МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1983

УДК 532.59.013.4+537.34

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

ЖАКИН А. И.

Рассматриваются линейные и нелинейные волны в жидких диэлектриках, находящихся в сильных внешних электрических полях. При рассмотрении линейных волн предполагается, что жидкость обладает биполярной проводимостью, причем учитывается возможность рекомбинации разноименно заряженных ионов. Показано существование двух типов волн: звуковых и дрейфовых. При рассмотрении нелинейных волн найдено решение при разбегании униполярно заряженного слоя в электрическом поле. Исследована его устойчивость. Найдены условия, при которых могут существовать нелинейные дрейфовые волны.

1. Наиболее распространенный подход при описании электрогидродинамических явлений в слабопроводящих жидкостях основывается на принятии закона Ома в форме [1—7]

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+q\mathbf{v} \tag{1.1}$$

Однако это предположение не позволяет объяснить ряд ЭГД-явлений, таких, как изотермическая электроконвекция в плоском конденсаторе [8], зависимость ЭГД-течений от полярности электродов [9, 10], а также от разнообразия нелинейных участков вольт-амперных характеристик [4, 5, 11, 12], релаксационных явлений и амперовременных характеристик [13, 14].

Движение иона в объеме жидкого диэлектрика имеет активационный характер, поэтому плотность тока какой-либо ионной компоненты определяется не только напряженностью поля $\mathbf{E}$, но и плотностью зарядов q [1, 3, 15]

$$\mathbf{j}=bq\mathbf{E}+q\mathbf{v} \tag{1.2}$$

где b — подвижность иона.

При законе проводимости (1.2) система уравнений сохранения зарядов становится гиперболической, т. е. допускает волновые решения. Изучению этих решений и посвящена данная работа.

В дальнейшем будем считать, что в жидкости имеется два сорта зарядов положительного и отрицательного знаков, имеющих соответственно объемные плотности q_1, q_2 и подвижности b_1, b_2. В наиболее общем случае система уравнений электрогидродинамики диэлектрических жидкостей с учетом сжимаемости, возможности объемной рекомбинации ионов и диссоциации нейтральной компоненты имеет следующий вид:

$$\rho_t+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0 \tag{1.3}$$

$$\rho(\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v})=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{f}_e$$

$$\mathbf{f}_e=-\nabla p^e+(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E}+q\mathbf{E},\quad \mathbf{P}=(\varepsilon-1)\mathbf{E}/4\pi$$

$$\rho T\frac{d}{dt}(S+S^e)=\varkappa\Delta T+D$$

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}=4\pi q,\quad \mathbf{E}=-\nabla\psi\quad (q=q_1-q_2)\\
q_{1t}+\operatorname{div}(b_1q_1\mathbf{E}+q_1\mathbf{v})=zNK-\alpha_p q_1q_2\equiv\Sigma\\
-q_{2t}+\operatorname{div}(b_2q_2\mathbf{E}-q_2\mathbf{v})=-\Sigma\\
p=p(\rho,T),\ S=S(\rho,T)\\
p^e=\frac{1}{4\pi}\int_0^E(\varepsilon-1-\rho\varepsilon_\rho)E\,dE,\qquad S^e=\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^E\varepsilon_T E\,dE
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Здесь S — энтропия единицы массы в отсутствие электрического поля; p^e, S^e — соответственно давление и энтропия электрического поля [16]; D — диссипативная функция, z — заряд положительного иона, N — постоянная концентрация диссоциирующей нейтральной компоненты; K, α_p — соответственно постоянные константы скоростей реакций диссоциации и рекомбинации.

При малых отклонениях температуры и плотности от некоторых постоянных значений ρ_0, T_0 уравнения состояний (1.4) можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
p=p_0+c_T{}^2(\rho-\rho_0)+\rho_0\beta_T c_T{}^2(T-T_0)\\
S=S_0+\frac{c_v}{T_0}(T-T_0)-\frac{1}{\rho_0}\beta_T c_T{}^2(\rho-\rho_0)\\
c_T{}^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T,\qquad \beta_T=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

где c_T — скорость звука при постоянной температуре, c_v — теплоемкость при постоянном объеме; β_T — коэффициент температурного расширения при постоянном давлении. Здесь и в дальнейшем нижний буквенный индекс, если это специально не оговорено, обозначает частную производную по соответствующей переменной.

Зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\rho, T, E)$ для неполярной и полярной жидкостей определяется формулами соответственно [4, 17]

$$
\varepsilon=\frac{1+2\delta\rho}{1-\delta\rho}\left(\delta=\frac{4\pi\alpha_e}{m}\right),\qquad \varepsilon=1+C\frac{\rho}{T}
\tag{1.6}
$$

где α_e — электронная поляризуемость, m — масса молекулы, C — константа, зависящая от природы жидкости.

2. Линейные волны. В униполярно заряженном газе кроме обычной звуковой волны существует волна, связанная с движением ионной компоненты (дрейфовая волна), распространяющаяся со скоростью bE [19]. Для жидких диэлектриков в силу зависимостей (1.6) скорость звука может существенно зависеть от поля (см. ниже). Дрейфовые волны могут быстро релаксировать, в связи с чем представляет интерес вычислить их декремент затухания. Оказывается (см. ниже (2.6)), что этот тип волн практически может существовать только в весьма малопроводящих средах, таких, как, например, жидкие диэлектрики.

Рассмотрим малые возмущения на фоне некоторого однородного состояния ρ_0, $\mathbf{E}_0=E_0\mathbf{e}_x$ ($\mathbf{e}_x$ — орт декартовой системы координат), $q_{10}=q_{20}=q_0$ ($q_0=\sqrt{zNK/\alpha_p}$ при $K\neq0$, $\alpha_p\neq0$), $v_0=0$, T_0. Линеаризованные уравнения с учетом (1.5) имеют вид

$$
\begin{gathered}
\rho_t+\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}=0\\
\rho_0\mathbf{v}_t=-(c_T{}^2+p_\rho{}^e)\nabla\rho-(p_T{}^e+\rho_0\beta_T c_T{}^2)\nabla T+\eta\Delta\mathbf{v}+\\
+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}-\left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}E_0+p_E{}^e\right)\nabla\psi_x+(q_1-q_2)\mathbf{E}_0
\end{gathered}
$$

$$\rho_0 T_0\left[\left(\frac{c_v}{T_0}+S_T^e\right)T_t+\left(S_\rho^e-\frac{\beta_T}{\rho_0}c_T^2\right)\rho_t-S_E^e\psi_{xt}\right]=\varkappa\Delta T$$

$$(\varepsilon_\rho\nabla\rho+\varepsilon_T\nabla T)E_0-(E_0\varepsilon_E\psi_{xx}+\varepsilon\Delta\psi)=4\pi(q_1-q_2)$$

$$q_{1t}+b_1(\nabla q_1\mathbf{E}_0-q_0\Delta\psi)+q_0\operatorname{div}\mathbf{v}=-\alpha_p q_0(q_1+q_2)$$

$$-q_{2t}+b_2(\nabla q_2\mathbf{E}_0-q_0\Delta\psi)-q_0\operatorname{div}\mathbf{v}=\alpha_p q_0(q_1+q_2)$$

Разыскивая решение в виде бегущих волн $f=f_* e^{i(\omega t+\mathbf{kr})}$ ($f_*=\mathrm{const}$), обычным приемом [18] находим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[\omega^2-i\omega k^2\left(\frac{4}{3}\nu_1+\nu_2+\rho_0T_0\frac{BL}{A}\right)-k^2(c_T^2+A_E)\right]\times$$

$$\times(\omega^2-ia_1\omega-a_2)+q_0(b_1+b_2)k_x^2E_0^2\left(1+\frac{\rho_0\varepsilon_\rho}{\mu}+i\omega\varepsilon_T T_0\frac{L}{\mu A}\right)\times$$

$$\times\left[(\omega-2i\alpha_p q_0)\left(\omega\rho_0\varepsilon_T\frac{B}{A}+i\varepsilon_\rho\right)\mu^{-1}+\frac{i\omega}{\rho_0}\right]=0 \qquad (2.1)$$

$$\nu_1=\frac{\eta}{\rho_0},\quad \nu_2=\frac{\zeta}{\rho_0},\quad \cos\theta=\frac{k_x}{k},\quad k=|\mathbf{k}|$$

$$k_x=\mathbf{ke}_x,\quad \mu=\varepsilon+E_0\varepsilon_E\cos^2\theta$$

$$A=\varkappa k^2+i\omega\rho_0\left(c_v+T_0S_T^e-T_0\frac{\varepsilon_T^2E_0^2\cos^2\theta}{4\pi\rho_0\mu}\right)$$

