

УДК 532.51.011.12

**О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

МИКИШЕВ Г. Н., СТОЛБЕЦОВ В. И.

Задаче о колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости посвящен ряд работ [1–4]. В них основное внимание уделяется определению гидродинамических характеристик элементов в виде стержней. Аналитическое решение задачи возможно лишь в простейших случаях [2].

В работе для случая больших чисел Рейнольдса с использованием асимптотического метода [5, 6] рассмотрена общая задача о поступательных колебаниях осесимметричного тела в осесимметричном объеме жидкости. Получены уравнения движения тела и выражения коэффициентов, обусловленных вязкостью жидкости. Показано, что в первом приближении эти коэффициенты отличаются лишь постоянным множителем и полностью определяются, если известно решение задачи для идеальной жидкости. Приводятся примеры определения «вязкой» присоединенной массы и коэффициента демпфирования для некоторых тел и полостей. В случае идеальной жидкости получены общие оценки для присоединенной массы, а также оценено влияние нелинейности. Методом Ритца решена задача о продольных колебаниях эллипсоида вращения в круговом цилиндре. Гидродинамические коэффициенты определены численно с использованием ЭВМ.

Теоретические результаты хорошо согласуются с результатами проведенных экспериментальных исследований.

1. Уравнение движения тела в идеальной жидкости. Рассмотрим малые поступательные колебания осесимметричного тела в осесимметричной полости, заполненной идеальной жидкостью плотности ρ . Обозначим через S и S_2 поверхности, ограничивающие объемы тела и полости, а через Q — объем, занимаемый жидкостью. Свяжем с телом и полостью системы координат xuz и $x^*y^*z^*$, оси x и x^* которых являются осями симметрии тела и полости. Движение тела, возникающее под действием приложенной к нему силы $F = F e_x$, будем характеризовать вектором перемещения $u(t) = u(t) e_x$.

Пусть в начальный момент $t = t_0$ жидкость покоится. Тогда задачу о движении жидкости можно записать в виде

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Phi = u \dot{\varphi}, \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad (x, y, z) \in Q \tag{1.1}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \cos(n, x), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_2} = 0$$

Положительное направление нормалей выбрано в глубь жидкости.

При малых колебаниях тела первое из граничных условий (1.1) можно отнести к поверхности S_1 , совпадающей с S , когда тело находится в некотором среднем положении.

В этом случае краевая задача сохраняет вид (1.1), где под φ и Φ следует понимать потенциалы φ_0 и Φ_0 в объеме Q_0 , ограниченном поверхностями S_1 и S_2 .

Уравнение малых колебаний тела имеет вид

$$(m^* + m) \ddot{u} = F, \quad m = -\rho \int_{S_1} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} dS$$

где m^0 — масса тела, а m — присоединенная масса. Это уравнение по форме совпадает с уравнением движения тела в безграничной жидкости ($\varphi_0 = \varphi_\infty$, $m = m_\infty$).

Попытаемся более точно удовлетворить первому из граничных условий (1.1), воспользовавшись одним из вариантов метода возмущений [7]. Вводя цилиндрические координаты x, r , разложим выражения $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial r$ в ряд Тейлора в окрестности точек поверхности S_1 . В результате это условие примет вид

$$n_x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \dots \right)_{s_1} + n_r \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + u \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial r} + \dots \right)_{s_1} = n_x \quad (1.2)$$

Чтобы удовлетворить условию (1.2), будем искать φ в виде ряда по гармоническим в Q_0 функциям $\varphi = \varphi_0 + u\varphi_1 + u^2\varphi_2 + \dots$. Тогда из (1.2) получим

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_{s_1} = - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right|_{s_1} = - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}, \dots$$

Кроме того, функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ должны удовлетворять условию непротекания на S_2 .

