

УДК 532.517.4  
532.529

**ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА  
ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙ**

**ГАВИН Л. Б., НАУМОВ В. А., НИКУЛИН Н. М.**

Конечно-разностным методом на основе модели турбулентности с использованием уравнения переноса энергии турбулентных пульсаций несущей фазы проведен численный расчет осесимметричной двухфазной струи. Учтено влияние частиц дисперсной фазы на величину энергии турбулентных пульсаций.

В [1–3] предложен метод расчета турбулентных двухфазных струй, основанный на теории пути смещения, в котором учтено влияние частиц на величину пульсационных скоростей несущей фазы. Этот метод использован в [4, 5] для расчета струй с твердыми частицами и каплями [6].

При расчетах сложных однофазных течений успешно применяются модели турбулентности с уравнениями для вторых моментов поля пульсационных скоростей [7, 8], которые представляются перспективными для разработки расчетных методов и в двухфазных течениях [9, 10].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается истечение осесимметричной двухфазной турбулентной изобаричной струи из отверстия конечного размера в спутный поток. Несущая фаза — несжимаемый газ, дисперсная фаза — мелкие сферические частицы одинакового радиуса  $r$ , среднее расстояние между которыми много меньше характерного размера течения. Тогда для описания движения двухфазной среды может быть использована модель взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов [11].

В приближении теории свободного пограничного слоя для осредненных величин исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(yu_1) + \frac{\partial}{\partial y}(yv_1) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} [y(\rho_2 v_2 + \langle \rho_2' v_2' \rangle)] = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho_1 \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \rho_1 \langle u_1' v_1' \rangle) = -F_x \quad (1.3)$$

$$\rho_2 \left( u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \langle \rho_2' v_2' \rangle \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \rho_2 \langle u_2' v_2' \rangle) = F_x \quad (1.4)$$

Здесь  $x, y$  — продольная и поперечная оси координат в струе;  $u, v$  — проекции скорости на оси  $x, y$  соответственно;  $\rho$  — распределенная плотность;  $F_x$  — проекция силы межфазного взаимодействия на ось  $x$ ; индексы «1» и «2» относятся к параметрам несущей и дисперсной фаз соответственно.

Для малых объемных долей дисперсной фазы  $\alpha_2$  справедливо

$$\rho_1 = \rho_1^0 (1 - \alpha_2) \approx \rho_1^0 \quad (1.5)$$

Здесь  $\rho_1^0, \rho_2^0$  — истинные плотности фаз,  $\rho_2 = \rho_2^0 \alpha_2$ .

Аналогично [4] принимаем условие равенства осредненных поперечных скоростей частиц и газа  $v_1 = v_2$ .

Для небольших относительных чисел Рейнольдса  $Re = 2r(u_1 - u_2)/\nu$  можно считать справедливым линейный закон взаимодействия частицы с газом [12] и тогда, пренебрегая пульсационными составляющими в  $F_x$ , запишем

$$F_x = \gamma(u_1 - u_2)\rho_2, \quad \gamma = 9\beta\nu\rho_1^0/2r^2\rho_2^0 \quad (1.6)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость несущей фазы;  $\beta$  — коэффициент, учитывающий отличие закона сопротивления сферы в турбулентном потоке от стоксовского, для которого  $\beta = 1$ .

**2. Замыкание системы уравнений.** Для представления корреляционно-го момента  $\langle u_1'v_1' \rangle$  используем соотношение Буссинеска

$$-\langle u_1'v_1' \rangle = \nu_i \partial u_1 / \partial y \quad (2.1)$$

Турбулентную вязкость газовой фазы  $\nu_i$  определяем по гипотезе Колмогорова [13]

$$\nu_i = C_e L \sqrt{E}, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle u_{i1}'^2 \rangle \quad (2.2)$$

Здесь  $E$  — энергия турбулентных пульсаций несущей фазы, которая в нашем случае должна определяться с учетом влияния частиц;  $C_e$  — эмпирическая константа;  $L$  — интегральный масштаб турбулентности, который будем определять в каждом сечении согласно [8]  $L = C_l y_u$ , где  $y_u$  — поперечная координата, соответствующая половинному значению продольной скорости газа на оси струи;  $C_l$  — эмпирическая константа.

