

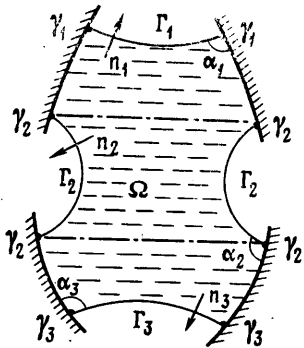
УДК 532.5.013

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

СЛОБОЖАНИН Л. А.

Изучается устойчивость состояния равновесия жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытых системах. Особенность задачи по сравнению со случаем связной поверхности демонстрируется решением двух пространственных задач. Предлагается метод исследования устойчивости при наличии осевой симметрии для каждой из компонент связности равновесной поверхности. Этот метод применяется при изучении устойчивости равновесия в условиях невесомости и при действии поля сил тяжести.

**1. Постановка и математическая формулировка задачи.** Пусть жидкость, обладающая поверхностным натяжением, частично заполняет сосуд и в равновесном состоянии занимает область  $\Omega$ , которая является связной. Свободную равновесную поверхность  $\Gamma$  будем считать несвязной, состоящей из  $m > 1$  компонент связности  $\Gamma_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Предполагается, что система является открытой, т. е. что области, занятые газом, сообщаются между собой или с безграничным пространством (фиг. 1). Пусть массовые силы не зависят от формы  $\Omega$  и имеют потенциал с объемной плотностью  $\rho\Pi(x)$  ( $\rho$  — плотность жидкости). Коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma_i$  обозначим через  $\sigma_i$ , а угол смачивания на линии  $\gamma_i$  пересечения  $\Gamma_i$  со стенкой сосуда (эта линия может быть и несвязной) — через  $\alpha_i$ . Если газ над всеми  $\Gamma_i$  одинаков, то  $\sigma_i = \sigma$  и (при естественном предположении об однородности материала сосуда)  $\alpha_i = \alpha$ .



Фиг. 1

Будем считать, что задача равновесия [1] решена, форма поверхности  $\Gamma$  известна и требуется решить вопрос о ее устойчивости. Математически это сводится [1] к определению знака минимального значения второй вариации потенциальной энергии при условии (1.2) сохранения объема жидкости

$$\delta^2 U = \sum_{i=1}^m \sigma_i \left\{ \int_{\Gamma_i} [a_i N_i^2 + \nabla(N_i, N_i)] d\Gamma + \int_{\gamma_i} \chi_i N_i^2 d\gamma \right\} \quad (1.1)$$

$$a_i = \frac{\rho}{\sigma_i} \frac{\partial \Pi}{\partial n_i} - k_{1i}^2 - k_{2i}^2, \quad \chi_i = \frac{k_i \cos \alpha_i - k_i^0}{\sin \alpha_i}$$

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} N_i d\Gamma = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $N_i = (\mathbf{n}_i \cdot \delta \mathbf{x})$  — нормальная составляющая возмущения  $\delta \mathbf{x}$  поверхности  $\Gamma_i$ ;  $\mathbf{n}_i$  — единичный вектор нормали к  $\Gamma_i$ , внешний по отношению

к области  $\Omega$ ;  $k_{1i}, k_{2i}$  — кривизны главных нормальных сечений поверхности  $\Gamma_i$ ;  $\nabla(N, N)$  — первый дифференциальный параметр Бельтрами;  $k_i, k_i^\circ$  — кривизны нормальных к  $\gamma_i$  сечений поверхности  $\Gamma_i$  и стенки сосуда ( $k_i > 0$  и  $k_i < 0$ , если соответствующие сечения выпуклы в сторону  $\Omega$ ).  
 Минимум функционала (1.1) при условии (1.2) и нормировке

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} N_i^2 d\Gamma = 1 \quad (1.3)$$

совпадает с наименьшим собственным значением  $\lambda = \lambda_*$  задачи

$$\begin{aligned} -\Delta N_i + a_i N_i + \mu &= \lambda N_i \quad (x \in \Gamma_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial e_i} + \chi_i N_i &= 0 \quad (x \in \gamma_i) \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (1.4)$$

дополненной условием (1.2). Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа — Бельтрами;  $e_i$  — вектор нормали к  $\gamma_i$ , расположенный в касательной к  $\Gamma_i$  плоскости и направленный из  $\Gamma_i$ ;  $\mu$  — общая для всех  $i$  постоянная, для определения которой имеется условие (1.2).

Таким образом, заключаем: если  $\lambda_* > 0$ , то равновесие устойчиво, если  $\lambda_* < 0$  — неустойчиво.

В аналогичной постановке задача рассматривалась в [2]. Предложенный там метод решения в общем случае сводится к нахождению системы собственных значений  $\kappa_{ij}$  и собственных функций  $f_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ;  $j=1, 2, \dots$ ) для «расщепленных» задач вида (1.4), в которых  $\mu=0$  (а условие (1.2) отсутствует). После этого вопрос об устойчивости сводится к определению знака наименьшего из корней  $\lambda$  уравнения

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_{\Gamma_i} f_{ij} d\Gamma \right)^2 (\kappa_{ij} - \lambda)^{-1} = 0$$

Таким образом решались две конкретные задачи об устойчивости осесимметричных поверхностей при  $m=2$  [2, 3]. Об одной из них будет идти речь в п. 7.