Учитывая в разложении φ лишь три члена и ограничиваясь классом тел и полостей, которые имеют общую плоскость симметрии, перпендикулярную оси x , составим уравнение движения тела

$$(m^0 + m) \ddot{u} + m_1 u (\dot{u} \dot{u}) = F \quad (1.3)$$

$$m_1 = -\rho \int_{s_1} \left(\varphi_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} dS$$

В дальнейшем ограничимся оценкой влияния нелинейного члена в (1.3) на примере задачи о колебаниях шара радиуса r_1 в сферической полости радиуса r_2 , решение которой может быть представлено в аналитическом виде. Опустив промежуточные выкладки, выпишем в сферических координатах r, θ искомые функции φ_1, φ_2

$$\varphi_1 = \beta_1 \left(\frac{3}{2} r^2 + \frac{r_2^5}{r^3} \right) P_2(\cos \theta)$$

$$\varphi_2 = \beta_{21} \left(r + \frac{r_2^3}{2r^2} \right) P_1(\cos \theta) + \beta_{22} \left(\frac{r^3}{3r_2^5} + \frac{r_2^2}{4r^4} \right) P_3(\cos \theta)$$

Здесь $P_i(\cos \theta)$ — i -й полином Лежандра, $\beta_1, \beta_{21}, \beta_{22}$ — некоторые выражения, зависящие от r_1 и r_2 . Вычисляя m_1 , получим

$$m_1 = 6\pi\rho \frac{r_1^6 r_2^6}{(r_1^3 - r_2^3)^2 (r_2^5 - r_1^5)}$$

Из этого выражения видно, что нелинейный эффект наиболее сильно проявляется при $r_1 \rightarrow r_2$, а с ростом r_2 затухает как $(r_2/r_1)^{-5}$.

Расчеты показали, что для достаточно больших значений u ($|u| < 0,2r_1$) и сравнительно больших отношений радиусов ($r_1 < 0,6r_2$) нелинейным членом в (1.3) можно пренебречь, что хорошо подтверждается результатами проведенных экспериментов.

Используя краевые условия для φ_0 и φ_∞ , установим соотношение, позволяющее оценивать m , подобно тому, как это делается в теории колебаний ограниченных объемов жидкости [8]. Воспользовавшись соотношениями (λ — вещественное число)

$$m + 2\lambda\rho \int_{Q_0} \nabla\varphi_0 \nabla\varphi_\infty dQ + \lambda^2 m_\infty > \rho \int_{Q_0} (\nabla\varphi_0 + \lambda\nabla\varphi_\infty)^2 dQ \geq 0$$

$$\rho \int_{Q_0} \nabla\varphi_0 \nabla\varphi_\infty dQ = -\rho \int_{S_1} \varphi_\infty \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} dS = m_\infty$$
(1.4)

получим $m > m_\infty$.

Полученное неравенство можно обобщить. Обозначим через S_2' и S_2'' поверхности, ограничивающие два объема, а через m' и m'' — присоединенные массы, соответствующие движению тела в этих объемах. Пусть S_2''' объемлет поверхность S_2' . В этом случае $m' > m''$. Используя это неравенство, можно получать различные двусторонние оценки присоединенных масс, полезные при проведении расчетов.

Отметим, что эта оценка справедлива также для случая вращательно-го движения тела, если под m' и m'' понимать соответствующие присоединенные моменты инерции.

2. Учет вязкости жидкости. Рассмотрим линеаризованную задачу о нахождении скорости \mathbf{v} и давления p в несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (x, y, z) \in Q_0$$
(2.1)

$$\mathbf{v}|_{S_1} = u\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}|_{S_2} = 0$$
(2.2)

где ν — кинематическая вязкость жидкости, которую будем считать величиной безразмерной. Это нетрудно сделать подходящим выбором единиц измерения.

