МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1983

УДК 532.51.013.4:538.4

РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПРОВОДЯЩЕЙ И НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КОРОВИН В. М.

Влияние переменного магнитного поля на рэлей-тейлоровскую неустойчивость проводящей жидкости исследовано [1, 2] в предельных случаях длинноволновых и коротковолновых (по сравнению с толщиной скин-слоя) возмущений. В работе [3] сообщается о новом механизме неустойчивости поверхности раздела между проводящей и непроводящей жидкостью, отличном как от классической рэлей-тейлоровской неустойчивости, так и от параметрической раскачки возмущений. Из критерия неустойчивости [3], полученного без ограничения на пространственный масштаб возмущения, следует парадоксальный результат: рост частоты поля приводит к неустойчивости, в то время как практические результаты литья металлов в электромагнитный кристаллизатор [4] свидетельствуют о противоположном эффекте.

В данной работе показано, что плоскополяризованное высокочастотное поле эффективно стабилизирует часть спектра пространственных возмущений поверхности раздела, но не подавляет полностью рэлей-тейлоровский механизм неустойчивости. Создаваемая же собственно полем неустойчивость имеет характер параметрического резонанса.

1. Введем систему координат с осью z, направленной против силы тяжести. Пусть плоскость $z=0$ является невозмущенной поверхностью раздела между невязкой проводящей жидкостью, занимающей верхнее полупространство, и более легкой вязкой непроводящей жидкостью, заполняющей нижнее полупространство, в котором внешними источниками создано магнитное поле $\mathbf{H}_2^\circ=(H\cos\omega t,\ 0,\ 0)$. Установившееся магнитное поле в покоящейся проводящей жидкости легко найти из уравнения индукции

$$\mathbf{H}_1^\circ=\left[H\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right),0,0\right]$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к области $z>0$, а индекс 2 — к области $z<0$; $\delta=(2\nu_m/\omega)^{1/2}$ — толщина скин-слоя. С точностью до произвольной функции времени распределения давлений в покоящихся жидкостях имеют вид

$$p_1^\circ=\frac{1}{16\pi}H^2\left\{1+\cos 2\,\omega t-\exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\left[1+\cos\left(\frac{2z}{\delta}-2\omega t\right)\right]\right\}-\rho_1 gz,$$

$$p_2^\circ=-\rho_2 gz$$

В линейной постановке развитие возмущений скоростей $\mathbf{v}_j$, давлений p_j, $j=1, 2$, магнитных полей $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2=\nabla\theta$ и поверхности раздела $z=\xi(x,y,t)$ описывается следующими уравнениями:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_j=0,\quad \rho_j\frac{\partial\mathbf{v}_j}{\partial t}=-\nabla p_j+\frac{1}{4\pi}\mathbf{f}_j+\mu_j\Delta\mathbf{v}_j,\quad j=1,2;\quad \mu_1=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}_1}{\partial t}-H_{1x}^\circ\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x}+\mathbf{G}=\nu_m\Delta\mathbf{h}_1,\qquad \operatorname{div}\mathbf{h}_1=0,\qquad \Delta\theta=0$$

$$\mathbf{f}_1=\left[h_{1z}\frac{\partial}{\partial z}H_{1x}{}^\circ,\ H_{1x}{}^\circ\left(\frac{\partial h_{1y}}{\partial x}-\frac{\partial h_{1x}}{\partial y}\right),\right.$$

$$\left.H_{1x}{}^\circ\left(\frac{\partial h_{1z}}{\partial x}-\frac{\partial h_{1x}}{\partial z}\right)-h_{1x}\frac{\partial}{\partial z}H_{1x}{}^\circ\right]$$

$$\mathbf{f}_2=0,\quad \mathbf{G}=\left(v_{1z}\frac{\partial}{\partial z}H_{1x}{}^\circ,0,0\right)$$

Линеаризация кинематических и динамических условий на поверхности раздела, а также условия непрерывности магнитного поля приводит к краевым условиям

$$z=0:\frac{\partial\xi}{\partial t}=v_{1z},\qquad v_{1z}=v_{2z},\qquad \frac{\partial v_{2x}}{\partial z}+\frac{\partial v_{2z}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v_{2z}}{\partial y}+\frac{\partial v_{2y}}{\partial z}=0$$

$$p_1-p_2=\xi\left\{g(\rho_1-\rho_2)-\frac{H^2}{8\pi\delta}\left[1+\sqrt{2}\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+$$

$$+\alpha\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)-2\mu_2\frac{\partial v_{2z}}{\partial z}$$

$$h_{1x}=\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\sqrt{2}\xi}{\delta}H\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right),\quad h_{1y}=h_{2y},\quad h_{1z}=h_{2z}\tag{1.2}$$

$$z\to+\infty:\ \mathbf{v}_1\to0,\ \mathbf{h}_1\to0;\ z\to-\infty:\ \mathbf{v}_2\to0,\ \theta\to0$$