$$B=\beta_Tc_T^2+\frac{\varepsilon_\rho\varepsilon_TE_0^2\cos^2\theta}{4\pi\mu}-\rho_0S_\rho^e$$

$$L=\beta_Tc_T^2+\frac{p_T^e}{\rho_0}+\frac{\varepsilon_\rho\varepsilon_TE_0\cos^2\theta}{4\pi\mu}$$

$$A_E=p_\rho^e+\frac{\rho_0\varepsilon_\rho^2E_0^2\cos^2\theta}{4\pi\mu}$$

$$a_1=2\alpha_pq_0+q_0(b_1+b_2)\frac{D}{\mu}+ik_xE_0(b_1-b_2)$$

$$a_2=b_1b_2k_x^2E_0^2+2q_0^2\alpha_p(b_1+b_2)\frac{D}{\mu}+ik_xE_0\alpha_pq_0(b_1-b_2)$$

$$D=4\pi+\frac{i\omega T_0\varepsilon_T^2E_0^2\cos^2\theta}{\mu A}$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. При малой плотности зарядов ($q_0\to 0$), малых теплопроводности $\omega_0\varkappa\ll\rho_0c_va^2$ и вязкости $\omega_0(4/3\nu_1+\nu_2)\ll a^2$ получаем частоты звуковых волн

$$\omega_\pm=\pm\omega_0+i\gamma,\quad \omega_0=ak,\quad a^2=c_T^2+A_E+\frac{T_0BL}{c_v+M} \qquad (2.2)$$

$$\gamma=\frac{\omega_0^2}{2a^2}\left(\frac{4}{3}\nu_1+\nu_2+\frac{\varkappa T_0BL}{a^2\rho_0(c_v+M)^2}\right),\quad M=T_0S_T^e-\frac{\varepsilon_T^2T_0E_0^2\cos^2\theta}{4\pi\rho_0\mu}$$

где a^2 — квадрат скорости звука, γ — декремент затухания.

Вторая пара корней уравнения (2.1) определяет частоты волн движения ионных компонент

$$\omega_{03}=-k_xb_1E_0,\quad \omega_{04}=k_xb_2E_0 \qquad (2.3)$$

Рассмотрим влияние поля на звуковые волны в неполярном жидком диэлектрике. В этом случае $\varepsilon_T=0$, $\varepsilon_E=0$ и из (2.2) с учетом (1.6) и термодинамических тождеств $c_p - c_v = \beta_T^2 c_T^2 T$, $c_s^2 = \left(\frac{c_p}{c_V}\right) c_T^2$ находим

$$a^2 = c_s^2 + \frac{(\varepsilon-1)^2(\varepsilon+2)E_0^2}{36\pi\rho_0}\left(\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\cos^2\theta - 1\right) \tag{2.4}$$

$$\gamma = \frac{\omega_0^2}{2\rho_0 c_s^2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]$$

Здесь c_s — изоэнтропическая скорость звука, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Отсюда видно, что при совпадении направлений поля $\mathbf{E}_0$ и фронта распространения звуковой волны $\mathbf{E}_0 \| \mathbf{k}$ ($\theta=0$, π) скорость звука увеличивается с ростом E_0. Если же $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ ($\theta=\pi/2$), то скорость звука уменьшается с ростом поля. Отметим, что в этом случае декремент затухания не зависит от поля.

Сделаем оценку влияния поля на скорость звука. В жидкостях $c_s \simeq \simeq 10^3$ м/с. Полагая $\varepsilon=10$, $\rho_0=1$ г/см^3, $E_0=10^6$ В/см, находим, что отношение члена с полем к c_s^2 в (2.4) имеет порядок 10^{-2}. С уменьшением ε это отношение быстро уменьшается и при $\varepsilon=2$ равно 10^{-4}. Эти оценки показывают, что в неполярных жидких диэлектриках влияние поля на скорость звука мало.