Предполагая $\nu \ll 1$, воспользуемся для решения задачи асимптотическим методом и некоторыми общими результатами решения гидродинамической задачи о колебаниях полости, заполненной вязкой жидкостью [5, 6]. Ограничиваясь в разложении членами порядка $\nu^{1/2}$, будем искать решение задачи (2.1), (2.2) в виде

$$\mathbf{v} = \nabla(\Phi_0 + \nu^{1/2}\Phi_1) + \mathbf{v}_{S_1} + \mathbf{v}_{S_2}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_{S_i} = 0 \quad (i=1, 2)$$

$$p = -\rho(\partial\Phi_0/\partial t + \nu^{1/2}\partial\Phi_1/\partial t)$$
(2.3)

Здесь Φ_1 — корректирующий потенциал, \mathbf{v}_{S_1} , \mathbf{v}_{S_2} — функции типа пограничного слоя, каждая из которых должна учитываться лишь вблизи одной из поверхностей S_1 , S_2 .

Введем две системы криволинейных ортогональных координат ξ_i, η_i, ζ_i ($i=1, 2$), таких, для которых соотношения $\xi_i=0$, $\zeta_i=0$ являются уравнениями поверхностей S_1 , S_2 и выполняются равенства $\partial/\partial n|_{S_i} = \partial/\partial\zeta_i$ ($i=1, 2$).

Представим \mathbf{v}_{S_1} , \mathbf{v}_{S_2} в следующем виде:

$$\mathbf{v}_{S_i} = v_{\xi_i}\mathbf{e}_{\xi_i} + v_{\eta_i}\mathbf{e}_{\eta_i} + v_{\zeta_i}\mathbf{e}_{\zeta_i} = \mathbf{v}_{\tau_i} + v_{\zeta_i}\mathbf{e}_{\zeta_i} \quad (i=1, 2)$$
(2.4)

Используя (2.3), (2.4), из условий прилипания на S_1 , S_2 получим (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\mathbf{v}_{\tau_i}|_{S_i} = u^*(t) (\delta_{i1}\mathbf{e}_x - \nabla\varphi_0)$$
(2.5)

$$\left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \right|_{S_i} = -\nu^{-1/2} v_{\zeta_i}|_{\zeta_i=0} \quad (i=1, 2)$$
(2.6)

Компоненты \mathbf{v}_{τ_i} удовлетворяют одномерным уравнениям теплопроводности. Это позволяет записать их решения в виде [6]

$$\mathbf{v}_{\tau_i} = \frac{\xi_i}{2\sqrt{\pi\nu}} (\delta_{i1}\mathbf{e}_x - \nabla\varphi_0) \int_{t_0}^t \frac{u^*(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\xi_i^2/4\nu(t-\tau)} d\tau, \quad (i=1, 2)$$

Нормальные компоненты функций v_{S_i} находятся из уравнений неразрывности. Так как эти компоненты имеют порядок $v^{1/2}$, а толщина пограничных слоев на S_1, S_2 также порядка $v^{1/2}$, то их вклад в количество движения системы $\sim v$. Поэтому выпишем лишь значения этих компонент на поверхностях S_1, S_2 , поскольку они входят в граничные условия (2.6)

$$v_{t_i}|_{S_i} = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{u^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \text{Div}(\delta_{i1} \mathbf{e}_x - \nabla \varphi_0) \quad (i=1, 2)$$

$$\text{Div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_{\xi_i} H_{\eta_i}} \left[\frac{\partial (H_{\eta_i} a_{\xi_i})}{\partial \xi_i} + \frac{\partial (H_{\xi_i} a_{\eta_i})}{\partial \eta_i} \right] \quad (i=1, 2)$$

Здесь H_{ξ_i}, H_{η_i} — коэффициенты Ламэ.