При записи условия сопряжения h_{1x} и h_{2x} на поверхности раздела (1.2) предполагается, что отношение ξ/δ имеет первый порядок малости.

Для простоты будем считать, что отклонение рассматриваемой системы от равновесия вызвано начальными условиями

$$t=0:\ \xi=0,\ \mathbf{h}_1=0,\ \mathbf{v}_j=\mathbf{V}_j(x,y,z)\qquad V_{1z}(x,y,0)=V_{2z}(x,y,0)\tag{1.3}$$

Учет начальных возмущений поверхности раздела и магнитного поля несколько усложняет выкладки, но не приводит к качественному изменению результатов.

2. Рассмотрим устойчивость плоской поверхности раздела по отношению к возмущениям, характерная частота которых Ω много меньше частоты приложенного поля, а амплитуда колебаний много меньше толщины скин-слоя. Принимая во внимание краевое условие (1.2) для h_{1x}, оценим порядки членов в левой части третьего уравнения (1.1). В течение интервала времени порядка периода колебаний, совершаемых частицами жидкости в волне длины d, эти частицы проходят расстояние порядка амплитуды волны a. Ввиду этого имеем

$$v\sim a\Omega,\qquad \frac{\partial h}{\partial t}\sim\omega h,\qquad H_{1x}{}^\circ\frac{\partial v_{1x}}{\partial x}\sim H\Omega\frac{a}{d},\qquad v_{1z}\frac{\partial H_{1x}{}^\circ}{\partial z}\sim H\Omega\frac{a}{\delta}$$

так что в рассматриваемом приближении при $\Omega/\omega\ll1$, $a/d\ll1$ двумя последними членами в левой части третьего уравнения (1.1) можно пренебречь.

Пусть F — оператор преобразования Фурье по координатам x, y, $\mathbf{k}=(k_x,k_y)$ — волновой вектор, L — оператор преобразования Лапласа по времени t, s — параметр этого преобразования. Введем обозначения

$$F\xi=\eta,\quad l=\eta\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right),\quad F\theta=\varphi,\quad F\mathbf{v}_j=\mathbf{u}_j,\quad F\mathbf{h}_1=\mathbf{b}$$

$$F\mathbf{f}_1=\mathbf{K},\quad FV_{1z}(x,y,0)=V_0,\quad Fp_j=q_j,\quad L\varphi=\Phi,\quad L\eta=Z$$

$$L\mathbf{u}_2=\mathbf{w},\quad L\mathbf{b}=\mathbf{B},\quad Ll=M$$

Пренебрегая в третьем уравнении (1.1) членами, описывающими влияние движения жидкости на $\mathbf{h}_1$ и переходя в задаче (1.1)—(1.3) к изображениям, после несложных выкладок получаем

$$q_1=-\frac{\rho_1}{k^2}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z}+\frac{1}{4\pi k^2}(ik_xK_x-k_yK_y),\quad q_2=-\frac{\rho_2}{k^2}\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z}+$$

$$+\frac{\mu_2}{k^2}\left(\frac{\partial^3 u_{2z}}{\partial z^3}-k^2\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right),\quad K_x=b_z\frac{\partial}{\partial z}H_{1x}{}^\circ,\quad K_y=iH_{1x}{}^\circ(k_yb_x-k_xb_y)$$

$$K_z=-\left(\frac{\partial}{\partial z}H_{1x}{}^\circ b_x+ik_xH_{1x}{}^\circ b_z\right),\quad k^2=k_x^2+k_y^2,\quad i=\sqrt{-1}\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial z^2}-k^2u_{1z}\right)=W_1,\quad W_1=\frac{1}{4\pi\rho_1}\left(ik_xK_x-k_y\frac{\partial}{\partial z}K_y+k^2K_z\right)\tag{2.2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{B}-k^2\left(\frac{s}{m}+1\right)\mathbf{B}=0,\quad \frac{d}{dz}B_z-ik_xB_x-ik_yB_y=0\tag{2.3}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi-k^2\Phi=0,\quad \left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2-\frac{s}{n}\right)w_z=W_2\tag{2.4}$$

