

УДК 532.526

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

ГУРЕВИЧ Ю. Г.

В работах [1–3] и др. исследовалось продольное обтекание двугранного угла при больших числах Рейнольдса. В [4] было рассмотрено течение в окрестности угла, образованного пересечением плоскости и вогнутой цилиндрической поверхности и в основном уделялось внимание тому, как формируется трехмерный пограничный слой на плоскости вблизи угла. Было показано, что наличие кривизны одной из перескающих поверхностей качественно меняет картину течения. В данной работе исследуется формирование течения на вогнутой цилиндрической поверхности вблизи такого угла и высказаны соображения о том, как происходит перестройка течения в окрестности угла, например, в канале прямоугольного сечения, который имеет начальный прямой участок, а затем участок поворота с разрывом кривизны линии пересечения вогнутой и плоской сторон канала. Приведены некоторые результаты экспериментального исследования течения вблизи линии пересечения плоской и искривленных (вогнутой и выпуклой) стенок поворотного канала прямоугольного сечения.

1. Рассмотрим продольное обтекание угла, образованного пересечением вогнутой цилиндрической поверхности с радиусом $R = \text{const}$ и плоскости, несжимаемой нетеплопроводной жидкостью.

Уравнения Навье – Стокса и неразрывности в цилиндрической системе координат r, θ, z в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{u_i}{h_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{u_k u_i}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} - \frac{u_i^2}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{1}{h_k} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \text{Re}^{-1} \Delta u_k \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (u_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial (u_2 h_1 h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial (u_3 h_1 h_2)}{\partial x_3} = 0$$

$$\text{Re} = u_\infty R \nu^{-1}; \quad h_1 = r, \quad h_2 = h_3 = 1$$

Далее введены обозначения: $x_1 = \theta, x_2 = y, x_3 = r, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$. u_i – компоненты вектора скорости жидкости, ν – кинематическая вязкость, суммирование по k в (1.1) отсутствует.

Обтекаемые поверхности будут описываться уравнениями $r=1$ для цилиндрической поверхности и $y=0$ для плоскости.

Проведенные в [4] оценки отвечали на вопрос о том, как формируется пограничный слой на пластине, ограниченной вогнутой стороной цилиндрической поверхности, но остается неясным вопрос о течении в пограничном слое на вогнутой поверхности вблизи угла. Рассмотрим область 1 (фиг. 1) с размером $\delta \sim \text{Re}^{-2/3}$, примыкающую к углу. Для уравнений, описывающих течение в этой области, должно быть поставлено граничное условие, состоящее в асимптотическом сращивании решения с автомодельным решением уравнений трехмерного пограничного слоя, описывающих течение в области 2 [4]. В переменных для области 1 это условие принимает вид (f и φ – известные функции)

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad w' = \alpha^{1/2} f(\beta \alpha^{-1/4}), \quad u = \varphi(\beta \alpha^{-1/4})$$

$$w' = w \text{Re}^{1/3}, \quad \alpha = (1-r) \text{Re}^{2/3}, \quad \beta = y \text{Re}^{2/3}$$

и определяет поток массы через площадку, нормальную к направлению r с размером $\delta \sim \text{Re}^{-2/3}$, расположенную на расстояниях порядка $\text{Re}^{-2/3}$ от угла. Величина этого расхода $Q \sim \delta w \sim \text{Re}^{-1}$. Так как в уравнения для области 1 не входят производные по θ [4], то в силу уравнения сохранения массы ее поток через площадку, нормальную к направлению y , в области 1 также имеет порядок Re^{-1} . Благодаря этому течение в некоторой области 3 (фиг. 1), размер которой по порядку величины больше размера области 1, развивается как бы под действием стока интенсивностью $Q \sim \text{Re}^{-1}$, тогда на расстояниях $\Delta y \sim \text{Re}^{-1/2}$ от угла в уравнении неразрывности для пограничного слоя на цилиндрической поверхности становится существенным член $\partial v / \partial y \sim 1$, который отсутствует в уравнении для двумерного пограничного слоя. При $\Delta y \gg \text{Re}^{-1/2}$ член $\partial v / \partial y \ll 1$ и выполняются обычные уравнения двумерного пограничного слоя.

