**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 1 • 1983**

УДК 532.516

# ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

ГОЛОВИН А. М., ФОМИНЫХ В. В.

Получено обобщение формул Стокса и Адамара – Рыбчинского на случай стационарного движения твердой сферической частицы или капли в несжимаемой жидкости, вязкость которой экспоненциально зависит от температуры. Показано, что при конечных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее сопротивление определяется эффективной вязкостью, близкой к значению среднего геометрического от значений вязкости на поверхности частицы и вдали от нее.

Рассматривается безынерционное стационарное обтекание сферической частицы однородным потоком несжимаемой жидкости.

На поверхности частицы происходит химическая реакция, сопровождающаяся поглощением или выделением тепла, что вызывает перепад температур между поверхностью частицы и жидкостью вдали от нее.

Предполагается, что скорость химической реакции достаточно высока, чтобы поток реагента лимитировался диффузией, радиус частицы $a$ таков, что числа Рейнольдса, Шмидта и Прандтля при умеренных перепадах температур удовлетворяют условиям:

$$\mathrm{Re}=Ua/\nu\ll 1,\quad \mathrm{Re\,Pr}\ll 1,\quad \mathrm{Re\,Sc}\gg 1,\quad \mathrm{Pr}=\nu/\chi,\quad \mathrm{Sc}=\nu/D$$

Здесь $U$ – скорость натекающего потока на частицу, $\nu$, $D$, $\chi$ – коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и температуропроводности окружающей среды. Предполагается, что эти условия на коэффициенты переноса выполняются как вблизи поверхности частицы, так и вдали от нее.

Движение жидкости, обтекающей частицу, и распределение температуры в жидкости описываются уравнениями:

$$\nabla p=\mu\Delta\mathbf{v}+2(\nabla\mu\nabla)\mathbf{v}+[\nabla\mu\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}]$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,\quad \Delta T=0 \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость движения жидкости, $p$ – давление, $T$ – температура, $\mu$ – коэффициент динамической вязкости.

Считается, что движение жидкости внутри капли характеризуется числами Рейнольдса и Пекле, удовлетворяющими тем же ограничениям, что и для внешней среды. Поэтому уравнения, описывающие движение и поле температуры внутри капли, будут идентичны (1) с заменой всех величин на штрихованные.

Безразмерная массовая концентрация $c$ диффундирующего вещества в окрестности частицы описывается уравнением конвективной диффузии

$$\mathbf{v}\nabla c=D\Delta c$$

Граничные условия:

$$v_{na}=v_{na}'=0,\quad v_{\tau a}=v_{\tau a}',\quad \sigma_{n\tau}=\sigma_{n\tau}',\quad c_a=0 \tag{2}$$

$$T_a=T_a', \quad -\varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_a=-\varkappa'\left(\frac{\partial T'}{\partial n}\right)_a+Qj$$

$$\mathbf{v}\to\mathbf{U}, \quad c\to c_\infty, \quad T\to T_\infty, \quad (|\mathbf{x}|)\to\infty$$

Здесь $\sigma_{n\tau}$ — компонента тензора вязких напряжений, $n$ — внешняя нормаль к поверхности сферы, $\tau$ — единичный вектор в направлении скорости жидкости на поверхности капли, $\varkappa$, $\varkappa'$ — теплопроводность жидкости вне и внутри капли, $j$ — плотность потока диффундирующего вещества к поверхности капли, $Q$ — тепло, выделяющееся при поверхностном реагировании единицы массы диффундирующего вещества, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, проведенный из центра частицы. Величины, относящиеся к жидкости внутри капли, обозначены штрихом, к поверхности капли — снабжены индексом $a$, а к области вдали от нее — индексом $\infty$.

При обтекании твердой сферической частицы вместо содержащихся в (2) условий на поле скоростей на поверхности частицы необходимо потребовать $v_{na}=v_{\tau a}=0$.

Плотность жидкости и коэффициенты диффузии и теплопроводности считаются не зависящими от температуры жидкости и концентрации диффундирующего вещества, а вязкость зависит от температуры следующим образом:

$$\mu=\mu_\infty \exp\left(-A\frac{T-T_\infty}{T_\pi-T_\infty}\right) \tag{3}$$

где $T_\pi$ — температура частицы в точке набегания потока.

Из всех свойств жидкостей именно вязкость обычно наиболее сильно зависит от температуры [1—3]. Эта зависимость чаще всего описывается формулой типа Аррениуса, но при сравнительно небольшом перепаде температур ее можно свести к формуле (3).