$$W_2=\frac{\rho_2}{\mu_2}\left(k^2V_{2z}-\frac{d^2}{dz^2}V_{2z}\right),\quad m=\nu_mk^2,\quad n=\frac{\mu_2k^2}{\rho_2}$$

$$z=0:\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}=\frac{d^2\eta}{dt^2},\quad w_z=sZ,\quad \frac{d^2w_z}{dz^2}+k^2w_z=0\tag{2.5}$$

$$q_1-q_2=\eta\left\{g(\rho_1-\rho_2)-\frac{H^2}{8\pi\delta}\left[1+\sqrt{2}\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\alpha k^2\right\}-2\mu_2\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\tag{2.6}$$

$$B_x=\frac{\sqrt{2}}{\delta}HM-ik_x\Phi,\quad B_y=-ik_y\Phi,\quad B_z=\frac{d}{dz}\Phi\tag{2.7}$$

$$z\to+\infty:\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}\to0,\quad \mathbf{B}\to0;\quad z\to-\infty:\quad w_z\to0,\quad \Phi\to0\tag{2.8}$$

$$t=0:\eta=0,\quad \mathbf{B}=0,\quad \frac{d\eta}{dt}=V_0\tag{2.9}$$

Получим уравнение, описывающее изменение во времени гармоник возмущения поверхности раздела. Решив уравнения (2.3), (2.4) при краевых условиях (2.5), (2.7), (2.8) находим

$$B_x=\frac{\sqrt{2}}{\delta}H(Me^{-\zeta kz}-\beta^2N),\quad B_y=-\frac{\sqrt{2}\beta\gamma}{\delta}HN$$

$$B_z=-\frac{i\sqrt{2}\beta}{\delta}HN,\quad \Phi=-\frac{i\sqrt{2}\beta}{k\delta}\frac{e^{-kz}}{\zeta+1}HM\tag{2.10}$$

$$\beta=\frac{k_x}{k},\quad \gamma=\frac{k_y}{k},\quad \zeta=\sqrt{\frac{s}{m}+1}$$

$$w_z=R\left[\psi^{-1}\left(e^{\psi kz}\int_0^z W_2e^{-\psi kz}dz-e^{-\psi kz}\int_0^z W_2e^{\psi kz}dz\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-kz}\int_0^z W_2e^{kz}dz-e^{kz}\int_0^z W_2e^{-kz}dz\right]-2nZe^{\psi kz}+Ze^{kz}(s+2n)\tag{2.11}$$

$$\psi=\sqrt{\frac{s}{n}+1}, \qquad N=M\frac{e^{-\zeta kz}}{\zeta+1}, \qquad R=\frac{s}{2k^3n(\psi^2+1)}$$

Из выражения (2.11) имеем

$$\left.\frac{dw_z}{dz}\right|_{z=0}=ksZ+2knZ(1-\psi), \quad \left.\frac{d^3w_z}{dz^3}\right|_{z=0}=k^3sZ-2k^3nZ(1-\psi^3) \tag{2.12}$$

Совершив в (2.10), (2.12) обратное преобразование Лапласа, получим

$$b_x=\frac{\sqrt{2}}{\delta}H\left\{\int\limits_0^t e^{-m\tau}\operatorname{Erf}[\lambda(z,\tau)]\left[\frac{dl(t-\tau)}{dt}+ml(t-\tau)\right]d\tau-\beta^2\chi(z,t)\right\} \tag{2.13}$$

$$b_y=-\frac{\sqrt{2}\beta\gamma}{\delta}H\chi(z,t), \qquad b_z=-\frac{i\sqrt{2}\beta}{\delta}H\chi(z,t), \qquad \varphi=-\frac{1}{k}e^{kz}b_z(0,t)$$

$$\left.\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right|_{z=0}=k\left(\frac{d\eta}{dt}+2n\eta-2\sqrt{n}I\right) \tag{2.14}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u_{2z}}{\partial z^3}\right|_{z=0}=k^3\left(\frac{d\eta}{dt}+2n\eta-2\sqrt{n}\,I-\frac{2}{\sqrt{n}}\frac{d}{dt}I\right)$$