Рассмотрим область 3 (фиг. 1) с размером порядка $\text{Re}^{-\tau}$, где $1/2 < \tau < 2/3$. Эта область является промежуточной между областью 1 и областью 4 двумерного пограничного слоя.

Пусть δ_r и δ_y безразмерные масштабы длин вдоль направлений r и y соответственно, на которых составляющая скорости u меняется на порядок своей величины, а $\xi \sim \text{Re}^{-\tau}$ — характерный размер изменения составляющих скорости $v \sim w \sim \text{Re}^{-1+\tau}$. Введем величину $\delta = \min \{ \delta_r, \delta_y \}$. Тогда из условия равенства вязких и инерционных членов в первом уравнении системы (1.1) получим $\delta \sim \text{Re}^{-\tau}$.

Продифференцируем второе и третье уравнения системы (1.1) по r и y соответственно. Приравнявая далее члены с давлением, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \sim \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{r} \right) \sim \delta_y^{-1} \sim \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \sim \text{Re}^{-2+4\tau}$$

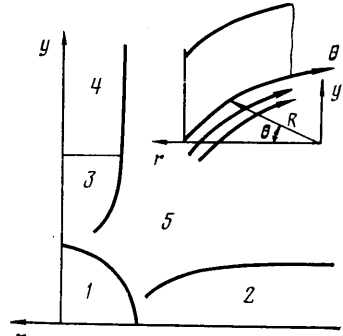
Отсюда следует, что $\delta = \delta_r$ и $\delta_r \ll \delta_y$.

Таким образом, толщина «пограничного» слоя, в котором вязкие силы порядка инерционных и $u \sim 1$, имеет размер $\delta_r \sim \text{Re}^{-\tau}$ и уменьшается по мере приближения к углу от величины $\delta_r \sim \text{Re}^{-1/2}$ в двумерном пограничном слое на вогнутой поверхности в области 4 до величины $\delta_r \sim \text{Re}^{-2/3}$ в области 1. При этом характерный размер изменения скорости u по координате y изменяется от величины $\delta_y \sim 1$ в области 4 до $\delta_y \sim \text{Re}^{-2/3}$ в области 1.

Положим $\tau = 1/2$ и, оценив все члены в уравнениях (1.1), пренебрегая малыми при $\text{Re} \rightarrow \infty$, получим уравнения, которые описывают течение в области 3. При этом входящее в первое уравнение слагаемое $v \partial u / \partial y \sim \text{Re}^{-1/2}$ оказывается малым, а слагаемое в уравнении неразрывности $\partial v / \partial y$ имеет порядок единицы и сохраняется.

Вводя новые растянутые переменные, получим систему уравнений, описывающую течение в области 3:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial \theta} + w^* \frac{\partial u}{\partial \xi} &= - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial p_1}{\partial \xi} &= -u^2 \\ u \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} &= - \frac{\partial p_2}{\partial \eta} - \frac{\partial p_1}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} \\ u \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial \xi} &= - \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$



Фиг. 1

$$\frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0; \quad p = p_0(\theta) + p_1(\xi, \theta) \text{Re}^{-1/2} + p_2(\xi, \theta, \eta) \text{Re}^{-1}$$

$$v^* = v \text{Re}^{1/2}, \quad w^* = -w \text{Re}^{1/2}, \quad \eta = y \text{Re}^{1/2}, \quad \xi = (1-r) \text{Re}^{1/2}.$$