В полярных жидких диэлектриках зависимостью ε от T, E при $E_0 \leqslant \leqslant 10^5$ В/см и комнатных температурах можно пренебречь [17]. В этом случае при $\varepsilon \gg 1$ с учетом (1.6) имеем

$$a^2 = c_T^2 + a_e^2\cos\theta + \frac{T_0\beta_T c_T^2 - a_e^2\cos^2\theta}{c_v T_0 + a_e^2(2-\cos^2\theta)}, \quad a_e^2 = \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi\rho_0} \tag{2.5}$$

Как и в случае неполярных диэлектриков, влияние поля на звуковую волну максимально в том случае, когда направление распространения волны и направление поля совпадают ($\theta=0$, π). Если исходить из оценки предельно возможных значений ε (как, например, для диэлектрических смесей с сегнетоэлектрическими частицами [4]), то при $\varepsilon=10^4$, $E_0= =1$ МВ/см скорость звука можно увеличить в 2 раза. Для типичных же значений $\varepsilon \leqslant 100$ зависимость скорости звука от E_0 незначительна.

Отметим, что из (2.2) вытекает зависимость скорости звука и декремента затухания от напряженности магнитного поля для феррожидкости в изотропной модели [16]. Для этого перехода необходимо положить вместо ε магнитную проницаемость, вместо E_0 — напряженность магнитного поля.

Решение (2.3) описывает дрейфовое движение зарядов в электрическом поле, причем волна положительных (отрицательных) зарядов движется со скоростью b_1E_0 (b_2E_0) по полю (против поля). Рассмотрим вопрос о затухании этих волн, предполагая $b_1 \sim b_2$, $b_1E_0/c_s \ll 1$, $\varepsilon_T=0$, $q_0b_1/\omega_{30} \sim \sim \alpha_p q_0/\omega_{30} \ll 1$, считая малыми вязкость и теплопроводность. Разыскивая решение в виде

$$\omega_3 = \omega_{30} + \omega_{3(1)} + \omega_{3(2)} + \ldots, \quad \omega_4 = \omega_{40} + \omega_{4(1)} + \omega_{4(2)} + \ldots$$

Для линейных добавок получим

$$\omega_{3(1)} = i\gamma_1 - \delta_1, \quad \omega_{4(1)} = i\gamma_2 + \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{8\pi\alpha_p q_0^2}{\varepsilon k_x E_0}$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{4\pi}{\varepsilon} q_0 b_{1,2} + \alpha_p q_0 + \frac{q_0 b_{1,2}}{\rho_0 a^2}\left(1 - \frac{\rho_0^2 \varepsilon_\rho^2}{\varepsilon^2}\right) E_0^2 \cos^2\theta \tag{2.6}$$

Здесь a^2 определяется по (2.4), (2.5). Отсюда с учетом (1.6) следует, что учет сжимаемости приводит к увеличению декрементов затухания. Рекомбинация ионов также вызывает затухание волн. Если ввести «коэффициенты проводимости» ионных компонент $\sigma_{1,2}=q_0b_{1,2}$, то первые члены в (2.6) суть обратные величины времен релаксации свободных зарядов $\tau_{1,2}=\varepsilon/4\pi\sigma_{1,2}$. Затухание, описываемое этими членами, связано с разбеганием одноименно заряженных ионов. Отметим, что в жидких диэлектриках с проводимостью $\sigma\simeq10^{-14}$ См/см время релаксации $\tau\simeq100$ с, поэтому дрейфовые волны можно наблюдать экспериментально. В электролитах, например, где $\sigma\simeq1$ См/см, эти волны затухают практически мгновенно.

Покажем, что звуковые волны можно возбуждать модулированным электрическим полем. При этом будем считать ε линейным по ρ, пренебрегать вязкостью и теплопроводностью и предполагать выполнение следующих неравенств:

$$q_0\lambda/E_0\sim\sigma\lambda/bE_0\ll1,\quad v_0/bE_0\ll1 \tag{2.7}$$

где $\lambda=2\pi/k$ — длина волны, v_0 — характерная скорость. Эти условия выполняются для широкого класса газов и диэлектрических жидкостей. Первое неравенство означает, что затухание дрейфовых волн, связанное с разбеганием зарядов, мало. Второе — дрейфовая скорость ионов значительно больше конвективной.

Тогда в одномерной постановке задача допускает следующее решение:

$$(E_x, v_x)=(a_0, u_0)\cos(\omega t-kx),\quad q_1=\frac{a_0k}{4\pi}\sin(\omega t-kx) \tag{2.8}$$

$$q_2=0,\quad u_0=a_0(2\varepsilon-1)b_1E_0^2/4\pi\rho_0(a^2-b_1^2E_0^2) \tag{2.9}$$

где ω — заданная частота модуляции, $k=\omega/b_1E_0$; u_0, a_0 — амплитуды скорости и модуляции ($a_0/E_0\ll1$).