$$\lambda(z,\tau)=\frac{kz}{2\sqrt{m\tau}}, \qquad \operatorname{Erf}\lambda=1-\operatorname{erf}\lambda, \qquad \operatorname{erf}\lambda=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\lambda e^{-x^2}dx$$

$$\varkappa(z,t)=\int\limits_0^t l(t-\tau)\left\{\sqrt{\frac{m}{\pi\tau}}e^{-m\tau-\lambda^2(z,\tau)}-me^{kz}\operatorname{Erf}[\lambda(z,\tau)+\sqrt{m\tau}]\right\}d\tau$$

$$I(t)=\int\limits_0^t\frac{d\eta(t-\tau)}{dt}\left[\frac{e^{-n\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}+\sqrt{n}\operatorname{erf}\sqrt{n\tau}\right]d\tau$$

Подстановка производных (2.14) во второе выражение (2.1) дает

$$q_2|_{z=0}=-\frac{\rho_2}{k}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+2n\frac{d\eta}{dt}\right) \tag{2.15}$$

Подставив (2.13) в правую часть уравнения (2.2) и решив краевую задачу (2.2), (2.5), (2.8) относительно $\partial u_{1z}/\partial t$, находим

$$\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}=\frac{1}{2k}\left(e^{kz}\int\limits_0^z W_1e^{-kz}dz-e^{-kz}\int\limits_0^z W_1e^{kz}dz\right)+\frac{d^2\eta}{dt^2}e^{-kz} \tag{2.16}$$

Принимая во внимание (2.13), (2.16), из (2.1) получим

$$q_1|_{z=0}=\frac{\rho_1}{k}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\frac{1}{4\pi\delta}H^2\left\{\frac{2\beta^2}{k\delta}\varkappa(0,t)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\gamma^2\eta(t)\left[1+\sqrt{2}\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} \tag{2.17}$$

Подставим (2.15), (2.17) и первую производную (2.14) в краевое условие (2.6)

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2a_1\frac{d\eta}{dt}+\left[\Omega^2+a_2\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\eta=$$

$$=a_3\int_0^t \eta(t-\tau)\left[\cos\omega(2t-\tau)-\sin\omega\tau\right]\left(\frac{e^{-m\tau}}{\sqrt{\pi m\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{m\tau}\right)d\tau+$$

$$+a_4\int_0^t \frac{d\eta(t-\tau)}{dt}\left(\frac{e^{-n\tau}}{\sqrt{\pi n\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{n\tau}\right)d\tau \qquad (2.18)$$

$$a_0=\frac{(k_xH)^2}{4\pi\delta(\rho_1+\rho_2)},\quad a_1=2nr_2,\quad a_2=\frac{a_0}{\sqrt{2}\,k},\quad a_3=\frac{a_0\nu_m}{\delta},\quad a_4=2na_1$$

$$\Omega^2=gk(r_2-r_1)+\frac{\alpha k^3}{\rho_1+\rho_2}+\frac{a_2}{\sqrt{2}},\quad r_j=\frac{\rho_j}{\rho_1+\rho_2},\quad j=1,2$$

Задача (2.18), (2.9) описывает развитие тех фурье-компонент пространственного возмущения поверхности раздела, для которых выполняется условие $|\Omega|\omega^{-1}\ll 1$. Можно показать, что для возмущений, зависящих лишь от y, z, t, задача о расчете $\mathbf{v}_j$, p_j отделяется от задачи о расчете $\mathbf{h}_j$. В этом случае в уравнении (2.18) $a_2=a_3=0$, $k=k_y$, т. е. магнитное поле не оказывает влияние на $\eta(t)$, причем (2.18) применимо для расчета фурье-компонент плоского возмущения без какого-либо ограничения на величину $|\Omega|\omega^{-1}$. Таким образом, для возмущений поверхности раздела, гребни которых параллельны приложенному магнитному полю, имеет место обычная рэлей-тейлоровская неустойчивость.