Для представления корреляционного момента  $\langle u_2'v_2' \rangle$  используем уравнение одномерного движения одиночной частицы в поле стационарной, локально однородной и изотропной турбулентности [14]

$$u_{2i}'(t) = u_{2i}'(0) \exp(-\gamma t) + \gamma \exp(-\gamma t) \int_0^t \exp(\gamma \tau) u_{1i}'[h(\tau), \tau] d\tau \quad (2.3)$$

где  $u_{1i}'[h(\tau), \tau]$  — пульсационная составляющая эйлеровой скорости несущей фазы вдоль траектории частицы;  $h(\tau)$  — смещение частицы.

Перемножая пульсационные составляющие скорости частицы, определяемые по формуле (2.3), и осредняя по ансамблю частиц, получим [15]

$$H_{ij}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle u_{2i}'(t) u_{2j}'(t+\tau) \rangle = \frac{\gamma}{2} \langle u_{1i}' u_{1j}' \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma|\tau-s|) R_{ij}(s) ds \quad (2.4)$$

$$R_{ij}(s) = \langle u_{1i}'(t) u_{1j}'(t+s_1) \rangle / \langle u_{1i}'(t) u_{1j}'(t) \rangle \quad (2.5)$$

где  $R_{ij}(s)$  — эйлерова пространственно-временная корреляция скоростей газа вдоль траектории частицы может быть аппроксимирована зависимостью  $R_{ij}(s) = \exp(-a_{ij}s)$ , причем  $a_{ij}$  определяется не только свойствами потока, но и характеристиками частиц.

Тогда из (2.4) после выполнения интегрирования следует

$$H_{12}(0) = \langle u_2'v_2' \rangle = \gamma(a_{12} + \gamma)^{-1} \langle u_1'v_1' \rangle \quad (2.6)$$

В соответствии с экспериментальными данными [16] и аналогично [9] принимаем

$$-\langle \rho_2' v_2' \rangle = \nu_t \text{Sc}^{-1} \partial \rho_2 / \partial y \quad (2.7)$$

где  $\text{Sc}$  — число Шмидта.

**3. Уравнение переноса энергии турбулентных пульсаций.** Для расчета турбулентной вязкости по формуле (2.2) необходимо определить энергию турбулентных пульсаций несущей фазы с учетом влияния частиц как результат решения уравнения [14]

$$\sum_i u_{i1} \frac{\partial E}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial E}{\partial x_j} - \frac{\langle u_{ij}' p' \rangle}{\rho_1} - \left\langle u_{ij}' \sum_i \frac{u_{i1}'^2}{2} \right\rangle \right] - \sum_{i,j} \langle u_{i1}' u_{ij}' \rangle \frac{\partial u_{i1}'}{\partial x_j} - \nu \sum_{i,j} \left\langle \left( \frac{\partial u_{i1}'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle - D \quad (3.1)$$

$$D = \frac{1}{\rho_1} \sum_i \langle F_i' u_{i1}' \rangle \quad (3.2)$$

Здесь член  $D$  обусловлен присутствием частиц.

Представляя пульсацию силы межфазного взаимодействия по закону линейного взаимодействия и подставляя в (3.2), аналогично [9] получим

$$D = \frac{\gamma}{\rho_1} \sum_i [\langle u_{i1}' (u_{i1}' - u_{2i}') \rangle \rho_2 + (u_{i1} - u_{2i}) \langle u_{i1}' \rho_2' \rangle + \langle u_{i1}' \rho_2' (u_{i1}' - u_{2i}') \rangle] \quad (3.3)$$

В [14] показано, что для достаточно мелких частиц второе слагаемое в (3.3) мало, тройной корреляцией в (3.3) будем пренебрегать. Умножая обе части (2.3) на  $u_{i1}'(t)$  и осредняя по ансамблю частиц, получим

$$\langle u_{i1}'(t) u_{2i}'(t) \rangle = \frac{\gamma}{a_{ii} + \gamma} \langle u_{i1}'^2 \rangle \{1 - \exp[-(a_{ii} + \gamma)t]\} \quad (3.4)$$

Для достаточно большого времени  $t$  вторым слагаемым в правой части (3.4) можно пренебречь. Далее предполагаем  $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ .

Для определения  $a_{11}$  в [17] предложена аппроксимация эйлеровой пространственно-временной корреляции

$$R_{11}(t) = R_l(t) R_e [\langle x^2(t) \rangle^{1/2} - \langle y^2(t) \rangle^{1/2}] \quad (3.5)$$

Здесь  $R_l$  — лагранжева корреляция;  $R_e$  — эйлерова пространственная корреляция;  $\langle x^2(t) \rangle$ ,  $\langle y^2(t) \rangle$  — среднеквадратичное смещение элементарного объема несущей фазы и частицы, находящихся в одной точке в начальный момент времени.