Покажем, как изменится формулировка задачи при равновесии несмещающихся жидкостей. Снова будем считать область  $\Omega = \bigcup_{j=1}^l \Omega_j$ , заня-

тую  $l$ -жидкостями, связанной (это предположение несущественно, так как при несвязной  $\Omega$  следует рассматривать задачу устойчивости отдельно для каждой связанной подобласти). Тогда в задачах, аналогичных (1.4), будет фигурировать  $l$  постоянных  $\mu_j$  ( $j=1, 2, \dots, l$ ). Причем в уравнение на поверхности раздела  $p$ -той и  $q$ -той жидкостей входит сумма или разность  $\mu_p$  и  $\mu_q$ , а в уравнение на свободной поверхности  $k$ -той жидкости — значение  $\mu_k$ . Постоянные  $\mu_j$  находятся из  $l$  уравнений вида (1.2), следующих из условия сохранения объема каждой жидкости. В частности, если газовая область граничит лишь с одной из жидкостей или вовсе отсутствует, то задача расщепляется на систему задач об устойчивости для каждой равновесной поверхности  $\Gamma_i$  (поверхности раздела или свободной поверхности). Эти задачи имеют такой же вид, как и изучавшиеся ранее (см. [1]) задачи об устойчивости связанных ( $m=1$ ) равновесных поверхностей: в уравнение (1.4) на  $\Gamma_i$  входит постоянная  $\mu_i$ , для определения которой используется условие

$$\int_{\Gamma_i} N_i d\Gamma = 0 \quad (1.5)$$

**2. Аналог задачи Максвелла.** Основное отличие задач устойчивости для  $m=1$  и  $m>1$  содержится в условиях сохранения объема жидкости, определяющих класс допустимых возмущений. Если при  $m=1$  ( $\Gamma=\Gamma_i$ )

допустимы только «возмущения нулевого объема», удовлетворяющие условию (1.5)  $i=1$ , то при  $m>1$  в окрестности каждой поверхности  $\Gamma_i$  допустимы и возмущения ненулевого объема (т. е. необязательно выполнение условий (1.5)) — главное, чтобы соблюдалось условие (1.2). Следовательно, класс допустимых возмущений на каждой поверхности  $\Gamma_i$  шире, чем в случае, если бы  $\Gamma_i$  была единственной компонентой связности. Поэтому задача устойчивости при  $m>1$  в общем случае не сводится к задаче устойчивости при  $m=1$ .

Для иллюстрации этой особенности рассмотрим следующую задачу. Пусть на «решете», представляющем собой горизонтальную пластину с  $m$  одинаковыми прямоугольными отверстиями размера  $l_1 \times l_2$ , находится жидкость; ее равновесная свободная поверхность состоит из  $m$  горизонтальных плоских участков, опирающихся на кромки отверстий. Тогда задача (1.4), (1.2) принимает вид

$$-\frac{\partial^2 N_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial y_i^2} + \mu = (\lambda + b)N_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$N_i|_{x_i=0} = N_i|_{x_i=l_1} = N_i|_{y_i=0} = N_i|_{y_i=l_2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^m \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} N_i dx_i dy_i = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $b = \rho g / \sigma$ ;  $g$  — ускорение сил тяжести;  $x_i, y_i$  — декартовы координаты с началом в одном из углов  $i$ -того отверстия.

После разделения переменных из (2.1) получим

$$N_i = A_{pq}^{(i)} \sin(p\pi x_i / l_1) \sin(q\pi y_i / l_2), \quad \mu = 0$$

$$\lambda = (p\pi / l_1)^2 + (q\pi / l_2)^2 - b \quad (p, q = 1, 2, \dots)$$

Если  $m=1$ , то для выполнения (2.2)  $p$  либо  $q$  должно быть четным. При  $l_1 \geq l_2$  величина  $\lambda$  минимальна, когда  $p=2, q=1$ . Приравнявая ее нулю, приходим к известному решению Максвелла [4], согласно которому критическое значение

$$b_* = \pi^2 (4l_1^{-2} + l_2^{-2}) \quad (l_1 \geq l_2)$$

Если  $m>1$ , то условие (2.2) можно всегда удовлетворить за счет подбора коэффициентов  $A_{pq}^{(i)}$  и опасными становятся возмущения, отвечающие  $p=q=1$ . Критическое значение  $b_* = \pi^2 (l_1^{-2} + l_2^{-2})$  здесь меньше предыдущего.

**3. Цилиндрические сосуды.** Рассмотрим еще одну пространственную задачу. Пусть сосуд в окрестностях линий смачивания  $\gamma_i$  имеет цилиндрическую форму (не обязательно кругового поперечного сечения), а гравитационное поле, направленное противоположно оси  $z$ , параллельно образующим этих цилиндров. Метод исследования устойчивости такого состояния равновесия основан на анализе второй вариации потенциальной энергии относительно  $\delta z_i$  — вертикальных составляющих возмущения поверхностей  $\Gamma_i$ . Следуя [1, с. 158], получим

$$\delta^2 U[z_i, \delta z_i] = \sum_{i=1}^m \sigma_i \int_{\Gamma_i'} \left\{ b_i (\delta z_i)^2 + \frac{(\nabla \delta z_i)^2}{[1 + (\nabla z_i)^2]^{3/2}} - \frac{(\nabla z_i \cdot \nabla \delta z_i)^2}{[1 + (\nabla z_i)^2]^2} \right\} d\Gamma_i'$$

Здесь  $\Gamma_i'$  — проекция  $\Gamma_i$  на плоскость  $(x, y)$ ;  $z = z_i(x, y)$  — уравнение поверхности  $\Gamma_i$ ;  $b_i = \rho \epsilon_i g / \sigma$ ;  $g = 981$  см/с<sup>2</sup>;  $\epsilon_i$  — коэффициент перегрузки, положительный, если жидкость находится ниже (по отношению к направлению оси  $z$ ) поверхности  $\Gamma_i$ , и отрицательный — в противном случае.