Введем безразмерные переменные

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}/U, \quad \mathbf{r}=\mathbf{x}/a, \quad \Phi=(T-T_\infty)/(T_\pi-T_\infty)$$

При больших диффузионных числа Пекле ($\mathrm{Re\,Sc}\gg1$) изменение концентрации будет происходить в тонком диффузионном пограничном слое вблизи поверхности частицы. Будем считать, что теплопроводность жидкой или твердой частицы существенно превышает теплопроводность окружающей среды. В этом случае частица может рассматриваться как изотермическая, а на поверхности частицы, как показано ниже, в сферической системе координат выполняются следующие условия: $u_{\theta a}=-k_f\sin\theta$ ($k_f=\mathrm{const}$) в случае обтекания капли и $(\partial u_\theta/\partial r)_a=-k_s\sin\theta$ ($k_s=\mathrm{const}$) при обтекании твердой сферической частицы. При выполнении этих условий можно воспользоваться известными решениями уравнения конвективной диффузии [4] и получить следующее выражение для плотности диффузионного потока на поверхности капли $j_f$ или твердой частицы $j_s$:

$$j_f=\frac{\rho Dc_\infty}{a}\left(\frac{k_fUa}{\pi D}\right)^{1/2}\frac{\sin^2\theta}{(2/3+\cos\theta-1/3\cos^3\theta)^{1/2}}$$

$$j_s=\frac{\rho Dc_\infty}{a\Gamma(4/3)}\left(\frac{2k_sUa}{9D}\right)^{1/3}\frac{\sin\theta}{(\pi-\theta+1/2\sin2\theta)^{1/3}}$$

Здесь $\rho$ — плотность жидкости, окружающей частицу, $\Gamma$ — гамма-функция Эйлера.

Далее из исходных уравнений и граничных условий следует, что

$$T_{af}-T_\infty=\frac{2\rho Dc_\infty Q}{\varkappa\sqrt{3}}\left(\frac{k_fUa}{\pi D}\right)^{1/2} \tag{4}$$

$$T_{as}-T_\infty=\frac{3\rho Dc_\infty Q}{8\Gamma(4/3)\varkappa}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{k_sUa}{2D}\right)^{1/3}$$

Безразмерная температура окружающей частицу среды будет иметь вид

$$\Phi=1/r \tag{5}$$

Таким образом, вязкость оказывается известной функцией от расстояния до центра частицы и функция тока $\psi$ в сферической системе координат будет определяться уравнениями и граничными условиями:

$$D^4\psi+\frac{A}{r^2}\left(3D^2\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}D^2\psi-\frac{4}{r}D^2\psi+\right.$$

$$\left.+\frac{6}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{A^2}{r^4}\left(2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-D^2\psi\right)=0$$

$$D^4\psi'=0;\qquad \psi'\neq\infty\qquad (r=0)$$

$$\psi=\psi',\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2\frac{\partial\psi}{\partial r}=\sigma\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial r^2}-2\frac{\partial\psi'}{\partial r}\right)\qquad (r=1)$$

$$\psi\to{}^1/_2 r^2\sin^2\theta\qquad (r\to\infty)$$

$$D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \sigma=\frac{\mu'}{\mu_a}$$

При обтекании твердой сферической частицы вместо предпоследнего граничного условия необходимо потребовать

$$\partial\psi/\partial r=0\qquad (r=1)$$

Движение жидкости внутри капли будет описываться сферическим вихрем Хилла [5], являющимся точным решением уравнений Навье — Стокса.

Будем искать $\psi=f(r)\sin^2\theta$.

Обозначим $df/dr-2f/r=g,\ t=r/A$.

Тогда функция $g(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$g'''+\frac{2}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)g''-\frac{1}{t^2}\left(6-\frac{1}{t^2}\right)g'-\frac{6}{t^4}g=0$$

Отсюда следует, что

$$t^2g''+g'-6g=\alpha\exp(1/t)\tag{6}$$

где $\alpha$ — некоторая постоянная, определяемая ниже.

Вычисление силы, действующей на каплю или твердую частицу, приводит к следующему результату:

$$F/F_0=-{}^2/_9\alpha,\qquad F_0=6\pi\mu aU\tag{7}$$

Ранее в работе [6] получено уравнение для векторного потенциала поля скоростей при произвольной зависимости $\mu$ от $r$ и выражение, из которого может быть получена формула (7) как частный случай при подстановке (3) с учетом (5). Однако конкретные выражения для силы сопротивления твердой частицы или пузыря в работе [6] приведены для $\mu(r)=\mu_\infty[1+(R_0/r)^s]$, где $R_0$ и $s$ – некоторые постоянные.

Решение уравнения (6) имеет вид

$$g=6\alpha(g_3+Cg_2)\tag{8}$$

$$g_3=g_1\int\limits_t^{\pm\infty}\frac{g_2}{x^2}dx+g_2\int\limits_{1/A}^{t}\frac{g_1}{x^2}dx$$

$$g_1=4t^3+3t^2+t+{}^1/_6,\qquad g_2=(4t^3-t^2)\exp(1/t)-g_1$$

Здесь и далее знак плюс в пределах интегрирования выбирается при $A>0$, а знак минус – при $A<0$.