Аппроксимируя оба множителя правой части (3.5) экспоненциальными зависимостями, получаем уравнение для определения  $a_{11}$

$$\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{t}{T_l} - \frac{1}{\Lambda_e} [\langle x^2(t) \rangle^{1/2} - \langle y^2(t) \rangle^{1/2}] \right\} dt = \frac{1}{a_{11}} \quad (3.6)$$

решение которого зависит от  $\Lambda_e/\Lambda_l$  и  $K$  [17], где  $\Lambda_e$ ,  $\Lambda_l$  — эйлеров и лагранжев пространственные интегральные масштабы;  $K = 2/(\gamma T_l)$ ;  $T_l$  — лагранжев временной интегральный масштаб.

Используя известные гипотезы А. Н. Колмогорова, уравнение (3.1) в приближении свободного пограничного слоя представим в виде

$$u_1 \frac{\partial E}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\nu_t}{C_q} \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - C_d \frac{E^{3/2}}{L} - \frac{2\gamma a_{11}}{\rho_1 (a_{11} + \gamma)} \rho_2 E \quad (3.7)$$

где  $C_q$ ,  $C_d$  — эмпирические константы.

Отметим, что последний член в правой части уравнения (3.7) можно трактовать как дополнительную диссипацию, обусловленную взаимодей-

ствием несущего потока с частицами и пропорциональную концентрации дисперсной фазы. В предельном случае при  $\alpha_2=0$  уравнение (3.7) принимает вид известного уравнения для однофазной струи.

**4. Граничные условия.** Для системы уравнений (1.1)–(1.4), (3.7) граничные условия имеют вид

$$y=0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial \rho_2}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial y} = v = 0 \quad (4.1)$$

$$y=\delta; \quad u_1=u_2=u_\delta, \quad \rho_2=\rho_{2\delta}, \quad E=E_\delta \quad (4.2)$$

Здесь  $\delta$  — внешняя граница струи;  $u_\delta$  — скорость спутного потока;  $\rho_{2\delta}$ ,  $E_\delta$  — плотность частиц и энергия турбулентных пульсаций в спутном потоке, соответственно.

Помимо граничных условий на оси струи и в спутном потоке задаются начальные профили  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $E$  на выходе из сопла.

**5. Численный расчет и сравнение с экспериментом.** Система уравнений (1.1)–(1.4), (3.7) с граничными условиями (4.1)–(4.2) решалась конечно-разностным методом с использованием неявной шеститочечной схемы [18]. Точность расчета контролировалась с помощью интегральных законов сохранения избыточного импульса двухфазной струи и расхода частиц.

Оценка применимости предложенной модели была проведена путем сравнения результатов расчета с данными работы [19], в которой выполнено экспериментальное исследование газовой струи с каплями масла. На первом этапе значения эмпирических констант были определены из условия наилучшего совпадения результатов расчета при  $\alpha_2=0$  с экспериментальными данными [19] для однофазной струи. Было получено  $C_s=0,08$ ,  $C_l=1,3$ ,  $C_d=1,0$ ,  $C_q=0,8$ , что близко к значениям, приведенным в [7] для осесимметричных струй.

Далее найденные константы были использованы в расчете двухфазной струи при условиях истечения [19] с монодисперсными каплями масла радиусом  $r=6,5 \cdot 10^{-6}$  м. Скорости обеих фаз  $u_{1z}=u_{2z}=61,5$  м/с, индекс «z» относится к параметрам на срезе сопла на оси струи. Начальная турбулентная энергия  $E_z/u_{1z}^2=0,2 \cdot 10^{-2}$ . Расчет проводился при давлении  $p=10^5$  Н/м<sup>2</sup> и температуре  $T=300$  К. Спутный поток предполагался равновесным по скоростям. Спутность по всем параметрам принималась равной 1% от соответствующих значений на оси струи на срезе сопла.

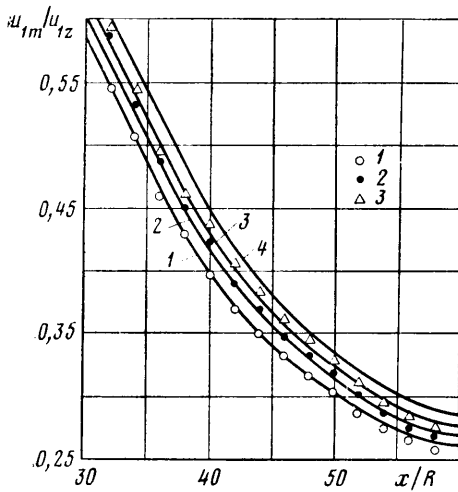
По экспериментальным данным [20] для струйных течений  $\Lambda_e/\Lambda_t \approx 1,6$ . Тогда решение уравнения (3.6) для рассматриваемых частиц таково, что  $a_{11}T_t \approx 1$ . Аналогично работе [16] принимаем  $T_t=C_t L/E^{1/2}$ . Значение константы  $C_t$  было найдено из условия совпадения результатов расчета с экспериментальными данными и составило  $C_t=0,06$ .