Определим количество движения \mathbf{K} системы, состоящей из твердого тела и жидкости

$$\mathbf{K} = m^0 u^*(t) \mathbf{e}_x + \rho \int_{Q_0} (\nabla \Phi_0 + v^{1/2} \nabla \Phi_1 + \mathbf{v}_{S_1} + \mathbf{v}_{S_2}) dQ \quad (2.7)$$

Интегралы от \mathbf{v}_{S_i} в (2.7) вычисляются непосредственно путем интегрирования по ξ_i в пределах от 0 до ∞ . Два других интеграла могут быть преобразованы с использованием формулы Остроградского — Гаусса и граничных условий (1.1), (2.6). Опустив промежуточные выкладки, запишем результат

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_x \left[u^*(t) (m^0 + m) - \rho u^*(t) \int_{S_2} \varphi_0 n_x dS \right] +$$

$$+ \mathbf{e}_x \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{u^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left(I_{12} - \int_{S_2} \nabla \varphi_0 \mathbf{e}_x dS \right) - \mathbf{e}_x v^{1/2} \rho \int_{S_2} \varphi_1 n_x dS \quad (2.8)$$

$$I_{12} = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_{S_1} (\mathbf{e}_x - \nabla \varphi_0)^2 dS, \quad I_2 = \int_{S_2} \nabla \varphi_0 \nabla \varphi_0 dS$$

Продифференцировав (2.8) по времени, приравняем полученное выражение главному вектору сил, действующих на систему. При этом учтем нормальные и касательные напряжения, действующие на жидкость на поверхности S_2 . В результате получим уравнение движения тела

$$(m^0 + m) u^{**}(t) + \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} I_{12} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{u^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F \quad (2.9)$$

Для установившихся гармонических колебаний ($F = F_0 \cos \omega t$, $t_0 = -\infty$) уравнение движения принимает вид

$$M u^{**} + h u^* = F_0 \cos \omega t \quad (2.10)$$

$$M = m^0 + m + m', \quad h = \rho I_{12} (v\omega/2)^{1/2}, \quad m' = \rho I_{12} (v/2\omega)^{1/2} \quad (2.11)$$

Присоединенная масса жидкости m' , обусловленная вязкостью, и коэффициент демпфирования h пропорциональны одной и той же величине I_{12} , которая полностью определяется геометрией тела и полости.

В случае, если на тело действует восстанавливающая сила $F = -Cu$, его движение можно описать уравнением

$$M u^{**} + h u^* + Cu = 0$$

$$M = m^0 + m + m', \quad m' = \rho I_{12} (v/2\omega_0)^{1/2}, \quad \omega_0 = \sqrt{C/M} \quad (2.12)$$

$$h = \rho I_{12} (v\omega_0/2)^{1/2}$$

Широко используемый на практике логарифмический декремент колебаний δ связан с m' выражением $\delta = \pi m' / M$, которое может быть использовано при экспериментальном определении m' и m .

Выше рассматривалось лишь поступательное движение тела вдоль его оси симметрии.

Однако можно показать, что, например, при малых вращательных колебаниях тела относительно оси y его движение описывается уравнением типа (2.9), аналогичным уравнению движения тела с полостью, полностью заполненной жидкостью [6]

$$(J^{\circ} + J) \omega^{\circ}(t) + \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \Omega_{12} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\omega(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = M \quad (2.13)$$

Здесь $\omega(t)$ — угловая скорость тела, M — момент внешних сил, приложенных к телу, J — присоединенный момент инерции, соответствующий идеальной жидкости, J° — момент инерции тела, а величина Ω_{12} определяется совокупностью уравнений

$$\Omega_{12} = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_1 = \int_{s_1} (\mathbf{e}_y \times \mathbf{R} - \nabla \Psi_2)^2 dS, \quad \Omega_2 = \int_{s_2} (\nabla \Psi_2)^2 dS \quad (2.14)$$

где Ψ_2 — потенциал, являющийся решением краевой задачи

$$\Delta \Psi_2 = 0, \quad (x, y, z) \in Q_0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \right|_{s_1} = z \cos(n, x) - x \cos(n, z), \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \right|_{s_2} = 0$$

3. Примеры определения коэффициентов, обусловленных вязкостью жидкости. Как видно из уравнений (2.9), (2.10), описывающих малые колебания тела в вязкой жидкости, определение коэффициентов, обусловленных вязкостью ν , сводится к вычислению интеграла I_{12} , который определяется только порождающим решением φ_0 . Ниже приводятся примеры вычисления I_{12} для простейших тел и полостей.