Рассмотрим случай пространственных возмущений. Переходя в (2.18), (2.9) к безразмерным переменным $t_1=\omega t$, $\tau_1=\omega\tau$, имеем (индекс 1 у безразмерного времени опущен)

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\varepsilon_1\frac{d\eta}{dt}+\left[\varepsilon_0+\varepsilon_2\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\eta=\varepsilon_3\int_0^t\eta(t-\tau)\left[\cos(2t-\tau)-\right.$$

$$\left.-\sin\tau\right]\left(\frac{e^{-\varkappa\tau}}{\sqrt{\pi\varkappa\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{\varkappa\tau}\right)d\tau+\varepsilon_4\int_0^t\frac{d\eta(t-\tau)}{dt}\left(\frac{e^{-\nu\tau}}{\sqrt{\pi\nu\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{\nu\tau}\right)d\tau$$

$$t=0:\quad \eta=0,\quad \frac{d\eta}{dt}=\Pi;\quad \Pi=\omega V_0,\quad \varkappa=\frac{1}{2}(k\delta)^2,\quad \nu=\frac{n}{\omega} \qquad (2.19)$$

$$\varepsilon_0=\varkappa^{1/2}\left[\frac{\sqrt{2}\,g(r_2-r_1)}{\omega^2\delta}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}\right]+\frac{4\sqrt{2}\,\alpha}{\omega^2(\rho_1+\rho_2)}\varkappa^{3/2},\quad \varepsilon_1=2\nu r_2$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{4\pi(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{\beta H}{\omega\delta}\right)^2,\quad \varepsilon_3=\varkappa\varepsilon_2,\quad \varepsilon_4=4\nu^2r_2$$

Обозначим $\varepsilon=\max(|\sqrt{\varepsilon_0}|,\ \varepsilon_j)$, $c_j=\varepsilon_j/\varepsilon$, $j=1,\ldots,4$. Перепишем задачу (2.19)

$$\frac{d\eta}{dt}=\sqrt{\varepsilon}\,\vartheta,\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\sqrt{\varepsilon}\left\{-\sqrt{\varepsilon}\,c_1\vartheta-\left[c_0+c_2\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\eta+\right.$$

$$+c_3\int_0^t\eta(t-\tau)\left[\cos(2t-\tau)-\sin\tau\right]\left(\frac{e^{-\varkappa\tau}}{\sqrt{\pi\varkappa\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{\varkappa\tau}\right)d\tau+$$

$$\left.+\sqrt{\varepsilon}\,c_4\int_0^t\vartheta(t-\tau)\left(\frac{e^{-\nu\tau}}{\sqrt{\pi\nu\tau}}-\operatorname{Erf}\sqrt{\nu\tau}\right)d\tau\right\},\quad c_0=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \qquad (2.20)$$

$$t=0:\quad \eta=0,\quad \vartheta=\varepsilon^{-1/2}\Pi$$

Уравнение (2.19) применимо при выполнении условия $|\sqrt{\varepsilon_0}|\ll 1$.

Пусть также $\sqrt{\varepsilon}\ll 1$. Применив в (2.20) вторую схему усреднения, предложенную в [5], получим задачу Коши для системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Переходя затем к одному уравнению второго порядка, имеем

$$\frac{d^2\mu}{dt^2}+\varepsilon_1\frac{d\mu}{dt}+\left(\varepsilon_0+\Lambda\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\right)\mu=0; \qquad t=0: \quad \mu=0, \quad \frac{d\mu}{dt}=\Pi$$
$$\Lambda=\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+1}}-\frac{\varkappa}{\varkappa^2+1}\right)^{1/2}+\varkappa\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+1}}+\frac{\varkappa}{\varkappa^2+1}\right)^{1/2}-\sqrt{2\varkappa} \tag{2.21}$$

При $\sqrt{\varepsilon}\ll 1$ решения задач (2.19) и (2.21) достаточно близки на бесконечном интервале изменения времени [5]. Так как $\Lambda(\varkappa)>0$ при $\varkappa>0$, то при достаточно больших H и ω те гармоники, для которых выполняется условие $(\beta H)^2>4\sqrt{2}\pi\delta g(\rho_2-\rho_1)$, устойчивы.

Таким образом, высокочастотное магнитное поле наиболее эффективно стабилизирует плоские возмущения поверхности раздела, гребни которых перпендикулярны $\mathbf{H}_2^\circ$. В общем случае стабилизируется лишь некоторая часть спектра неустойчивых без поля гармоник пространственных возмущений. При фиксированных k наиболее быстро нарастают гармоники плоских возмущений, гребни которых параллельны $\mathbf{H}_2^\circ$. Этим обстоятельством объясняется экспериментально наблюдаемое явление образования продольных складок на поверхности жидкого металла при плавке в электромагнитном тигле [6].