Из (2.8), (2.9) следует, что, во-первых, частота и длина звуковой волны такие же, что и дрейфовой. Во-вторых, возбуждение имеет резонансный характер: оно максимально, если скорость дрейфовой волны b_1E_0 совпадает со скоростью звука a. Например, если $a=340$ м/с (воздух), $b_1=1{,}8$ см^2/В с (ионы кислорода), то максимальная генерация звука будет при $E_0=$ $=20$ кВ/см. Отметим, что в области резонанса второе неравенство в (2.7) выполняться не будет. Если снять это ограничение, то особенность в (2.9) исчезнет. Действительно, записав дисперсионное уравнение (2.1) для данного случая в виде

$$\begin{gathered}(1-z^2)\left[\left(1+\frac{z}{u_1}\right)\left(1-\frac{z_1}{u_2}\right)-i\alpha\right]+i\beta z^2=0\\ z=\frac{ka}{\omega},\quad u_1=\frac{a}{b_1E_0},\quad u_2=\frac{a}{b_2E_0},\\ \alpha=\frac{4\pi q_0(b_1+b_2)}{\varepsilon\omega},\quad \beta=\frac{(2\varepsilon-1)(b_1+b_2)}{\rho_0\varepsilon^2\omega a^2}E_0^2\end{gathered} \tag{2.10}$$

в высокочастотном приближении $\alpha\ll1$, $\beta\ll1$ с точностью до линейных членов по α, β для волны, двигающейся по полю, будем иметь

$$z_1=-u_1+\frac{u_2}{4(u_1+u_2)}\left[c_1+ic_2+\sqrt{(ic_2-c_1)^2+8\frac{u_1+u_2}{u_2}\beta iu_1^2}\right] \tag{2.11}$$

$$c_1=(1-u_1^2)(u_1+u_2)/u_1u_2,\quad c_2=2\alpha u_1$$

Отсюда в точке резонанса $u_1=1$ получим

$$\begin{gathered}k=\frac{\omega}{a}\left[-1+\frac{b_1}{2(b_1+b_2)}\left(r\cos\frac{\varphi}{2}+i\left(r\sin\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right)\right]\\ r=\left(\alpha^4+4\beta^2\frac{(b_1+b_2)^2}{b_1^2}\right)^{1/4},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2(b_1+b_2)\beta}{b_1\alpha^2}\right)\\ \pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi\end{gathered} \tag{2.12}$$

Из (2.11), (2.12) нетрудно получить декремент затухания волны γ. Например, при $u_1=1$ из (2.12) следует

$$\gamma=\frac{\omega b_1}{2a(b_1+b_2)}\left(r\sin\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)$$

Аналогичным образом можно получить связь между амплитудами скорости u_0 и модуляции поля a_0 в точке резонанса

$$u_0=a_0\frac{(2\varepsilon-1)(b_1+b_2)}{3\pi\rho_0 ab_1}E_0\left(r^2+\alpha^2+2\alpha r\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-1/2}$$

Отсюда с учетом (2.10), (2.12) следует, что амплитуда скорости растет с увеличением частоты.

Отметим на возможность обратного эффекта: генерирования дрейфовых волн звуковыми колебаниями. Этот эффект также имеет резонансный характер: максимальное возбуждение будет иметь место при совпадении скорости звука со скоростями дрейфовых волн. Так, при $b_1E_0=a$ для звуковой волны, бегущей по полю (против поля), наиболее сильно возбуждается дрейфовая волна положительных (отрицательных) ионов. При тех же предположениях, что и в предыдущем случае $\alpha\ll1$, $\beta\ll1$, можно получить, что амплитуды звуковой и максимально возбуждаемой волны положительных ионов связаны соотношением

$$n_1=q_0\frac{2(b_1+b_2)}{b_1h}\sqrt{\left(r\cos\frac{\varphi}{2}-\frac{4\pi\rho_0 b_1^3h}{(2\varepsilon-1)(b_1+b_2)}\right)^2+\left(\alpha+r\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,\frac{u_0}{a}$$

$$h=r^2+\alpha^2+2\alpha r\sin\frac{\varphi}{2}$$

где φ, α, r определяются по (2.10), (2.12). Так же, как и в предыдущем случае, амплитуда n_1 растет с увеличением частоты.