Сфера в безграничной жидкости. Используя известное решение для φ_0 [9], получим

$$\varphi_0 = -\frac{r_0^3}{2r^2} \cos \theta \quad (3.1)$$

$$I_1 = \int_{s_1} (\mathbf{e}_x - \nabla \varphi_0)^2 dS = 6\pi r_0^2$$

Подставив в (2.10), найдем формулу, совпадающую с точностью до стоксова члена с известным точным решением [10], получение которого достаточно сложно.

Сфера в сферической полости. В этом случае [9]

$$\varphi_0 = \left(\frac{r_1^3 r}{r_1^3 - r_2^3} + \frac{r_1^3 r_2^3}{2(r_1^3 - r_2^3)} r^{-2} \right) \cos \theta$$

где r, θ — сферические координаты, r_1, r_2 — радиусы сферы и полости ($r_1 < r_2$). После элементарных вычислений получим

$$I_1 = \frac{6\pi r_1^2 r_2^6}{(r_1^3 - r_2^3)^2}, \quad I_{12} = \frac{6\pi r_1^2 r_2^2 (r_1^4 + r_2^4)}{(r_1^3 - r_2^3)^2}$$

При $r_2 \rightarrow \infty$ $I_{12} \rightarrow 6\pi r_1^2$, что совпадает с (3.1).

Круговой цилиндр в цилиндрической полости. Согласно [8],

$$\varphi_0 = \left(\frac{r_1^2 r}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} r^{-1} \right) \cos \theta$$

Здесь r, θ — цилиндрические координаты, r_1, r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров ($r_1 < r_2$). Определяя I_1 и I_{12} на единицу длины цилиндра, имеем

$$I_1 = \frac{4\pi r_1 r_2^4}{(r_1^2 - r_2^2)^2}, \quad I_{12} = \frac{4\pi (r_1^3 + r_2^3) r_1 r_2}{(r_1^2 - r_2^2)^2} \quad (3.2)$$

Для рассмотренной задачи имеется точное решение в виде громоздкого аналитического выражения [2]. Приведенные в [2] результаты расчетов гидродинамических коэффициентов, обусловленных вязкостью жидкости, в широком диапазоне значений безразмерного параметра $\omega r_1^2/\nu$ ($50-5 \cdot 10^4$) совпадают с результатами расчетов по формулам (2.11), (3.2).

Эллипсоид вращения в безграничной жидкости. Точное решение задачи о движении эллипсоида вращения в жидкости вдоль большой полуоси в цилиндрических координатах x, r имеет вид [9]

$$\varphi_0 = \frac{x}{2-A_0} a b^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{1/2}(b^2+u)}, \quad b_0 = b/a$$

$$A_0 = \frac{2b_0^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon = \sqrt{1-b_0^2}$$

Здесь a, b — полуоси эллипсоида ($a > b$), λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{r^2}{b^2+\lambda} = 1$$

Для рассматриваемого случая получим

$$I_1 = \frac{8\pi a b}{\varepsilon^2 (2-A_0)^2} \left(\frac{1-2b_0^2}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon + b_0 \right) \quad (3.3)$$

Переходя в этом выражении к пределу при $b_0 \rightarrow 1$, найдем $I_1 = 6\pi a^2$, что соответствует формуле (3.1).

Сфера, совершающая вращательные колебания в безграничной жидкости. Используя равенство $\Psi_2 = 0$ и (2.14), получим

$$\Omega_{12} = \Omega_1 = 8\pi R^4/3$$

что вместе с (2.13) дает результат, совпадающий с результатом точного интегрирования линеаризованного уравнения Навье — Стокса ($\nu \ll 1$) [10].