2. Уравнения для областей углового течения 1, 2, 3 справедливы на некотором удалении от передних кромок пластины и цилиндрической поверхности, там где характерный размер изменения параметров потока по координате θ определяется характерным размером задачи, т. е. радиусом кривизны угловой линии. Рассмотрим течение в поворотном канале, который состоит из входного прямого участка (на котором нарастает пограничный слой) и участка поворота. Тонкий пограничный слой в угле между вогнутой и плоской сторонами канала с $\delta \sim \text{Re}^{-2/3}$ сформируется на некотором расстоянии от начала участка поворота. В начале поворота толщина пограничного слоя в угловой области δ_0 определяется числом Re , посчитанным по длине начального участка $\delta_0 \sim \text{Re}^{-1/2}$. Порядок величины скорости w определяется величиной u^2/r из третьего уравнения системы (1.1). Тогда на расстояниях порядка δ_0 от стенки $w \sim \delta_0^{1/2}$ и конвективные члены в первом уравнении Навье – Стокса имеют порядок $wu/\delta_0 \sim \text{Re}^{1/4}$. В то же время вязкие члены – порядка единицы.

Отсюда следует, что на участке перехода от толстого пограничного слоя к тонкому имеется область эффективно невязкого течения. Физически утоньшение пограничного слоя обусловлено наличием поперечного градиента давлений. Частицы жидкости, заторможенные в пограничном слое, на прямом участке канала отходят от угла под действием градиента давления $\partial p/\partial r$. На их место из внешнего потока поступают новые частицы с высоким полным давлением, для которых градиент давления компенсируется центробежной силой u^2/r . Таким образом происходит замена заторможенных частиц частицами из внешнего потока, следовательно, и утоньшение пограничного слоя. Это происходит до тех пор, пока вязкие силы не станут одного порядка с силами давления, что соответствует тонкому пограничному слою с $\delta \sim \text{Re}^{-2/3}$.

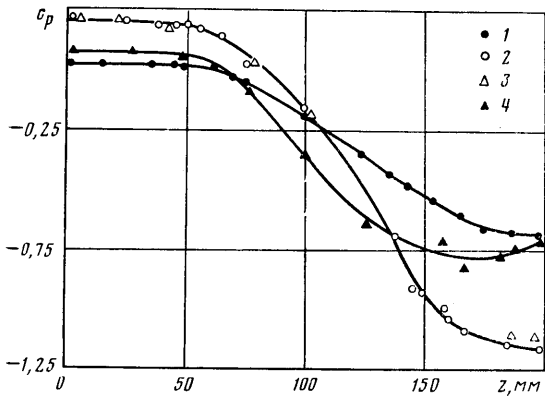
Так как утоньшение определяется выходом заторможенных частиц из угла под действием градиента давления, то величина $\partial u/\partial \theta \sim \partial w/\partial r$ и $\theta \sim \text{Re}^{-1/4}$, что дает для длины области перехода оценку $L \sim R \cdot \text{Re}^{-1/4}$. Тогда при решении уравнений трехмерного пограничного слоя на плоской стенке канала граничные условия на линии пересечения поверхностей при переходе от прямого участка канала к повороту в масштабах задачи имеют разрыв от условий, соответствующих течению в угле, образованном двумя плоскостями, до условий, определяемых автомодельным решением уравнений в области 2 [4].

Отметим, что приведенное выше рассмотрение касалось несжимаемой нетеплопроводной жидкости. Однако наличие теплопроводности не должно качественно повлиять на картину течения. В связи с этим в окрестности линии пересечения вогнутой цилиндрической поверхности и плоскости, по-видимому, должен наблюдаться значительный рост тепловых потоков.

