обтекания $\theta_1 \neq \theta_2$ (фиг. 2, б).

б. При уменьшении угла ψ диаграмма решения теряет симметрию, однако вначале остается топологически эквивалентной случаю $\psi = 90^\circ$. При некотором значении $\psi < 90^\circ$ из начала координат появляется росток линии S_2^- (при $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$). Эта линия ограничивает решение вида $(S^+ R^- / R^+ S^-)$, она выходит из т. $(0, 0)$ и заканчивается на прямой $\theta_1 = -\theta_2$. Угол ее наклона в т. $(0, 0)$ уменьшается от $3\pi/4$ в момент появления до $\pi/2$, когда магнитное поле становится перпендикулярным медленной характеристике с нижней стороны клина (при $\psi = \psi_c = \arccos(1/M)$).

в. При переходе через ψ_c диаграмма решения перестраивается (малая катастрофа), магнитное поле становится перпендикулярным медленной ударной волне определенной интенсивности и непрерывно на такой волне, на полярах магнитного поля для S_2^- появляются петли [12]. Вследствие этого при $\psi < \psi_c$ становится возможным решение с магнитным полем, равным полю в набегающем потоке, и скоростью, отличной от исходной, с нижней стороны клина. С верхней стороны при этом интенсивности быстрой и медленной волн равны нулю (поскольку в любых комбинациях волн с ненулевой интенсивностью поле изменяется), т. е. над верхней

щеккой исходный поток не возмущается. На диаграмме решений θ_1, θ_2 (фиг. 3, б) появляется т. С, через которую проходят три границы решений: линия S_2^- , линия S_1^- (при $\theta_1 > 0$) и ее продолжение R_1^- (при $\theta_1 < 0$), а также линия R_1^+ (при $\theta_1 < 0$) с продолжением S_1^+ (при $\theta_1 > 0$). Точка С лежит на оси θ_2 , в ней $|R_1^+| = |S_1^+| = |S_1^-| = |R_1^-| = 0$, а $|S_2^-| \neq 0$. При уменьшении ψ она перемещается вверх по оси θ_2 .

г. По мере того как ψ уменьшается и приближается к ψ_* , при котором сливаются быстрая и альфвеновская характеристики, на обобщенной поляре для нижней части течения уменьшаются области с решениями $R_2^+ S_2^-$, $R_2^+ A_2 S_2^-$, $R_2^+ R_2^-$, $R_2^+ A_2 R_2^-$ ввиду уменьшения максимальной интенсивности волны разрежения R_{*2}^- . При $\psi = \psi_*$ указанные решения отсутствуют (области стягиваются в линию), границей между разными типами решений служит линия $S_2^- \cup S_2^+ S_{*2}^-$.

В соответствии с этим при $\psi \rightarrow \psi_*$, $\psi > \psi_*$ перестраивается диаграмма решений задачи о клине. В области с решением $(R^+ R^- / R^+ S^-)$ появляется решение $(R^+ R^- / R^+ A S^-)$, ограниченное линией $R_{*2}^+ S_2^- \cup R_2^+ S_{*2}^-$. Это решение возникает нелинейным образом на прямой $\theta_2 = -\theta_1$ (при $\theta_1 < 0$), его граница выходит не из начала координат, а начинается и заканчивается на линии $\theta_1 = -\theta_2$ при $\theta_1 < 0$. При уменьшении ψ при отходе этой границы от $\theta_1 = -\theta_2$ появляется граница $A_2 S_2^-$ и область с решением $S_2^+ A_2 S_2^-$ на нижней щеке клина.

д. При $\psi \rightarrow \psi_*$ области на обобщенной поляре с решениями $R_2^+ S_2^-$, $R_2^+ A_2 S_2^-$ и их образы на диаграмме θ_1, θ_2 стягиваются к линии S_2^- , так же как и их границы $R_{*2}^+ S_2^- \cup R_2^+ S_{*2}^-$ и $A_2 S_2^-$. В предельном положении при $\psi = \psi_*$ во всей области левее линии S_2^- , которая заканчивается при максимуме $|S_{*2}^-|$ в т. С, и ниже линии $S_2^+ S_{*2}^-$, являющейся продолжением S_2^- , имеется решение $S_2^+ A_2 S_2^-$ (фиг. 4, б).