3. Одномерные нелинейные дрейфовые волны и их устойчивость. В предыдущем пункте было показано, что при малой величине объемного заряда его релаксация, как и при омической проводимости (1.1), имеет экспоненциальный характер с временем релаксации $\tau=\varepsilon/4\pi bq_0$ (см. (2.6)). Однако если начальное распределение объемного заряда не мало (в том смысле, что не выполняется первое неравенство в (2.7), где λ — характерный размер области, занимаемый зарядом), то разбегание зарядов имеет не экспоненциальный характер [23, 24]. Представляет интерес выяснение условий, при которых возможно устойчивое разбегание униполярно заряженного облака зарядов во внешнем электрическом поле.

Рассмотрим диэлектрическую жидкость с униполярной проводимостью (например, при униполярной инжекции зарядов с электрода [21]). Считаем, что жидкость в процессе движения зарядов покоится, т. е. выполняется необходимое условие равновесия, выражающееся в виде ортогональности градиента плотности заряда вектору напряженности поля $[\nabla q, \mathbf{E}]=0$. В одномерном случае разбегание облака зарядов описывается следующей системой уравнений:

$$\varepsilon E_x=4\pi q,\quad q_t+b(qE)_x=0$$

$$E|_{x\to\pm\infty}\to E^\circ\pm E_0,\quad q|_{t=0}=q_0(x),\quad E_0=\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}q_0(x)\,dx \tag{3.1}$$

где E° — напряженность внешнего поля на бесконечности.

Отметим, что в такой постановке задача тесно связана с задачей об определении подвижности ионов по измерению пролетного времени движения облака ионов в плоском конденсаторе (см. ниже, а также [12, 22]). Пусть в начальный момент заряд занимает слой ширины $2a$ и распределен однородно

$$q=q_0,\ |x|\leqslant a;\ q=0,\ |x|>a \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) можно получить методом характеристик [20]

$$q(t,x)=\frac{q_0}{1+t/\tau_e},\quad E(t,x)=E^\circ+E_0\frac{x-bE^\circ t}{a(1+t/\tau_e)},\quad \left|\frac{x-bE^\circ t}{1+t/\tau_e}\right|\leqslant a$$

$$q=0,\ E=E^\circ-E_0,\ x-b(E^\circ-E_0)t<-a \tag{3.3}$$

$$q=0,\ E=E^\circ+E_0,\ x-b(E^\circ-E_0)t>a$$

$$\tau_e=\frac{\varepsilon}{4\pi bq_0},\quad E_0=\frac{4\pi aq_0}{\varepsilon}$$

Отсюда видно, что облако зарядов, во-первых, двигается как целое со скоростью $u^\circ=bE^\circ$, во-вторых, растекается, причем в системе координат, двигающейся поступательно вдоль оси x со скоростью u°, скорость движения фронта волны равна $u_0=a/\tau_e=bE_0=4\pi abq_0/\varepsilon$, т. е. она пропорциональна начальной плотности q_0 и начальной толщине слоя a. В абсолютной системе координат скорость движения левого фронта равна $b(E^\circ-E_0)=u^\circ-u_0$, правого — $b(E^\circ+E_0)=u^\circ+u_0$. Если начальная плотность заряда q_0, его ширина a и характерное время задачи малы

$$4\pi aq_0/\varepsilon=E_0\ll E^\circ,\ t\ll\tau_e \tag{3.4}$$

то можно считать, что облако зарядов движется как целое. Этот факт положен в основу измерения подвижности ионов по методу измерения пролетного времени в жидких диэлектриках [12].

Из (3.4) видно, что разбегание зарядов с течением времени описывается степенным законом. Оценки показывают: для того чтобы плотность заряда уменьшилась в 10 раз, время степенного разбегания t_d должно быть приблизительно в 5 раз больше времени экспоненциального разбегания $t_t:t_d\simeq 5t_e$.

Кроме условий (3.4) для корректного измерения подвижности необходима устойчивость движения слоя. Так, данные работы [25] показывают, что систематическим источником ошибок этого метода является гидродинамическое движение жидкости.