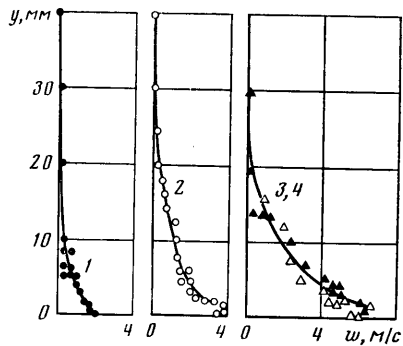
3. На фиг. 2–4 представлены некоторые результаты экспериментального исследования пограничного слоя на стенках криволинейного канала прямоугольного сечения, подтверждающие полученные выше теоретические результаты. Поперечное сечение канала имело размеры 100×100 мм. Канал состоял из входного коллектора, прямого участка длиной 1000 мм, участка поворота с радиусом кривизны средней линии 150 мм и углом поворота 90° и прямого выходного участка длиной 700 мм. Толщина пограничного слоя на стенках канала перед участком поворота $\delta_0 \approx 12$ мм. Скорость в ядре на прямом участке $u_\infty \approx 18$ м/с. Измерения проводились трехтрубчатым микронасадком с высотой носика 0,25 мм. Насадок располагался на расстояниях 25 мм от линии пересечения сторон канала, т. е. в областях, где составляющие скорости, нормальные к плоскости носика насадка, были малы и не влияли на его показания.

На фиг. 2 представлено распределение статического давления на стенках канала в его поперечных сечениях на участке поворота при различных значениях угла поворота θ . Здесь и далее на фигурах кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям углов $\theta = 0; 33; 50; 90^\circ$. Коэффициент давления $c_p = 2(p - p_\infty)/\rho u_\infty^2$, p_∞ и u_∞ – давление и скорость в прямом участке канала.

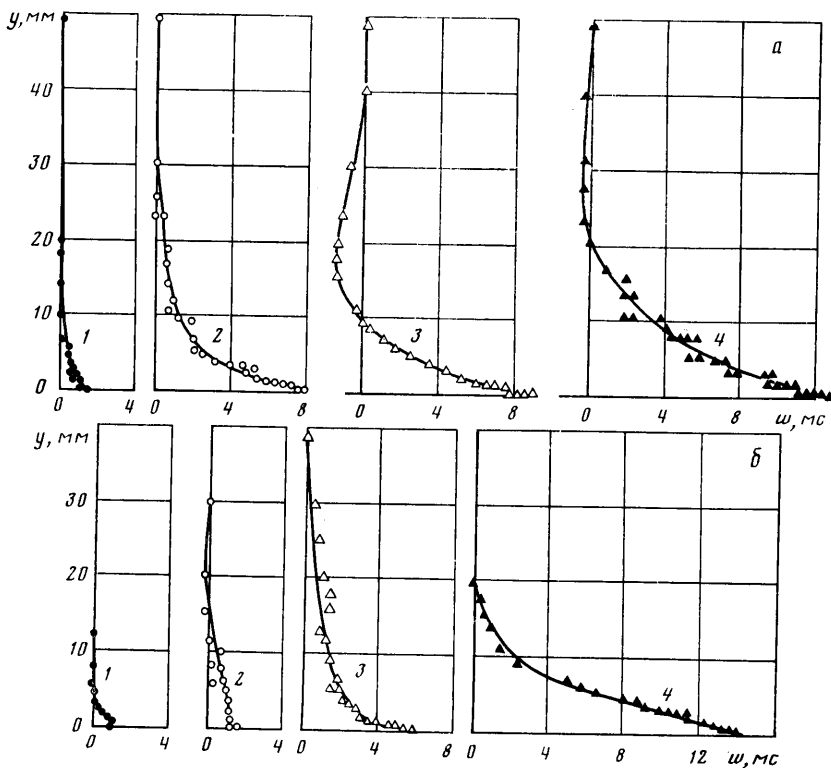
Координата $z=0$ соответствует середине вогнутой стороны канала, $z=50$ мм – линии пересечения вогнутой и плоской сторон; $z=150$ мм – линии пересечения плоской и выпуклой сторон.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Видно, что на вогнутой стороне канала поперечный градиент давления отсутствует вплоть до ее пересечения с плоской стенкой, что свидетельствует о малости перетекания на вогнутой стороне вблизи угла. Измерения профилей скорости на вогнутой стороне канала на расстоянии 25 мм от угла также показало, что перетекания в этой области отсутствуют.