е. Переход ψ через значение $\psi_* = \arccos N/M$ приводит к катастрофе построенного на фиг. 4б решения. При ψ , удовлетворяющих условиям

$$\arccos \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{N^2}{M^2} - \frac{2}{(\gamma-1)M^2}} < \psi < \arccos \frac{N}{M} \quad (4.1)$$

на нижней стороне клина становятся возможны включающие волны S_{*2}^+ , магнитное поле перед которыми перпендикулярно фронту скачка, а за ним — наклонно к нему. Скорость по нормали за S_{*2}^+ равна альфвеновской, в силу чего S_{*2}^+ сливается с альфвеновским разрывом и комбинации S_{*2}^+ или $S_{*2}^+ A$ внешне неотличимы друг от друга, поле и скорость за такими решениями связаны через поворот на 180° около нормали к скачку в определенной системе координат.

Непрерывное магнитное поле дают комбинации $S_{*2}^+ S_{*2}^- = S_{*2}^+ A_2 S_{*2}^-$: в быстрой ударной волне S_{*2}^+ происходит «включение» касательной компоненты поля, в альфвеновском разрыве ее поворот, а в S_{*2}^- — выключение поля, так что в сумме \mathbf{H} непрерывно. Следует отметить, что в этих комбинациях S_{*2}^- сливается с S_{*2}^+ (или $S_{*2}^+ A_2$), так как скорость по нормали перед S_{*2}^- равна альфвеновской и совпадает с нормальной скоростью за S_{*2}^+ (или $S_{*2}^+ A_2$).

Как было указано в [11], при переходе через ψ_* линия $R^- \cup S^-$ на обобщенной поляре распадается на три: $R^- \cup S^- \cup A S^- \cup A R^-$, $S_{*2}^+ R^- \cup S_{*2}^+ S^- \cup S_{*2}^+ A S^- \cup S_{*2}^+ A R^-$ и $S^+ S_{*2}^- \cup R^+ S_{*2}^- \cup R_{*2}^+ S^- \cup R_{*2}^+ R^-$, последняя из этих линий при $|S^+| < |S_{*2}^+|$, ее продолжением служит $S^+ S_{*2}^-$ при $|S^+| > |S_{*2}^+|$. Кроме этих границ имеется линия быстрых волн.

В соответствии с этим катастрофа диаграммы решения, построенного на фиг. 4б, выглядит следующим образом (фиг. 5б). Линия S_2^- отходит от т. С и расщепляется на $A_2 S_2^-$, $R_2^+ S_{*2}^- \cup R_{*2}^+ S_2^-$, между S_2^- и этими границами появляются решения $R_2^+ S_2^-$ и $R_2^+ A_2 S_2^-$ (фиг. 5б). Через т. С (комбинация $S_{*2}^+ S_{*2}^-$) проходят линии $S_2^+ S_{*2}^-$ и $S_{*2}^+ A_2 S_2^-$, которые разделяют решения $S_2^+ S_2^-$ и $S_2^+ A_2 S_2^-$. В IV квадранте появляются области с ре-

шениями (S^+S^-/R^+R^-) и (S^+S^-/R^+AR^-), а ниже линии $S_2^+A_2^-$ — решение (S^+S^-/S^+AR^-), которое при достаточно больших интенсивностях R_2^- дает вакуум. Необходимо отметить, что при переходе через ψ катастрофа происходит очень резко: уже при $\psi_* - \psi \sim 1^\circ$ границы решений сильно отличаются от случая $\psi = \psi_*$.