4. Колебания эллипсоида вращения в круговом цилиндре. Определим гидродинамические коэффициенты для эллипсоида вращения с полуосями a, b ($a > b$), совершающего продольные колебания в круговом цилиндре радиуса r_0 и высотой H .

Для нахождения функции φ_0 воспользуемся методом Ритца. Рассмотрим функционал

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{Q_0} (\nabla \varphi)^2 dQ + \int_{S_1} \varphi \cos(n, x) dS$$

Его первая вариация равна

$$\delta J_0 = - \int_{Q_0} \Delta \varphi \delta \varphi dQ - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \cos(n, x) \right) \delta \varphi dS + \int_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi dS$$

Следовательно, функция φ_0 , обеспечивающая стационарное значение функционалу J , является решением задачи, полученной линеаризацией краевой задачи (1.1).

Будем искать φ_0 в виде

$$\varphi_0 = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \dots + c_N \gamma_N \quad (4.1)$$

где γ_k — система координатных функций, обладающая свойством полноты в Q_0 [11]. Выбор этой системы является определяющим шагом решения задачи, от которого в основном и зависит возможность получения достоверного результата. Итеративный процесс заключается в последовательном решении систем алгебраических уравнений и в вычислении приближенных значений m и I_{12}

$$\sum_{k=1}^N m_{kj} c_k = b_j \quad (j=1, \dots, N) \quad (4.2)$$

$$b_j = - \int_{S_1} \gamma_j \cos(n, x) dS, \quad m_{kj} = \int_{Q_0} \nabla \gamma_k \nabla \gamma_j dQ \quad (4.3)$$

$$m = \rho \sum_{k,j=1}^N c_k c_j m_{kj}, \quad I_{12} = \int_{S_1} (e_x - \Delta \varphi_0)^2 dS + \int_{S_2} (\nabla \varphi_0)^2 dS \quad (4.4)$$

Вопрос о выборе системы γ_k не является простым. Опыт проведения расчетов показал, что хорошие результаты дают функции γ_k , принадлежащие классу гармонических функций. В частности, использование гармонических функций позволяет вычислять матрицу m_{kj} в (4.2) с помощью поверхностных интегралов, что дает экономию машинного времени.

При проведении расчетов использовались функции $r^k P_k(\cos \theta)$. $r^{-(k+1)} P_k(\cos \theta)$ ($k=1, 3, 5, \dots$), последовательность расположения которых в (4.1) могла варьироваться. Выбор этих функций позволил получить удовлетворительные результаты лишь для не очень сильно вытянутых эллипсоидов. Например, для $b/a=0,169$ реализовать процесс (4.2)–(4.4) не удалось, так как он потерял устойчивость до того, как величина m приблизилась к своему истинному значению.

Существенного улучшения сходимости процесса вычислений для удлиненных эллипсоидов можно добиться, добавляя к γ_k функцию φ_∞ или близкую к ней. При использовании в качестве γ_1 функции φ_∞ уже при $N=1$ имеем значение m , удовлетворяющее оценке (1.4).

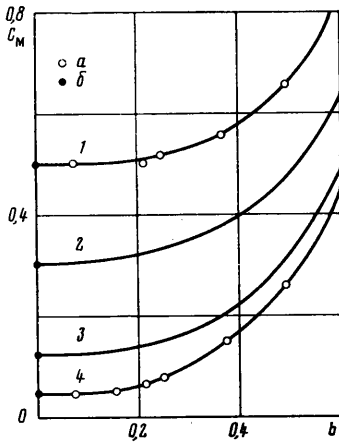
Для проведения массовых расчетов были созданы два варианта АЛГОЛ-программы, в которых в качестве добавочной функции использовались либо потенциал обтекания эллипсоида φ_∞ , либо потенциал обтекания тела Рэнкина [9]. Параметры этого тела за счет изменения расстояния от стока до источника выбирались такими, чтобы они соответствовали максимальному значению m при $N=2$.