В первом приближении принимаем  $a_{12}=ba_{11}$ , где  $b$  — коэффициент, учитывающий отличие соответствующих корреляций.

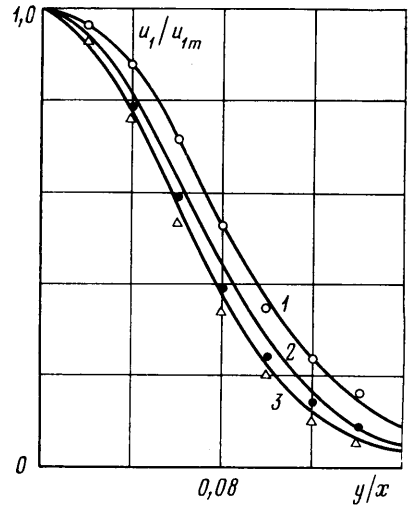
Значение числа Шмидта для рассматриваемых частиц [21] принималось  $Sc=0,45$ .

На фиг. 1–4 приведено сравнение результатов численных расчетов полей газодинамических величин в двухфазных струях с экспериментальными данными работы [19].

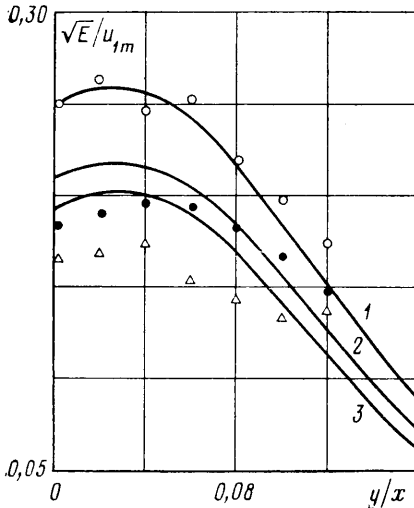
На фиг. 1 и 2 представлены распределения продольной скорости несущей фазы на оси струи  $u_{1m}$  и в поперечном сечении струи, отстоящем от среза сопла на расстоянии  $x/R=40$  для различных удельных расходов частиц  $G_z=\rho_{2z}u_{2z}/\rho_{1z}u_{1z}$ . Здесь и далее: 1 — однофазная струя; 2 —  $G_z=0,171 \cdot 10^{-2}$ ; 3 —  $G_z=0,244 \cdot 10^{-2}$ ; 4 —  $G_z=0,5 \cdot 10^{-2}$ ; сплошные линии — результаты расчета. Видно, что с увеличением концентрации дисперсной фазы уменьшаются как спад скорости газа на оси струи, так и степень заполнения профиля скорости поперек струи. Такого рода влияние частиц на поле скоростей несущей фазы отмечено в [3]. С увеличением удельного



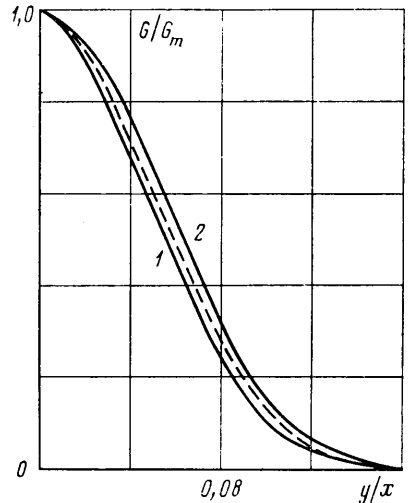
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

расхода частиц на срезе сопла струя становится дальнобойнее и уже.

На фиг. 3 приведены распределения энергии турбулентных пульсаций несущей фазы поперек струи в сечении  $x/R=40$ . С увеличением  $G_z$  интенсивность турбулентности падает, что объясняется изменением поля скоростей несущей фазы, а также возрастанием дополнительной диссипации в (3.7). В работе [19] измерялась лишь продольная составляющая пульсации скорости несущей фазы, по которой в [9] представлены приближенные профили энергии турбулентных пульсаций. Этим можно объяснить имеющееся различие результатов расчетов и экспериментальных данных.