Обтекание симметричного клина $\theta_1 = \theta_2$ реализуется в двух ударных волнах $S_1^+S_1^-$ с верхней стороны при всех углах θ_1 , для которых решение существует, а с нижней стороны при небольших θ_2 решение имеет вид $R_2^+S_2^-$, при больших θ_2 от волны разрежения R_2^+ отщепляется альфвеновский разрыв и возникает решение $R_2^+A_2S_2^-$, после чего волна разрежения R_2^+ превращается в ударную волну S_2^+ (решение $S_2^+A_2S_2^-$), по мере увеличения θ_2 интенсивность альфвеновского разрыва уменьшается и при достаточно больших углах обтекания решение состоит только из ударных волн $S_2^+S_2^-$ (фиг. 5б) вплоть до максимальных углов $\theta_1 = \theta_2 \approx 31^\circ$.

ж. При дальнейшем уменьшении ψ изменение диаграммы решения происходит без катастроф. Точка C поднимается по оси θ_2 , области с решениями $R_2^+S_2^-$, $R_2^+A_2S_2^-$, $R_2^+R_2^-$, $R_2^+A_2R_2^-$ увеличиваются, а решения $S_2^+A_2S_2^-$ и $S_2^+A_2R_2^-$ уходят за огибающую. При некотором значении ψ уходит т. C и границами разных типов решений с верхней стороны клина служат линии S_1^- и R_1^+ , выходящие из т. $(0, 0)$ (фиг. 6б), решения с альфвеновскими разрывами для нижней щеки клина возможны при достаточно больших θ_1 . Обтекание симметричного клина осуществляется в двух ударных волнах с каждой стороны (S^+S^-/S^+S^-) и лишь при значении угла полураствора, близком к предельному значению ($\sim 28^\circ$), в решении для нижней щеки присутствует альфвеновский разрыв (фиг. 6б).

з. По мере того как ψ стремится к нулю, линия центров приближается к огибающей и вытесняет с диаграммы решения, содержащие альфвеновские разрывы. Границы S_1^- и S_2^- приближаются к осям θ_2 и θ_1 соответственно (медленные волны стремятся к линиям тока). Границы R_1^+ и R_2^+ и линии вакуума уходят с диаграммы через прямую $\theta_1 = -\theta_2$, так что в пределе при $\psi = 0$ имеем решения (S^+/S^+), (R^+/S^+), (S^+/R^+) в I, II и IV квадрантах соответственно.

Таким образом, имеют место следующие основные этапы перестройки решения по мере уменьшения ψ при $N > 1$. После потери симметрии, существующей при $\psi = 90^\circ$, происходит малая катастрофа диаграммы решений при $\psi = \psi_c$ за счет появления решения с непрерывным магнитным полем (т. C). Формируются альфвеновские разрывы и при $\psi = \psi_*$ имеет место большая катастрофа, связанная с возникновением в потоке включающих ударных волн. Магнитное поле непрерывно в комбинации $S_{*2}^+S_{*2}^-$. Затем т. C и решения с альфвеновскими разрывами уходят за огибающую.

Такая перестройка решения происходит при $N^2 \in](2 + (\gamma - 1)M^2)/(\gamma + 1); M^2[$ (при $N > M$ течение не является гиперболическим). Если же $N^2 \in]1; (2 + (\gamma - 1)M^2)/(\gamma + 1)[$, то после большой катастрофы при нарушении условия (4.1) (если т. C не ушла за огибающую) включающие волны становятся невозможны и решение $S_{*2}^+S_{*2}^-$ раздваивается на S_2^+ с непрерывным магнитным полем (т. C) и тройную точку S_{c2}^+ . Дальнейшая перестройка диаграммы происходит, как при $N < 1$.