Будем исследовать устойчивость движения, предполагая выполнение условий (3.4) и считая, что распределение плотности заряда неоднородно: $q_0=q_0(x)$. В этом случае под q_0 в (3.4) надо понимать среднюю плотность заряда в слое. Вычисление проводим в системе координат, двигающейся вместе со слоем со скоростью u° и начало которой расположено на левом фронте, так что $x=d$ – толщина слоя. Устойчивость изучаем по отношению к малым нормальным возмущениям, пропорциональным $A(x)\exp[\lambda t+i(k_yy+k_zz)]$, так что только амплитуды возмущений зависят от продольной координаты x. Тогда по аналогии с [26] систему уравнений для возмущений с учетом (3.4) можно привести к двум уравнениям относительно продольной компоненты скорости $v=v_x$ и плотности заряда q

$$L_4v=k^2E_0q,\quad \lambda q=Qv\quad (0\leqslant x\leqslant d) \tag{3.5}$$

$$L_4v=0\quad (x\leqslant 0,\ x\geqslant d),\quad Q=-dq_0/dx$$

$$k^2=k_y^2+k_z^2,\quad L_4\equiv\eta L^2-\rho L\left(\lambda-bE^\circ\frac{d}{dx}\right),\quad L\equiv\frac{d^2}{dx^2}-k^2$$

Граничные условия к системе (3.5) следуют из непрерывности поля скоростей и тензора напряжений на границах слоя, ограниченности решения на бесконечности. Их можно представить в виде

$$x=0,d\colon\ \langle v\rangle=0,\quad \left\langle\frac{dv}{dx}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{d^2v}{dx^2}\right\rangle=0,\quad \left\langle\frac{d^3v}{dx^3}\right\rangle=0;\quad v|_{x\to\pm\infty}<\infty \tag{3.6}$$

где угловые скобки обозначают скачок соответствующей величины.

Для тонких слоев имеет место $bE^\circ d/\nu \ll 1$. Например, для типичных значений $b=10^{-4}$ см^2/В с, $E^\circ \leqslant 1$ кВ/см и $d \leqslant 0{,}1$ см $\nu \geqslant 0{,}2$ П имеем $bE^\circ d/\nu \leqslant 0{,}05$. В этом случае можно считать $L_4=\eta L^2-\lambda\rho L$. Тогда решение задачи (3.5), (3.6) имеет вещественный спектр ($\operatorname{Im}\lambda=0$), и при $Q<0$ будет $\lambda<0$. При $Q>0$ спектр состоит из двух ветвей: положительной $\lambda_1>0$, отрицательной $\lambda_2<0$. Это свойство вытекает из следующего выражения, которое получается из (3.5), (3.6) после некоторых преобразований

$$\lambda_{1,2}=(-J\pm(J^2+4k^2PI)^{1/2})/2I$$

$$J=\nu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Lv)^2\,dx,\quad I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[k^2v^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx,\quad P=\int\limits_0^d Qv^2\,dx\,\frac{E^\circ}{\rho}$$

При $Q=\mathrm{const}$ задача (3.5), (3.6) имеет точное решение

$$\lambda_{1,2}=\frac{\nu}{2}\left(-k^2\pm\sqrt{k^4+\frac{4QE^\circ}{\rho\nu}}\right)\tag{3.7}$$

Собственные функции, отвечающие собственным значениям (3.7), не приводим ввиду громоздкости записи.

Таким образом, если плотность заряда уменьшается в направлении движения, то движение слоя неустойчиво. Причем неустойчивость имеет безпороговый характер, т. е. она развивается при любых E°, Q. Это говорит о том, что при $\nabla q_0 \uparrow\downarrow \mathbf{E}^\circ$ ($\nabla q_0 \uparrow\uparrow \mathbf{E}^\circ$) нелинейные дрейфовые волны положительных (отрицательных) зарядов во внешнем поле не образуются. Из (3.7) следует, что для наиболее опасных возмущений

$$\lambda_*=\frac{\nu}{2}k_*^2,\qquad k_*=\sqrt[4]{\frac{4QE^\circ}{3\rho\nu^2}}$$

Отметим, что декременты нарастания возмущений не зависят от толщины слоя d, а собственные функции зависят. В силу того что собственные функции, отвечающие (3.7), экспоненциально спадают по мере удаления от границ слоя, можно сделать вывод, что гидродинамическое движение, развивающееся вследствие неустойчивости слоя, локализуется в пределах области, охватываемой движущимся слоем.