Представим возмущения в виде  $\delta z_i = c_i + \delta z_i^\circ$ , где  $c_i = \text{const}$  — возмуще-

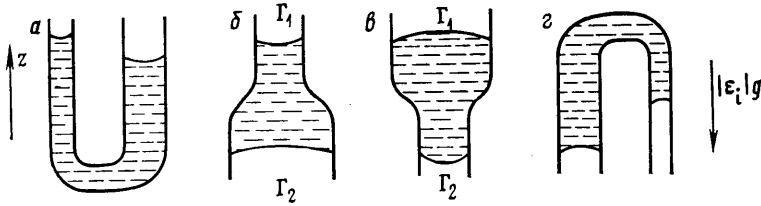
ния сдвига, а  $\delta z_i^\circ$  — возмущения нулевого объема, для которых

$$\int_{\Gamma_i'} \delta z_i^\circ d\Gamma_i' = 0$$

Тогда вторая вариация представляется в виде суммы вторых вариаций для каждого вида возмущений

$$\delta^2 U[z_i, \delta z_i] = \rho g \sum_{i=1}^m \varepsilon_i c_i^2 |\Gamma_i'| + \delta^2 U[z_i, \delta z_i^\circ] \quad (3.1)$$

причем для возмущений сдвига она зависит только от сил тяжести и не



Фиг. 2

зависит от поверхностных сил (здесь  $|\Gamma_i'|$  — площадь  $\Gamma_i'$ ). Возмущения сдвига должны удовлетворять условию сохранения объема жидкости

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i c_i |\Gamma_i'| = 0 \quad (3.2)$$

Пусть  $m=2$ . Тогда из (3.1), (3.2) получим, что для возмущений сдвига

$$\delta^2 U[z_i, c_i] = \rho g c_i^2 |\Gamma_i'| \varepsilon_i \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1 |\Gamma_1'|}{\varepsilon_2 |\Gamma_2'|} \right\}$$

Отсюда видно, что при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$  (фиг. 2, а) или  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$ ,  $|\Gamma_1'| < |\Gamma_2'|$  (фиг. 2, б) имеет место устойчивость, а при  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$ ,  $|\Gamma_1'| > |\Gamma_2'|$  (фиг. 2, в) или  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0$  (фиг. 2, г) — неустойчивость относительно возмущений сдвига. (Если  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$ ,  $|\Gamma_1'| = |\Gamma_2'|$  или  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , то относительно этих возмущений имеем состояние безразличного равновесия.) Чтобы сделать окончательное заключение об устойчивости, необходимо в случаях а, б проанализировать и возмущения вида  $\delta z_i^\circ$ . Относительно них равновесные поверхности  $\Gamma_i$ , для которых  $\varepsilon_i > 0$ , устойчивы [1]. Поэтому в случае а равновесие устойчиво, а в случае б все зависит от того, устойчива ли поверхность  $\Gamma_2$  относительно возмущений  $\delta z_2^\circ$ . В частности, если  $\Gamma_2$  опирается на стенки кругового цилиндра, то ответ на этот вопрос известен [1, 5].

Эти результаты можно обобщить на случай  $m > 2$ . В частности, если все  $\varepsilon_i > 0$ , то получим устойчивость, а если хотя бы два из коэффициентов  $\varepsilon_i$  отрицательны — неустойчивость. Равновесие неустойчиво и в случае, когда только для одной поверхности  $\Gamma_k$  имеем  $\varepsilon_k < 0$ , но найдется  $\Gamma_j$  ( $\varepsilon_j > 0$ ), такая, что  $|\Gamma_j'| > |\Gamma_k'|$ .

**4. Осесимметричная задача.** Перейдем к рассмотрению задачи устойчивости в том случае, когда поверхности  $\Gamma_i$  осесимметричны. Введем в окрестности каждой  $\Gamma_i$  цилиндрические координаты  $(r_i, \theta_i, z_i)$ , а на самой  $\Gamma_i$  — криволинейные координаты  $(s_i, \theta_i)$ , где  $s_i$  — длина дуги осевого сечения поверхности  $\Gamma_i$  полуплоскостью  $\theta_i = \text{const}$ . Уравнения  $r_i = r_i(s_i)$ ,  $z_i = z_i(s_i)$  поверхностей  $\Gamma_i$  известны.

После разложения возмущений в ряд Фурье

$$N_i(s_i, \theta_i) = \varphi_i(s_i) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{in}(s_i) \cos n\theta_i + \psi_{in}(s_i) \sin n\theta_i]$$

задача (1.4), (1.2) расщепляется на последовательность одномерных краевых задач относительно нулевой и ненулевых гармоник (иначе, относительно осесимметричных и неосесимметричных возмущений соответственно)

$$-\varphi_i'' - \frac{r_i'}{r_i} \varphi_i' + a_i(s_i) \varphi_i + \mu = \lambda \varphi_i \quad (s_{i0} \leq s_i \leq s_{i1}, \quad ' = \frac{d}{ds_i}) \quad (4.1)$$

$$-\varphi_i'(s_{i0}) + \chi_{i0} \varphi_i(s_{i0}) = 0, \quad \varphi_i'(s_{i1}) + \chi_{i1} \varphi_i(s_{i1}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \int_{s_{i0}}^{s_{i1}} r_i \varphi_i ds_i = 0 \quad (4.3)$$

$$-\varphi_n'' - \frac{r_i'}{r_i} \varphi_{in}' + \left[ a_i(s_i) + \frac{n^2}{r_i^2} \right] \varphi_{in} = \lambda \varphi_{in} \quad (s_{i0} \leq s_i \leq s_{i1}, \quad n=1, 2, \dots)$$

$$-\varphi_{in}'(s_{i0}) + \chi_{i0} \varphi_{in}(s_{i0}) = 0, \quad \varphi_{in}'(s_{i1}) + \chi_{i1} \varphi_{in}(s_{i1}) = 0 \quad (4.4)$$

$$(\chi_{i0} = \chi_i|_{s_i=s_{i0}}, \quad \chi_{i1} = \chi_i|_{s_i=s_{i1}})$$

(задачи для  $\psi_{in}$  имеют такой же вид, как (4.4)). Здесь  $s_{i0}$ ,  $s_{i1}$  — концы осевого сечения поверхности  $\Gamma_i$ .