Отсюда следует, что

$$f={}^1/_2A^2t^2-At^2\int\limits_t^{\pm\infty}\frac{g}{x^2}dx$$

Из граничных условий

$$f=0,\quad \frac{d^2f}{dt^2}=(3\sigma+2)A\frac{df}{dt}\quad \left(t=\frac{1}{A}\right)$$

определяем постоянные $C$ и $\alpha$:

$$C=\left(\frac{3\sigma A g_3-dg_3/dt}{dg_2/dt-3\sigma A g_2}\right)_{t=1/A} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{12}{A}\int\limits_{1/A}^{\pm\infty}(g_3+Cg_2)\frac{dx}{x^2}$$

Вычисление входящих сюда интегралов приводит к следующим формулам:

$$I_2=\int\limits_{1/A}^{\pm\infty}\frac{g_2}{x^2}dx=2-\left(\frac{2}{A^2}+\frac{1}{A}\right)e^A+\frac{2}{A^2}+\frac{3}{A}-\frac{A}{6}+E$$

$$I_3=\int\limits_{1/A}^{\pm\infty}\frac{g_3}{x^2}dx=\frac{5}{3}+2G-2EH-H^2+\left[\left(\frac{2}{A^2}+\frac{1}{A}\right)H+\frac{2}{A}-\frac{1}{6}\right]e^A$$

$$E=\int\limits_0^A\frac{e^z-1}{z}dz,\quad G=\int\limits_0^A\frac{e^z-1}{z}\ln\frac{A}{z}dz$$

$$H=2/A^2+3/A+2-A/6$$

Результаты расчета $F/F_0$ при различных значениях $A$ и $\sigma$ представлены в таблице.

| $\sigma$ | $A=-5$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $2$ | $5$ | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\infty$ | 3,555 | 1,477 | 1,223 | 1,000 | 0,801 | 0,643 | 0,394 | $7,41\cdot10^{-2}$ | $2,98\cdot10^{-3}$ |
| 1 | 3,515 | 1,301 | 1,049 | 0,833 | 0,650 | 0,505 | 0,293 | $4,85\cdot10^{-2}$ | $1,78\cdot10^{-3}$ |
| 0 | 3,393 | 1,074 | 0,851 | 0,667 | 0,516 | 0,397 | 0,229 | $3,96\cdot10^{-2}$ | $1,56\cdot10^{-3}$ |

Теперь можно найти содержащиеся в (4) величины $k_s$ и $k_f$

$$k_s=\frac{1}{A}\frac{dg}{dt}\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{9I_2e^AF}{2Ag_2(1/A)F_0} \tag{10}$$

$$k_f=g\left(\frac{1}{A}\right)=-27\left[g_1\left(\frac{1}{A}\right)I_2+Cg_2\left(\frac{1}{A}\right)\right]\frac{F}{F_0}$$

При $|A|\ll1$ из (7)—(10) следует

$$\frac{F}{F_0}=\frac{3(\sigma+2)}{3(\sigma+1)}(1-mA),\quad m=\frac{5\sigma^2+10\sigma+4}{4(1+\sigma)(3\sigma+2)}$$

$$k_s=\frac{3}{2}\left(1+\frac{A}{2}\right),\quad k_f=\frac{1}{2(1+\sigma)}\left[1+\frac{1+2\sigma}{4(1+\sigma)}A\right]$$

При $A\gg1$ соответствующие первые члены асимптотических формул имеют вид

$$F/F_0={}^1/_9A^3e^{-A}(A+3\sigma)/(2A+3\sigma)$$

$$k_s={}^1/_2A^2,\quad k_f=A^2/(4A+6\sigma)$$

При $A \ll -1$

$$\frac{F}{F_0} = -\frac{A}{1{,}168}, \quad k_s = \frac{9e^A F}{2F_0}, \quad k_f = -\frac{3Ae^A F}{2(2-\sigma A)F_0}$$

Как видно из полученных результатов, при умеренном изменении вязкости между поверхностью частицы и областью вдали от нее сила сопротивления может быть приближенно представлена в следующем виде:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{3\sigma+2}{3(\sigma+1)} e^{-mA} = \frac{3\sigma+2}{3(\sigma+1)} \left(\frac{\mu_a}{\mu_\infty}\right)^m$$

В интервале $-1 \leqslant A \leqslant 2$ погрешность этой формулы по сравнению с точными результатами менее 11%, хотя вязкость вдали от частицы более чем в 7 раз может превышать вязкость вблизи ее поверхности. Без увеличения погрешности в рассматриваемом диапазоне изменения вязкости можно считать $m = 1/2$, что эквивалентно расчету силы сопротивления, действующей на каплю или твердую частицу в неизотермической среде по формуле Адамара — Рыбчинского или Стокса с заменой вязкости на эффективную, равную $\sqrt{\mu_a \mu_\infty}$. Этот результат соответствует при выбранной модели зависимости вязкости от температуры расчету эффективной вязкости по средней температуре между поверхностью частицы и областью вдали от нее. Следует отметить, что параметр $\sigma$ определяется отношением вязкостей жидкостей внутри и вне капли при температуре ее поверхности.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.– Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
2. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
3. *Carey van P., Mollendorf J. C.* Variable viscosity effects in several natural convection flows.– Int. J. Heat and Mass Transfer, 1980, v. 23, № 1, p. 95–109.
4. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Mathews J.* Drag force on a slowly moving sphere in a medium with variable viscosity.– Phys. Fluids, 1978, v. 21, № 6, p. 876–882.



Москва

Поступила в редакцию 29.X.1981