В силу диффузионного размытия краев заряженного облака [23] можно ожидать, что любое разбегание зарядов индуцирует гидродинамическое движение. Интенсивность и размеры области движения зависят, как указывалось, от толщины слоя неоднородности объемного заряда и времени движения. Если толщина x_0, где $dq_0/dx<0$, значительно меньше толщины слоя d, где $dq_0/dx \geqslant 0$, а время движения мало: $x_0/d \ll 1$, $\lambda_1 t \ll 1$, то гидродинамическим движением, вызванным неустойчивостью, можно пренебречь. Таким образом, при измерении подвижности по методу измерения пролетного времени кроме (3.4) необходимо иметь в виду указанные условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г. А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
3. *Мелчер Дж.* Электрогидродинамика.– Магнитная гидродинамика, 1974, № 2, с. 3–30.
4. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков (область слабых полей). М.– Л.: Гостехиздат, 1949. 500 с.
5. *Никурадзе А.* Жидкие диэлектрики. М.– Л.: ОНТИ ИКТ П СССР, 1936. 236 с.
6. *Мельчер Дж., Тейлор Дж.* Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений.– В кн.: Механика: Период. сб. перев. иностр. ст., 1971, № 5, с. 66–99.
7. *Янтовский Е. С., Апфельбаум М. С.* О насосном действии тонкого высоковольтного электрода в слабоприводящей диэлектрической жидкости.– Ж. техн. физ., 1980, т. 50, № 7, с. 1511–1520.

8. *Стишков Ю. К.* Наблюдение изотермической конвекции в электрическом поле плоского конденсатора.– Электрон. обработка материалов, 1972, № 1, с. 61–62.
9. *Петриченко Н. А.* Давление при электрогидродинамических течениях в изолирующих жидкостях.– Электрон. обработка материалов, 1979, № 5, с. 43–45.
10. *Петриченко Н. А.* Изменение давления в электроизолирующей жидкости у острия игольчатого электрода при наложении электрического поля.– Электрон. обработка материалов, 1976, № 6, с. 35–40.
11. *Копылов Ю. А.* Основные закономерности электропроводности высокоомных органических жидкостей при активационном характере контактных процессов.– Тр. Днепропетровск. с.-х. ин-та, Т. 27. Органические полупроводящие жидкости, 1974, с. 6–35.
12. *Адамчевский И.* Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л.: Энергия, 1972. 296 с.
13. *Казацкая Л. С., Обернихина Л. Ф., Покрышев В. Р., Солодовниченко И. М.* Высоковольтная поляризация хлорзамещенных метана.– Электрон. обработка материалов, 1979, № 3, с. 53–57.
14. *Казацкая Л. С., Покрышев В. Р., Обернихина Л. Ф.* Исследование релаксационных процессов в жидких органических полупроводниках.– Электрон. обработка материалов, 1980, № 4, с. 56–59.
15. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.
16. *Тарапов И. Е.* Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред: Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Днепропетровск, 1979. 39 с.
17. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
19. *Гогосов В. В., Полянский В. А.* Волны в электрогидродинамике.– В кн.: 7-е Рижск. совещ. по магнит. гидродинамике. Т. 1. Рига, 1972, с. 227–228.
20. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 568 с.
21. *Felici N. J.* D. C. conduction in liquid dielectries (pt I).– Direct Current, 1971, v. 2, № 3, p. 90–99.
22. *Gallagher T. J.* Simple dielectric liquids, mobility, conduction and breakdown. Oxford: Clarendon Press, 1975. 154 p.
23. *Ватажин А. Б.* Сглаживание разрывов электрического заряда в электрогидродинамике в результате диффузионных процессов.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 59–67.
24. *Бучин В. А., Ватажин А. Б., Пудов М. Б.* Электрическая зарядка тел вследствие выноса из них заряженных частиц гидродинамическим потоком.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 94–103.
25. *Hewish T. R.* The effects of induced motion on low-stress mobility measurements in liquid dielectrics subjected to charge injection.– Proc. 6th Int. Conf. Conduct. and Breakdown Dielectr. Liq. Mont.– Saint – Aignan, 24–28 July, 1978. Dreux, p. 341–344.
26. *Жакин А. И., Тарапов И. Е.* Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 20–26.

Харьков

Поступила в редакцию
12.V.1981