Каждую из связанных осесимметричных поверхностей  $\Gamma_i$  в свою очередь будем называть односвязной, если она пересекает ось симметрии, или двусвязной, если такого пересечения нет. Для односвязной поверхности краевое условие в начальной точке  $s_{i0}=0$  заменяется на требование ограниченности решения.

Так как для возмущений, отвечающих  $n \geq 1$ , условие сохранения объема выполняется автоматически, то задачи (4.4) совпадают с соответствующими задачами в случае  $m=1$ , т. е. как если бы каждая  $\Gamma_i$  являлась единственной компонентой связности свободной поверхности. Но такие задачи хорошо изучены [1]. Поэтому в дальнейшем основное внимание будем уделять задаче (4.1)–(4.3), хотя при окончательном выводе об устойчивости, конечно, следует учитывать и результаты, отвечающие неосесимметричным возмущениям.

Наряду с задачами (4.1)–(4.3) будем рассматривать задачу с измененными краевыми условиями — условиями закрепления. Для двусвязной и односвязной  $\Gamma_i$  эти условия имеют соответственно вид

$$\varphi_i(s_{i0}) = \varphi_i(s_{i1}) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_i'(s_{i1}) = 0 \quad (4.5)$$

К такой задаче приходим, когда все  $\chi_i = \infty$  (например, когда все линии  $\gamma_i$  проходят по краям сосуда). Собственные значения задачи (4.1), (4.5), (4.3) будем обозначать через  $\nu$ .

**5. Свойства собственных значений.** Зависимость  $\lambda_*$  от параметров пространственной задачи о равновесии связной свободной поверхности была изучена в [1]. Не повторяя свойств, общих для связанных и несвязных поверхностей, отметим одно важное отличие. Известно, что при фиксированных оценках функций  $a_i(\cdot)$  и  $\chi_i(\cdot)$  снизу и при бесконечном равномерном уменьшении размеров связной поверхности  $\Gamma \equiv \Gamma_i$  будет  $\lambda_* \rightarrow \infty$ . Это объясняется тем, что из-за условия (1.2) для  $m=1$  величина  $\nabla(N_i, N_i) \neq 0$ , так что при равномерном уменьшении линейных размеров  $\Gamma_i$  в  $l$  раз отдельные слагаемые в правой части (1.1) вследствие (1.3) становятся соответственно величинами порядка  $l^0$ ,  $l^2$  и  $l$ . Поэтому при  $l \rightarrow \infty$  доминирую-

щим становится заведомо положительное слагаемое

$$\sigma_i \int_{\Gamma_i} \nabla(N_i, N_i) d\Gamma$$

Для несвязной поверхности ( $m > 1$ ) это не так. Здесь допустимы возмущения  $N_i$ , такие, что  $\nabla(N_i, N_i) = 0$  на всех  $\Gamma_i$ . Эти возмущения становятся самыми опасными, начиная с некоторых достаточно малых размеров  $\Gamma_i$ . Поэтому, рассуждая аналогично предыдущему, получим, что при дальнейшем уменьшении  $\Gamma_i$  преобладающими в (1.1) становятся интегралы по  $\gamma_i$ . Теперь можно утверждать, что при равномерном уменьшении всех  $\Gamma_i$  будет  $\lambda_* \rightarrow \infty$ , если  $\min_{i \in \Gamma_i} \min_{x \in \Gamma_i} \chi_i(x) > 0$  (и  $a_i$  ограничены снизу),

и  $\lambda_* \rightarrow -\infty$ , если  $\max_{i \in \Gamma_i} \max_{x \in \Gamma_i} \chi_i(x) < 0$  (и  $a_i$  ограничены сверху).

Свойства собственных значений задач (4.1)–(4.3) и (4.4) для односвязной осесимметричной поверхности при  $m=1$  изучены в [1, 6]. Перейдем теперь к рассмотрению несвязной осесимметричной поверхности. Причем для простоты и наглядности будем сначала считать, что  $\Gamma$  состоит из двух ( $m=2$ ) односвязных поверхностей. Собственные значения задач (4.1)–(4.3) и (4.4), (4.5), (4.3) расположим в порядке возрастания:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ .

Исследуем зависимость  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  от значений параметров  $\chi_{11}, \chi_{21}$ , которые для удобства в дальнейшем будем обозначать  $\chi_1, \chi_2$ . Эта зависимость определена в интервале  $-\infty < (\chi_1, \chi_2) < \infty$  и непрерывна. Зададим теперь некоторое  $\lambda \neq \nu_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ). Решение уравнений (4.1) будем искать в виде

$$\varphi_i(s_i; \lambda) = c_i u_i(s_i; \lambda) + \mu w_i(s_i; \lambda) \quad (i=1, 2) \quad (5.1)$$