На фиг. 4 кривыми 1 и 2 представлены профили удельного расхода частиц поперек струи при  $G_z=0,244 \cdot 10^{-2}$  в сечениях  $x/R=40$  и  $x/R=70$  соответственно. Пунктирная линия — профиль удельного расхода частиц, полученный в работе [19] усреднением по большому количеству экспериментов в различных сечениях.

Таким образом, результаты численного расчета находятся в согласии с экспериментальными данными.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. В. Лапину и Н. И. Акатнову за полезные замечания и обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н.* О влиянии примеси твердых частиц или капель на структуру турбулентной газовой струи.— Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 5, с. 1052–1055.
2. *Абрамович Г. Н., Бажанов В. И., Гиршович Т. А.* Турбулентная струя с тяжелыми примесями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 6, с. 41–49.
3. *Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А.* Турбулентные струи, несущие твердые или капельно-жидкие примеси.— В кн.: Парожидкостные потоки. Минск, 1977, с. 155–175.
4. *Васильков А. П.* Расчет турбулентной двухфазной изобарической струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 57–63.
5. *Каргушинский А. И., Фришман Ф. А.* Расчет основного участка двухфазной турбулентной струи.— В кн.: Турбулентные двухфазные течения. Таллин, 1979, с. 137–141.
6. *Гавин Л. Б., Зайцева Н. М., Изотин А. Б., Никулин Н. М.* Теплообмен в двухфазных турбулентных струях.— В кн.: Теплообмен—VI. Материалы 6-й Всес. конф. по теплообмену. Минск, 1980, Т. 5. Минск, 1980, с. 64–68.
7. *Гиневский А. С., Иселевич В. А., Колесников А. В., Лапин Ю. В., Пилипенко В. Н., Секундов А. Н.* Методы расчета турбулентного пограничного слоя.— В кн.: Итоги науки и техники. ВИНТИ. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа. 1978, т. 11, с. 155–304.
8. *Харша П.* Модели переноса кинетической энергии.— В кн.: Турбулентность. Принципы и применения. М.: Мир, 1980, с. 207–261.
9. *Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G.* Numerical calculation of two-phase turbulent round jet.— Int. J. Multiphase Flow, 1977, v. 3, № 3, p. 223–234.
10. *Дерезяшко Г. В., Спокойный Ф. Е., Горбис З. Р.* О возможности расчета турбулентного течения газ-инерционные частицы с использованием уравнений вторых моментов поля пульсационных скоростей.— В кн.: Турбулентные двухфазные течения. Таллин, 1979, с. 13–19.
11. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Турбулентность. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
13. *Колмогоров А. Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. Физ., 1942, т. 6, № 1–2, с. 56–58.
14. *Шрайбер А. А.* О влиянии частиц дискретной фазы на интенсивность турбулентности потока газозвеси.— В кн.: Гидромеханика. Вып. 41. Киев: Наукова думка, 1980, с. 100–103.
15. *Pismen L. M., Nir A.* On the motion of suspended particles in stationary homogeneous turbulence.— J. Fluid Mech. 1978, v. 84, № 1, p. 193–206.
16. *Yuu Shinichi, Yasukouchi Naoto, Hirotsawa Yasuo, Jotaki Tomosada.* Particle turbulent diffusion in a dust laden round jet.— AIChE Journal, 1978, v. 24, № 3, p. 509–518.
17. *Шрайбер А. А.* О пульсационном движении мелких частиц дискретной фазы в турбулентных потоках газозвеси.— В кн.: Теплофизика и теплотехника. Респ. межвед. сб.— Киев: Наукова думка, 1973, в. 25, с. 73–79.
18. *Браиловская И. Ю., Чудов Л. А.* Решение уравнений пограничного слоя разностным методом.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. В. 1. М.: Изд-во МГУ, 1962, с. 167–182.
19. *Hetsroni G., Sokolov M.* Distribution of mass, velocity, and intensity of turbulence in a two-phase turbulent jet.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1971, v. 38, № 2, p. 315–327.
20. *Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Связь между коэффициентом диффузии и эйлеровыми характеристиками турбулентности в различных потоках.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 1, с. 74–82.
21. *Goldschmidt V. W., Householder M. K., Ahmadi G., Chuang S. C.* Turbulent diffusion of small particles suspended in turbulent jets.— In: Progr. Heat and Mass Transfer. V. 6. Proc. Int. Symp. Two-Phase Syst., Haifa, 1971. Oxford. с. а., 1972, p. 487–508.

Калининград

Поступила в редакцию  
1.VI.1981