На фиг. 3 показано распределение поперечной составляющей скорости w , направленной от вогнутой стороны канала к выпуклой в пограничном слое на плоской стенке вблизи вогнутой поверхности канала. При $\theta \geq 30^\circ$ профиль скорости w становится автомодельным, что подтверждает вывод об автомодельности пограничного слоя на плоскости вблизи вогнутой поверхности [4].

Приведенные выше оценки также объясняют известный в литературе эффект утоньшения пограничного слоя на плоской стенке в криволиней-

ном канале [5] и в межлопаточном канале решетки профилей [6]. В этих случаях утоньшение пограничного слоя на плоской стенке происходит быстрее у вогнутой стороны, чем у выпуклой. Ясно, что при достаточно большом угле поворота потока θ пограничный слой на плоской стенке будет зависеть от автомодельного решения в области 2 (фиг. 1) и практически не будет зависеть от распределения скорости в сечении $\theta=0$. Это было замечено в работе [7], где пограничный слой на плоской стенке межлопаточного канала резко утоньшался и был ламинарным независимо от того, был ли «набегающий» пограничный слой ламинарным или турбулентным.

Таким образом, представленные результаты показывают, что наличие кривизны одной из пересекающихся поверхностей качественно меняет картину течения вблизи угла. Пограничный слой в этой области (т. е. слой, в котором существенна вязкость) имеет более сложную структуру, чем пограничный слой вблизи двугранного угла. Его толщина падает по мере приближения к линии пересечения поверхностей до величины порядка $Re^{-1/2}$, а поперечные скорости в этой области имеют величины порядка $Re^{-1/2}$.

4. Наряду с рассмотренным выше случаем представляет интерес продольное обтекание угла, образованного плоскостью и выпуклой цилиндрической поверхностью, где течение носит качественно другой характер в связи с тем, что поперечные скорости v и w имеют порядок единицы.

На фиг. 4 показано распределение поперечной составляющей скорости в пограничном слое на плоской стенке вблизи выпуклой стороны (а) и на выпуклой стороне вблизи плоской стенки (б) канала.

Видно, что поперечное течение на плоской стенке и на выпуклой стороне вблизи угла развивается практически одинаково. При этом профиль поперечной скорости «переносится» через угол. Экспериментальное исследование показало, что и профиль продольной составляющей скорости ведет себя аналогично. Толщина пограничного слоя в этой области возрастает примерно в 2 раза по сравнению с толщиной пограничного слоя на плоскости. Полученные результаты подтверждают предположение Е. Ю. Шальмана о переносе профилей скорости в пограничном слое при его натекании на выпуклую сторону канала.

Автор благодарит Г. М. Бам-Зеликовича за постоянное внимание к работе и А. И. Рубана за ряд крайне полезные замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962, 479 с.
2. Zamir M., Young A. D. Experimental investigation of the boundary layer in a stream-wise corner.— J. Aeronaut. Quart., 1970, v. 21, № 4, p. 313–339.
3. Rübin S. G., Grossman B. Viscous flow along a corner: Numerical solution of the corner layer equations.— Q. Appl. Math., 1971, v. 29, № 2, p. 169.
4. Гуревич Ю. Г. Пограничный слой в окрестности угла между вогнутой цилиндрической поверхностью и плоскостью.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1981, № 2, с. 160–165.
5. Фрэнсис, Пирс. Экспериментальное изучение турбулентных пограничных слоев со скосом в потоках с низкой скоростью.— Тр. амер. об-ва инж. мех. сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. 1967, т. 89, № 3, с. 161–174.
6. Лэнгстон, Нэйс, Хуппер. Трехмерное течение в канале турбинной решетки. Тр. амер. об-ва инж. мех. Сер. А., Энергетические машины и установки, 1977, № 1, т. 99, с. 22–31.
7. Senoo Y. The boundary layer on the end wall of turbine nozzle cascade.— Trans. ASME., 1958, v. 80, № 5, p. 1711–1720.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.1981