где  $u_i(s_i; \lambda), w_i(s_i; \lambda)$  – ограниченные при  $s_i=0$  решения уравнений

$$\begin{aligned} L_i u_i - \lambda u_i &= 0, & L_i w_i - \lambda w_i + 1 &= 0 \\ L_i &= -\frac{d^2}{ds_i^2} - \frac{r_i'}{r_i} \frac{d}{ds_i} + a_i(s_i) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для определения трех постоянных  $c_1, c_2, \mu$  имеется два условия (4.2) и условие (4.3). Из них получим, что заданное  $\lambda$  является собственным значением задачи (4.1)–(4.3), когда  $\chi_1 = \chi_1^\circ(\lambda)$  и  $\chi_2 = \chi_2^\circ(\lambda)$ , где  $\chi_1^\circ(\lambda), \chi_2^\circ(\lambda)$  удовлетворяют уравнению

$$d(\lambda) \chi_1^\circ \chi_2^\circ + e(\lambda) \chi_1^\circ + f(\lambda) \chi_2^\circ + h(\lambda) = 0 \quad (5.3)$$

$$d(\lambda) = u_1(s_{11}; \lambda) D_2(s_{21}; \lambda) + u_2(s_{21}; \lambda) D_1(s_{11}; \lambda)$$

$$e(\lambda) = u_1(s_{11}; \lambda) D_2'(s_{21}; \lambda) + u_2'(s_{21}; \lambda) D_1(s_{11}; \lambda)$$

$$f(\lambda) = u_2(s_{21}; \lambda) D_1'(s_{11}; \lambda) + u_1'(s_{11}; \lambda) D_2(s_{21}; \lambda)$$

$$h(\lambda) = u_1'(s_{11}; \lambda) D_2'(s_{21}; \lambda) + u_2'(s_{21}; \lambda) D_1'(s_{11}; \lambda) \quad (5.4)$$

$$D_i(s_i; \lambda) = u_i(s_i; \lambda) \int_0^{s_i} r_i(s_i) w_i(s_i; \lambda) ds_i - w_i(s_i; \lambda) \int_0^{s_i} r_i(s_i) u_i(s_i; \lambda) ds_i$$

производные от функций  $q_i(s_i; \lambda)$  берутся по  $s_i$ .

Уравнение (5.3) при любом фиксированном  $\lambda \neq \nu_j$  в плоскости  $(\chi_1, \chi_2)$  описывает равностороннюю гиперболу с асимптотами  $\chi_1 = \text{const}$  и  $\chi_2 = \text{const}$ . Поскольку  $dh - ef < 0$ , то действительная ось этой гиперболы параллельна прямой  $\chi_1 = \chi_2$ . Последнее неравенство доказывается с помощью тождества

$$\int_0^{s_i} [(L_i \varphi_i - \lambda \alpha \varphi_i) \psi_i - (L_i \psi_i - \lambda \beta \psi_i) \varphi_i] r_i ds_i =$$

$$= |r_i(\varphi_i \psi_i' - \varphi_i' \psi_i)| |_{s_i = s_{i1}} - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \int_0^{s_{i1}} r_i \varphi_i \psi_i ds_i \quad (5.6)$$

справедливого для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi_i(s_i)$ ,  $\psi_i(s_i)$ , если в нем положить  $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda$  и учесть (5.2).

Пусть  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda_\beta$  — значения некоторого  $\lambda_j$  соответственно при  $\chi_i = \chi_{i\alpha}$  и при  $\chi_i = \chi_{i\beta}$ , а  $\varphi_i(s_i)$  и  $\psi_i(s_i)$  — соответствующие собственные функции. Тогда, просуммировав обе части (5.5) по  $i$  ( $i=1, 2$ ), учтя (4.3), а также равенства  $\varphi_i'(s_{i1})/\varphi_i(s_{i1}) = -\chi_{i\alpha}$ ,  $\psi_i'(s_{i1})/\psi_i(s_{i1}) = -\chi_{i\beta}$ , приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^2 (\chi_{i\alpha} - \chi_{i\beta}) (r_i \varphi_i \psi_i) |_{s_i = s_{i1}} = (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \sum_{i=1}^2 \int_0^{s_{i1}} r_i \varphi_i \psi_i ds_i \quad (5.6)$$

Сравнивая знаки обеих частей (5.6) для близких решений, отвечающих близким значениям  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda_\beta$ , заключаем, что  $\lambda_j$  возрастают с ростом хотя бы одного  $\chi_i$  (если второе  $\chi_i$  не убывает). Этот рост будет наблюдаться, пока  $\lambda$  не переходит через какое-либо  $v_j$ . При таком переходе  $\chi_1^\circ$ ,  $\chi_2^\circ$  меняются скачком от  $\infty$  до  $-\infty$ .

Если учесть еще соотношения между  $\lambda_j$  и  $v_j$  [7], то приходим к следующему выводу. В пространстве  $(\chi_1, \chi_2, \lambda)$  зависимость собственных значений  $\lambda_j$  от  $\chi_1, \chi_2$  имеет вид поверхностей, горизонтальными сечениями которых являются ветви гипербол. Правая ветвь гиперболы отвечает собственному значению  $\lambda_j$  с нечетным  $j$ , а левая — ближайшему сверху собственному значению  $\lambda_j$  с четным  $j$ . Эти поверхности попарно «расслоены» горизонтальными плоскостями  $\lambda = v_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ), причем

$$\lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow -\infty} (\lambda_1, \lambda_2) = -\infty, \quad \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow \infty} (\lambda_1, \lambda_2) = v_1$$

$$\lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow -\infty} (\lambda_{2k+1}, \lambda_{2k+2}) = v_k, \quad \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow \infty} (\lambda_{2k+1}, \lambda_{2k+2}) = v_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Отметим еще, что  $\lambda_j, v_j$  являются непрерывными функциями  $s_{i1}$ . Причем с ростом  $s_{i1}$  при неизменных  $a_i$  величина  $v_j$  монотонно уменьшается (от очень больших значений, которые  $v_j$  приобретает при  $s_{i1} \rightarrow 0$ , — см. первый абзац п. 5).