5. Случай равного магнитного и газодинамического давлений ($N = 1$) является промежуточным между описанными выше. После симметричной диаграммы при $\psi = 90^\circ$ при уменьшении ψ линия R_2^- , разделяющая решения (S^+S^-/S^+R^-) и (S^+S^-/R^+R^-), приближается к прямой $\theta_1 = -\theta_2$ и при $\psi = \psi_* = \arccos(1/M)$ исчезает полностью. При переходе через ψ_* на диаграмме одновременно возникают не совпадающие между собой тройная точка S_{c2}^+ и т. C с непрерывным магнитным полем, т. е. большая и малая катастрофы происходят одновременно. В отличие от фиг. 4а и 5а линия быстрых волн не заканчивается на прямой $\theta_1 = -\theta_2$, а входит в начало координат, вследствие чего дополнительно возможны решения (S^+S^-/R^+R^-). Таким образом, при катастрофе в начале координат образуются области решений, содержащие с нижней стороны клина альфвеновский разрыв. Эти области сразу же

отслаиваются от начала координат и в его окрестности появляются решения без альфреновских разрывов. Дальнейшее изменение решения происходит аналогично п. 3, ж и з.

Проведенное исследование выявило основные особенности перестройки диаграммы решения задачи об обтекании клина, которая, как оказалось, может происходить в виде: катастроф двух типов — большой, возникающей при слиянии характеристик, или малой при образовании решения с непрерывным магнитным полем; нелинейной перестройки — возникновения новых типов решений при больших углах обтекания клина; непрерывного изменения решения и постепенного исчезновения за границей существования некоторых типов решений. Найдено, что при углах ψ , близких к ψ_* , обтекание симметричного клина осуществляется в комбинациях волн, качественно различных для верхней и нижней щек и существенно зависящих от угла раствора клина.

Построенное решение может быть использовано при исследовании явлений, происходящих в каналах МГД-генераторов, плазменных ускорителей, а также при рассмотрении различных квазистационарных астрофизических процессов. В частности, оно может быть использовано при качественном исследовании обтекания магнитосферы Земли.

Автор благодарит Бармина А. А. и Куликовского А. Г. за постоянное внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chu C. K., Lynn Y. M.* Steady magnetohydrodynamic flow past a nonconducting wedge.— *AIAA Journal*, 1963, v. 1, № 5, p. 1062–1067. (Рус. перев.: Чу, Лин. Установившееся магнитогазодинамическое течение около непроводящего клина.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1963, т. 1, № 5, с. 47–53).
2. *Mimura Y.* Magnetohydrodynamic flow past a wedge with a perpendicular magnetic field.— *AIAA Journal*, 1963, v. 1, № 10, p. 2272–2279. (Рус. перев.: Мимура. Обтекание клина магнитогазодинамическим потоком при наличии перпендикулярного магнитного поля.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1963, т. 1, № 10, с. 40–49).
3. *Pack D. C., Swan G. W.* Magneto-gasdynamics flow over a wedge.— *J. Fluid Mech.*, 1966, v. 25, № 1, p. 165–178.
4. *Lévy T.* Ecoulement magnétodynamique stationnaire autour d'un dièdre non conducteur dans le cas de champs croisés.— *J. Mécanique*, 1968, v. 7, № 4, p. 583–597.
5. *Cabannes H.* Dynamique de gas ionisés: détermination des chocs stationnaires attachés à la pointe d'un dièdre.— *Recherche Aéronautique*, 1959, № 71, p. 3–9.
6. *Cabannes H.* Attached stationary shock waves in ionized gases.— *Revs Mod. Phys.*, 1960, v. 32, № 4, p. 973–976.
7. *Еркаев Н. В., Пивоваров В. Г.* Обтекание клина проводящим газом при наличии магнитного поля. Случай присоединенной ударной волны.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 5, № 2. Новосибирск, 1974, с. 7–19.
8. *Natter M.* Maximale Strömungsumlenkung beim magnetohydrodynamischen Verdichtungsstoß.— *Ingr-Arch.*, 1974, B. 43, № 6, S. 359–370.
9. *Любимов Г. А.* Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 733–735.
10. *Бармин А. А., Куликовский А. Г.* О плоских стационарных течениях с ионизирующими ударными волнами в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5, с. 62–66.
11. *Пушкарь Е. А.* Обобщенные поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений в магнитной гидродинамике.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3, с. 111–119.
12. *Пушкарь Е. А.* О косых магнитогазодинамических ударных волнах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4, с. 106–116.
13. *Пушкарь Е. А.* Простые стационарные волны в наклонном магнитном поле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 130–138.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1982