3. В том случае, когда толщина скин-слоя и амплитуда волны (малая по сравнению с ее длиной) одного порядка, возмущение магнитного поля, возникающее за счет деформации поверхности раздела, сравнимо с невозмущенным полем, так что линеаризованное уравнение индукции (1.1) неприменимо. Рассматриваемая задача тем не менее упрощается: с принятой степенью точности скин-слой можно заменить поверхностью разрыва касательной составляющей магнитного поля, на которой локализована поверхностная пондеромоторная сила [7]. В невозмущенном состоянии

$$\mathbf{H}_2^\circ=(H\cos\omega t,0,0),\quad \mathbf{H}_1^\circ=0,\quad p_1^\circ=\frac{1}{16\pi}H^2(1+\cos 2\omega t)-\rho_1 gz,\quad p_2^\circ=-\rho_2 gz,\quad \mathbf{v}_j=0$$

При этом $\mathbf{h}_1=0$, $\mathbf{f}_1=0$, так что развитие возмущений $\mathbf{v}_j$, p_j, θ описывается линеаризованными уравнениями гидродинамики и уравнением Лапласа (1.1). При постановке краевых условий на поверхности раздела (1.2) требуется учесть поверхностную пондеромоторную силу и непрерывность нормальной составляющей магнитного поля

$$z=0: \quad p_1-p_2=\xi g(\rho_1-\rho_2)+\alpha\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)-2\mu_2\frac{\partial v_{2z}}{\partial z}+\frac{1}{4\pi}H\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\omega t$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=H\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\omega t \tag{3.1}$$

Полагая $\mathbf{v}_1=\nabla U$, имеем

$$\Delta U=0,\qquad \Delta\theta=0,\qquad \frac{\partial}{\partial z}U|_{z=0}=\frac{\partial\xi}{\partial t},\qquad p_1=-\rho_1\frac{\partial}{\partial t}U \tag{3.2}$$

Переходя к изображениям по Фурье в задаче (3.2), (3.1) с условиями обращения в нуль искомых функций в бесконечности, легко получить

$$q_1=\frac{\rho_1}{k}\frac{d^2\eta}{dt^2}e^{-kz}\qquad \varphi=i\beta He^{kz}\eta\cos\omega t \tag{3.3}$$

Подставляя затем (3.3), (2.14), (2.15) в динамическое условие на поверхности раздела (3.1), записанное для Фурье-компонент, с точностью до малых порядка ν/ω получаем

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\varepsilon_1\frac{d\eta}{dt}+(\varepsilon_0+\varepsilon_2\cos 2t)\eta=0; \quad t=0: \quad \eta=0, \quad \frac{d\eta}{dt}=\Pi$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{\omega^2}\left[gk(r_2-r_1)+\frac{\alpha k^3}{\rho_1+\rho_2}\right]+\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1=\frac{4\nu r_2}{\omega}, \quad \varepsilon_2=\frac{(k_xH)^2}{8\pi\omega^2(\rho_1+\rho_2)} \tag{3.4}$$

Это уравнение легко приводится к стандартному виду уравнения Матье. Диаграмма устойчивости для функций Матье [8] полностью подтверждает сделанный выше качественный вывод об особенностях влияния плоскополяризованного переменного магнитного поля на развитие возмущений поверхности раздела. Из уравнения (3.4) следует также, что при $\rho_1<\rho_2$ за счет параметрического резонанса, вызываемого магнитным полем, некоторый диапазон коротковолновых возмущений неустойчив.

Автор благодарит А. А. Бармина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладиков Ю. П.* Удержание жидкого металла в вакууме магнитным полем круговой поляризации при наличии проводящего кожуха.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2, с. 8–16.
2. *Chakraborty B. B.* Rayleigh-Taylor instability in the presence of an oscillating magnetic field permeating both heavier and lighter fluids.– Phys. Fluids, 1980, v. 23, № 3, p. 464–471.
3. *Garnier M.* Rôle déstabilisant d'un champ magnétique alternatif appliqué au voisinage d'une interface.— C. R. Acad. Sc. Paris, 1977, Sér. B, v. 284, p. 365—368.
4. *Гецелев З. Н., Мартынов Г. И.* О циркуляции металла в жидкой фазе слитка, формируемого электромагнитным полем.– Магнитная гидродинамика, 1978, № 2, с. 127–131.
5. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
6. *Жежерин Р. П.* Проблема «электромагнитного тигля».– В кн.: Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига: Изд-во АН ЛатвССР, 1959, с. 279–294.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
8. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VII.1981