**6. Методика.** Продолжая параллель между случаями  $m=1$  и  $m>1$ , заметим, что в [1, 6, 8] было предложено два метода исследования устойчивости осесимметричных связанных поверхностей. Один из них ([1, 8]) позволяет строить границу области устойчивости в пространстве параметров, определяющих равновесие в заданном сосуде. Но при  $m>1$  он становится непригодным, так как нет уверенности в устойчивости  $\Gamma$ , состоящей из поверхностей  $\Gamma_i$  достаточно малых размеров. Ниже будет изложено обобщение на случай  $m>1$  второго метода [1, 6]. Он позволяет делать заключение об устойчивости любой наперед заданной осесимметричной равновесной поверхности  $\Gamma$ , реализующейся в произвольном (лишь допускающем эту реализацию) сосуде.

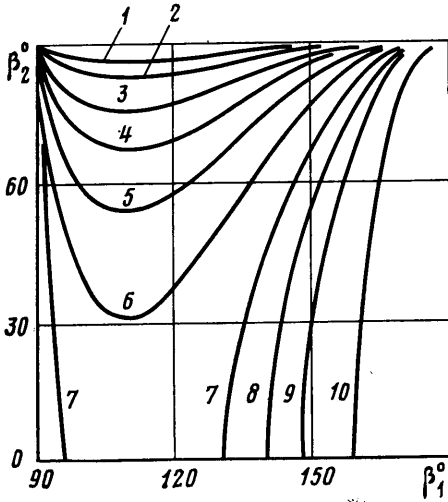
Пусть по-прежнему  $\Gamma$  состоит из двух односвязных осесимметричных поверхностей  $\Gamma_i$  ( $i=1, 2$ ). Прежде всего выясним знак  $v_1$ . Представляя решение (4.1) в виде (5.1) и учитывая условия (4.5), (4.3), найдем, что  $v=0$  является собственным значением задачи (4.1), (4.5), (4.3), когда  $d(0)=0$ . Возьмем теперь достаточно малые участки ( $0 \leq s_i \leq s_i^\circ$ ) поверхностей  $\Gamma_i$  и рассмотрим соответствующее им равновесное состояние. Для него  $v_1 > 0$ . Будем теперь непрерывно увеличивать размер каждого из участков, устремляя  $s_i^\circ$  к  $s_{i1}$ . При этом  $v_1$  монотонно уменьшается. Если при некоторых  $s_i^\circ \leq s_{i1}$  ( $i=1, 2$ ) величина  $d(0)$  изменяет знак, то для изучаемого равновесного состояния ( $0 \leq s_i \leq s_{i1}$ ) имеем  $v_1 \leq 0$ . Если же при уве-

личении  $s_i^\circ$  вплоть до  $s_{i1}$  ( $i=1, 2$ ) величина  $d(0)$  не изменяет знак, то имеем  $\nu_1 > 0$ .

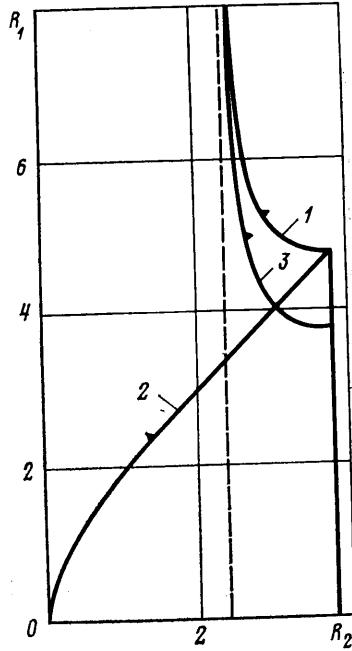
Пусть  $\nu_1 \leq 0$ . Тогда  $\lambda_1 < 0$ , т. е. равновесие заведомо неустойчиво. Пусть теперь  $\nu_1 > 0$ . Тогда для выяснения вопроса об устойчивости следует построить гиперболу (5.3), отвечающую  $\lambda = 0$

$$d(0)\chi_1^*\chi_2^* + e(0)\chi_1^* + f(0)\chi_2^* + h(0) = 0 \quad (6.1)$$

Если значения  $\chi_1, \chi_2$  содержатся в области, ограниченной снизу и слева правой ветвью этой гиперболы, то  $\lambda_1 > 0$  и относительно осесимметричных возмущений равновесие устойчиво, в противном случае — неустойчиво.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если одна из  $\Gamma_i$ , например  $\Gamma_2$ , опирается на кромку твердого тела (т. е.  $\chi_2 = \infty$ ), то вместо (6.1) приходим к уравнению  $d(0)\chi_1^* + f(0) = 0$  и (при  $\nu_1 > 0$ ) условие устойчивости принимает вид  $\chi_1 > \chi_1^*$ .

В общем случае, когда  $\Gamma$  представляют  $m$  связных осесимметричных поверхностей  $\Gamma_i$ , из которых  $q$  ( $0 \leq q \leq m$ ) двусвязные, имеется  $m+q$  крайевых условий (4.2) и соответствующих параметров  $\chi_k$  ( $k=1, 2, \dots, m+q$ ) (при  $\nu_1 > 0$  они определяют устойчивость равновесия). Тогда вместо (5.3) получаем уравнение поверхности  $(m+q)$ -того порядка

$$a(\lambda) + \sum_{i=1}^{m+q} b_i(\lambda)\chi_i^\circ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m+q} c_{ij}(\lambda)\chi_i^\circ\chi_j^\circ + \\ + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{m+q} e_{ijk}(\lambda)\chi_i^\circ\chi_j^\circ\chi_k^\circ + \dots + d(\lambda) \prod_{i=1}^{m+q} \chi_i^\circ = 0$$

Аналогичный метод (обобщение метода [1, 9] для  $m=1$ ) может быть использован при анализе устойчивости цилиндрических несвязных поверхностей.