Реализованные таким образом АЛГОЛ-программы дали близкие результаты вычислений, что позволило рассчитывать величины m и I_{12} для эллипсоидов вращения при $(a/b) \leq 6$ с достаточной точностью. Основные результаты расчетов представлены на фиг. 1 и 2. Сравнение расчетных результатов с экспериментальными приводится ниже.

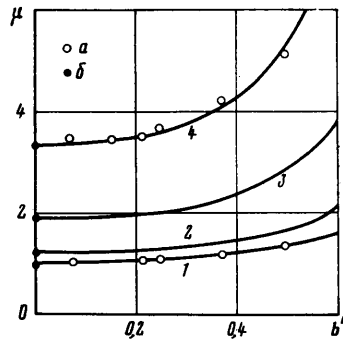
5. Некоторые результаты экспериментальных исследований. Экспериментальные исследования проводились с целью проверки теоретических результатов. В процессе их проведения были определены присоединенные массы и коэффициенты демпфирования для тел в форме шара и эллипсоида вращения при поступательных колебаниях в сферических и цилиндрических баках. Искомые коэффициенты определялись для случая расположения шара и эллипсоида в центре баков методом свободных колебаний.

Шар, эллипсоид и баки имели следующие размеры: радиус шара — 74,14 мм; полуоси эллипсоида — $a=440$ мм; $b=74,37$ мм; радиусы сферических баков — 165 и 432 мм, цилиндрических — 150, 200, 300, 350, 482 и 1000 мм. Высота цилиндрических баков выбиралась из условия $H > 2a + 6b$. При выполнении этого условия, как показали расчеты, влияние дна на гидродинамические коэффициенты пренебрежимо мало.

Шар и баки изготовлены из алюминиевых сплавов, эллипсоид — из стали и твердого пенопласта. Внешние поверхности шара и эллипсоида, а также внутренние



Фиг. 1



Фиг. 2

стенки баков — гладкие. Баки заполнялись водой, температура которой контролировалась перед каждым испытанием.

Массы шара и эллипсоида равны 1,707 и 10,194 кг, что соответствует массам вытесненной воды при полном их погружении. Центр масс эллипсоида лежит на большой полуоси на расстоянии 200 мм от геометрического центра, а сферы — на расстоянии 40 мм.

Испытываемое тело подвешивалось вертикально на тонкой струне к чувствительному элементу, выполненному в виде консольного стержня с наклеенными на нем тензорезисторами. Между чувствительным элементом и струной вводилась винтовая пружина, жесткость которой подбиралась исходя из заданной частоты вертикальных колебаний тела. Предварительное натяжение пружины создавалось небольшими съёмными грузами, которые устанавливались внутри тела.

Свободные колебания тела записывались на шлейфовом осциллографе с использованием высокоточного отметчика времени. Диапазоны частот и амплитуд колебаний, реализованные в экспериментах, составляли 0,1–1 Гц и 0–20 мм.

Экспериментально определялись следующие величины: собственная частота колебаний тела в жидкости f и соответствующий логарифмический декремент δ ; жесткость подвеса C и подвижная масса m' , включающая массу тела и съёмных грузов, а также массу струны и $1/3$ массы пружины.

Декремент δ находился как разность декрементов, характеризующих суммарное рассеяние энергии колебаний и рассеяние энергии в подвесе. Декремент, характеризующий рассеяние энергии в подвесе, определялся по осциллограммам затухающих колебаний груза в воздухе, масса которого выбиралась из условия сохранения начального натяжения пружины. Он не зависит от частоты колебаний и по величине по крайней мере на порядок меньше суммарного декремента. Определение жесткости подвеса производилось двумя способами. Первый из них состоит в измерении собственной частоты колебаний груза в воздухе и его массы, второй — в измерении статических перемещений от эталонных грузов.