7. **Полная невесомость.** Перейдем к рассмотрению примеров. Пусть в условиях невесомости равновесная поверхность состоит из двух сферических сегментов радиусами  $\rho_1, \rho_2$  с углами полурастворов  $\beta_1, \beta_2$ . Предположим, что выполнено необходимое условие устойчивости относительно произвольных возмущений

$$v_* = \min(v_1, v^{(1)}, v^{(2)}) > 0 \quad (7.1)$$

( $v^{(1)}, v^{(2)}$  – соответствующие  $i=1, 2$  наименьшие собственные значения задач, состоящих из уравнений (4.4) при  $n=1$  и условий (4.5)). Тогда область устойчивости относительно осесимметричных возмущений ограничена правой ветвью гиперболы (6.1). Здесь  $u_i(s_i; 0) = \cos(s_i/\rho_i)$ ,  $w_i(s_i; 0) = \rho_i^2/2$ , поэтому

$$\begin{aligned} d(0) &= \rho_1^4 \cos \beta_2 (1 - \cos \beta_1)^2 + \rho_2^4 \cos \beta_1 (1 - \cos \beta_2)^2 \\ e(0) &= -\frac{1}{\rho_2} [\rho_1^4 \sin \beta_2 (1 - \cos \beta_1)^2 - 2\rho_2^4 \cos \beta_1 \sin \beta_2 (1 - \cos \beta_2)] \\ f(0) &= -\frac{1}{\rho_1} [\rho_2^4 \sin \beta_1 (1 - \cos \beta_2)^2 - 2\rho_1^4 \cos \beta_2 \sin \beta_1 (1 - \cos \beta_1)] \\ h(0) &= -\frac{2}{\rho_1 \rho_2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 [\rho_1^4 (1 - \cos \beta_1) + \rho_2^4 (1 - \cos \beta_2)] \end{aligned}$$

Область устойчивости относительно неосесимметричных возмущений определяется неравенствами [1, 6]  $\rho_i \chi_i > -\text{ctg } \beta_i$  ( $i=1, 2$ ).

Найдем условия, при которых выполняется (7.1) или, иначе, когда будет устойчивой система, у которой обе линии смачивания находятся на кромках твердого тела. Поскольку относительно неосесимметричных возмущений здесь всегда имеется устойчивость [1, 6], т. е.  $v^{(i)} > 0$  ( $i=1, 2$ ), то граница области устойчивости определяется равенством  $v_i=0$  или  $d(0)=0$ . Величина  $d(0) > 0$  для  $\beta_i < \pi/2$  ( $i=1, 2$ ) и  $d(0) < 0$  для  $\beta_i > \pi/2$  ( $i=1, 2$ ). При малых  $\beta_i$  должна быть устойчивость. Поэтому в случае  $\beta_1 < \pi/2, \beta_2 < \pi/2$  равновесие устойчиво, а в случае  $\beta_1 > \pi/2, \beta_2 > \pi/2$  неустойчиво. Пусть далее для определенности  $\beta_1 \geq \pi/2, \beta_2 \leq \pi/2$ . Тогда для различных величин  $\xi = R_2^4 / R_1^4$  ( $R_i$  – радиус  $i$ -той кромки) граница имеет вид, показанный на фиг. 3. Кривые 1–10 отвечают значениям  $\xi = 0,4; 1; 2,5; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 1000$ . Для них производные  $db_2/db_1$  в точках  $(90, 90^\circ)$  и  $(180, 90^\circ)$  равны соответственно  $-\xi$  и нулю. Если  $\xi < 27$ , то область устойчивости находится ниже соответствующей кривой. При  $\xi = 27$  граница касается оси абсцисс. При  $\xi > 27$  граница разбивается на два участка (левые участки кривых 8–10 не показаны, они близки к прямым и соединяют точку  $(90, 90^\circ)$  с точками  $\beta_1 = 92,51; 91,20; 90,23^\circ$  на оси абсцисс). Область устойчивости находится левее левого и правее правого участков.

Вторая часть рассмотренной здесь задачи, связанная с проверкой условия (7.1), изучалась в [2] другим методом, который упоминался в п. 1.

8. **Поле тяжести.** Пусть теперь жидкость помещена в однородное гравитационное поле, а  $\Gamma$  состоит из двух связанных поверхностей  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . Будем предполагать, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют форму горизонтальных кругов. Следует ожидать по аналогии со случаем  $m=1$ , что помимо простоты такое предположение дает возможность найти максимально допустимые радиусы окружностей смачивания  $\chi_1, \chi_2$  при заданных  $\chi_1, \chi_2$ . Как и в п. 3, введем коэффициенты перегрузки  $\varepsilon_i$ .

а. Пусть  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$  и условие (7.1) выполнено. Для построения правой ветви гиперболы (6.1) имеем [1]

$$\begin{aligned} u_1(s_1; 0) &= I_0(\sqrt{b_1} s_1), & w_1(s_1; 0) &= -\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1} I_0(\sqrt{b_1} s_1) \\ u_2(s_2; 0) &= J_0(\sqrt{|b_2|} s_2), & w_2(s_2; 0) &= -\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} J_0(\sqrt{|b_2|} s_2) \end{aligned}$$

Полагая в дальнейшем  $|b_1| = |b_2| = b$ , вводя в качестве характерной длины величину  $b^{-1/2}$  и переходя в (6.1) к безразмерным переменным (за которыми сохраним прежние обозначения), получим следующие выражения для коэффициентов через функции Бесселя действительного и мнимого аргумента:

$$\begin{aligned} d(0) &= \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) I_0(R_1) J_0(R_2) + R_1 I_1(R_1) J_0(R_2) - R_2 I_0(R_1) J_1(R_2) \\ e(0) &= \frac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2) I_0(R_1) J_1(R_2) - R_1 I_1(R_1) J_1(R_2) \\ f(0) &= \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) I_1(R_1) J_0(R_2) - R_2 I_1(R_1) J_1(R_2), & h(0) &= \frac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2) I_1(R_1) J_1(R_2) \end{aligned}$$

Здесь  $R_i$  – безразмерное значение радиуса  $i$ -го круга. Относительно неосесимметричных возмущений равновесие устойчиво [1, 6], если безразмерные значения  $\chi_1 > -I_1'(R_1)/I_1(R_1)$ ,  $\chi_2 > -J_1'(R_2)/J_1(R_2)$ .

Построим теперь максимальную область устойчивости  $v_* > 0$  (область значений

$R_1, R_2$ , при которых устойчива система с закрепленными линиями смачивания). Величина  $v^{(1)}$  всегда положительна, а  $v^{(2)} > 0$ , если [1]  $R_2 < \mu_{1,1}$  ( $\mu_{1,1} = 3,8317$  – первый положительный нуль функции  $J_1(x)$ ). Граница области устойчивости относительно осесимметричных возмущений (кривая 1 на фиг. 4) определяется из равенства  $d(0) = 0$ . Она асимптотически стремится к вертикальной прямой (показанной пунктиром)  $R_2 = \mu_{0,1}$  ( $\mu_{0,1} = 2,4048$  – первый нуль функции  $J_0(x)$ ) и имеет горизонтальную касательную при  $R_2 = \mu_{1,1}$ . Таким образом, область  $v_* > 0$  ограничена кривой 1 и прямой  $R_2 = \mu_{1,1}$ .

Кроме того, на фиг. 4 внутри области  $v_* > 0$  приведены линии  $e(0) = 0$  (кривая 2) и  $f(0) = 0$  (кривая 3). Стрелки на кривых 1–3 направлены в сторону, где соответствующие коэффициенты  $d(0), e(0), f(0)$  положительны. Построение этих кривых дает возможность сразу отвечать на вопрос об устойчивости относительно осесимметричных возмущений систем, у которых одна из линий смачивания находится на кромке сосуда, а вторая – на поверхности сосуда с нулевой кривизной образующей.

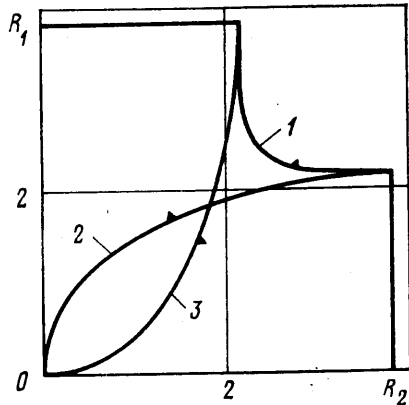
6. Пусть  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0$ . Тогда в области  $v_* > 0$  аналогично предыдущему случаю находим коэффициенты гиперболы (6.1)

$$d(0) = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)J_0(R_1)J_0(R_2) - R_1J_0(R_2)J_1(R_1) - R_2J_0(R_1)J_1(R_2)$$

$$e(0) = -\frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)J_0(R_1)J_1(R_2) + R_1J_1(R_1)J_1(R_2)$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)J_0(R_2)J_1(R_1) + R_2J_1(R_1)J_1(R_2)$$

$$h(0) = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)J_1(R_1)J_1(R_2)$$



Фиг. 5

Устойчивость относительно неосесимметричных возмущений определяется неравенствами  $\chi_i > -J_1'(R_i)/J_1(R_i)$  ( $i=1, 2$ ).

Область  $v_* > 0$  (см. фиг. 5) ограничена горизонтальной и вертикальной прямыми  $R_i = \mu_{1,1}$  ( $i=1, 2$ ), что обеспечивает условие  $v^{(i)} > 0$ , и кривой 1 ( $d(0) = 0$ ) – условие  $v_1 > 0$ . Кривые 2, 3 имеют тот же смысл, что и в случае а.

в. Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ , то  $v_*$  всегда положительно. Коэффициенты гиперболы (6.1) находятся аналогично предыдущему и выражаются через функции Бесселя мнимого аргумента. Условие устойчивости относительно неосесимметричных возмущений имеет вид  $\chi_i > -I_1'(R_i)/I_1(R_i)$  ( $i=1, 2$ ).

Автор благодарит А. Д. Тюпцова за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Орел В. Р. Об устойчивости несжимаемой жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения. Случай двусвязной равновесной поверхности. – ПМТФ, 1974, № 6, с. 46–54.
3. Орел В. Р. Об одной задаче равновесия и устойчивости капли несжимаемой жидкости. – ПМТФ, 1979, № 1, с. 82–88.
4. Maxwell J. C. The scientific papers. V. 2. Б/м., 1927, p. 585–587.
5. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2, с. 78–85.
6. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Характеристический параметр устойчивости осесимметричной равновесной поверхности капиллярной жидкости. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 74–84.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
8. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. – В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968, с. 5–68.
9. Слобожанин Л. А., Шербакова Н. С. Цилиндрические равновесные поверхности капиллярной жидкости и их устойчивость. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 57–68.