Искомые гидродинамические коэффициенты вычислялись по формулам

$$m = \frac{C}{4\pi^2 f^2} \left(1 - \frac{\delta}{\pi} \right) - m^0$$

$$m' = \frac{C\delta}{4\pi^3 f^2}, \quad h = \frac{C\delta}{2\pi^2 f}$$

которые непосредственно вытекают из (2.12).

Ниже приведены экспериментальные и теоретические значения присоединенных масс и коэффициента демпфирования для шара, совершающего колебания в сферическом баке:

r_2	f	m_e	m	m_e'	m'	h_e	h
165	0,4876	1,113	1,109	0,052	0,053	0,159	0,162
165	0,2815	1,096	1,109	0,070	0,069	0,124	0,122
432	0,5085	0,864	0,867	0,042	0,041	0,131	0,131
432	0,2941	0,861	0,867	0,057	0,054	0,100	0,100

На фиг. 1 и 2 построены зависимости безразмерных величин

$$c_M = \frac{m}{(4/3)\pi r_0 b^2}, \quad \mu = \frac{I_{12}}{6\pi b^2} = \frac{m'}{6\pi r_0 b^2} \sqrt{\frac{2\omega}{\nu}} = \frac{h}{6\pi r_0 b^2} \sqrt{\frac{2}{\nu\omega}}$$

от параметров $b' = b/r_0$ и $b_0 = b/a$ для эллипсоида вращения при колебаниях в цилиндрическом баке. Расчетные кривые 1–4 получены методом Ритца для значений $b_0 = 0,169; 1/3; 2/3$ и 1 соответственно. Экспериментальные данные нанесены значками a . Обозначения b на фиг. 1 соответствуют точному решению задачи для безграничной жидкости, а на фиг. 2 — расчету по формулам (2.12), (3.3).

Как видно из приведенного сравнения, наблюдается хорошее согласование расчетных и экспериментальных значений гидродинамических коэффициентов.

Экспериментально установлено, что гидродинамические коэффициенты практически не зависят от амплитуды колебаний во всем реализованном диапазоне изменения амплитуд. Влиянием днищ баков на гидродинамические коэффициенты можно пренебречь, если высота баков $H > 2a + 6b$. В этом случае присоединенные массы для эллипсоида вращения могут быть с достаточной точностью вычислены по следующим полуэмпирическим формулам:

$$m = \frac{4\pi a b^2}{3(1 - b^3/r_0^3)} \left[c_M^\infty + 0,48(2 + \sqrt{a/b - 1}) \left(1 - \frac{b^3}{r_0^3}\right) \frac{b^3}{r_0^3} \right]$$

$$m' = \frac{m_\infty'}{(1 - b^3/r_0^3)} \left[1 + 0,9\sqrt{a/b - 1} \frac{b^3}{r_0^3} + 2 \frac{b^4}{r_0^4} \right]$$

где c_M^∞ , m_∞' — коэффициент присоединенной массы и «вязкая» присоединенная масса в случае безграничной жидкости. Полуэмпирические формулы получены для того же диапазона значений b_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Федотовский В. С. О гидродинамической инерционности и демпфирования колебаний стержневых элементов и оболочек в ограниченных объемах, заполненных жидкостью. Физ.-энерг. ин-т. Обнинск. Препр., 1979, № 962, 20 с.
2. Chen S. S., Wambsganss M. W., Jendrzejczyk J. A. Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1976, v. 43, № 2, p. 325–329.
3. Синяевский В. Ф., Федотовский В. С., Кухтин А. Б. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 1, с. 62–67.
4. Yang C. I., Moran T. J. Calculations of added mass and damping coefficients for hexagonal cylinders in a confined viscous fluid.— Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol., 1980, v.102, № 2, p. 152–157.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Усп. матем. н., 1957, т. 12, в. 5, с. 3–122.
6. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 239 с.
7. Столбецов В. И. О немалых колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2, с. 59–66.
8. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
9. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
11. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1981