

из выражения (1.2). Таким образом, (2.1) примет вид

$$2T = \rho a \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (A_{ij}^{(1)} u_1 + A_{ij}^{(2)} u_2) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right)^i \left(\frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right)^j (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \sin \theta_1) \right) d\theta_1 = \sum_{e=1}^2 \sum_{p=1}^2 \lambda_{ep} u_e u_p \quad (2.2)$$

где ρ — плотность жидкости; λ_{ep} ($e, p=1, 2$) — коэффициенты присоединенных масс.

На фиг. 2 приведены значения коэффициента присоединенных масс λ_{11} при различных значениях расстояний цилиндра от стенок прямолинейного канала ($b_1 = b_2 = b$). Из фиг. 2 видно, что при $b_i \rightarrow \infty$ коэффициенты присоединенных масс стремятся к значениям коэффициентов присоединенных масс при движении цилиндра в безграничной области [5], заполненной неподвижной идеальной несжимаемой жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазур В. Ю. Движение двух круговых цилиндров в идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6, с. 80–84.
2. Вальес Н. Г. Колебания системы стержней в жидкости. — Проблемы прочности, 1978, № 11, с. 62–68.
3. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
4. Патарая Н. Н. Обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их приложения к задачам совместного движения твердых тел в жидкости. — Тр. Тбилисского ун-та, 1976, т. 166, с. 69–82.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.

Горький

Поступила в редакцию
22.XII.1980

УДК 532.593

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СДВИГОВЫХ ПОТОКАХ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

ЕЗЕРСКИЙ А. Б.

При распространении волновых пакетов в жидкостях и газах из-за нелинейности сред возникают средние потоки — индуцированные течения, величина которых пропорциональна квадрату амплитуды волн. Такие течения учитываются при определении переноса массы поверхностными и внутренними гравитационными волнами в океане [1], при расчете плотности энергии, скорости диссипации и энергетического баланса для волн, распространяющихся в сдвиговых потоках, при отыскании инкремента модуляционной неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости [2]. До настоящего времени структура течений, индуцированных волнами, подробно исследовалась в случаях, когда в среде отсутствуют сдвиговые потоки [3, 4]. Наличие сдвиговых потоков существенно влияет на возбуждение индуцированных течений, появляется возможность обмена энергией между волной и потоком, что приводит к возникновению пространственно-неоднородных течений, связанных с изменением амплитуды волны. Во многих случаях профили скорости реальных потоков, возникающих при лабораторном моделировании внутренних волн в наклонных лотках [5], при стекании стратифицированных пленок [6], при накате длинных волн на пологий берег могут быть аппроксимированы кусочно-линейной функцией [7].

В настоящей работе для потоков с такими профилями скорости определяются индуцированные течения, возникающие при распространении волновых пакетов малой, но конечной амплитуды, и основные эффекты, возникающие при этом: модифицированная неустойчивость гармонических волн, изменение среднего уровня жидкости, — связанные с возбуждением волновым пакетом средних течений.

Рассмотрим двумерные волны, распространяющиеся в невязком потоке, профиль скорости которого $U(y)$ кусочно-линейный. Считаем, что плотность жидкости ρ постоянна там, где постоянна завихренность потока (такая ситуация наиболее характерна для течений, см. [5, 6]), силы гравитации вертикальны.

Для потенциальных движений, которые будут рассматриваться далее, имеем

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + U(y) \quad (1)$$

Здесь φ – потенциал, u, v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, $U(y)$ – скорость основного потока.

Условия непрерывности смещения и импульса при переходе через границу раздела различных жидкостей имеют вид

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(\eta_i) \quad (2)$$

$$p_i(\eta_i) = p_{i+1}(\eta_i) \quad (3)$$

Здесь $\eta_i(x, t)$ – поверхности раздела жидкостей, p – давление, $i, i+1$ относятся к смежным слоям жидкости. Будем считать, что поток устойчив, и представим φ в виде

$$\varphi_i(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_i^{(n)}, \quad \eta_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_i^{(n)} \quad (4)$$

$$A_i^{(n)} = \varepsilon^n \varphi_i^{(n)}(x, y, \xi, \tau, \theta), \quad B_i^{(n)} = \varepsilon^n \eta_i^{(n)}(\xi, \tau, \theta)$$

Здесь ε – малый параметр, $\xi = \varepsilon x$ – медленная координата, $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, $\theta = \omega t - kx$ – быстрая фаза. Будем рассматривать распространение волновых пакетов, для которых

$$\varphi_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta}, \quad \eta_i^{(1)} = \beta_i(\xi, \tau) e^{i\theta}$$

т. е. их характерная ширина $\Delta\omega/\omega$, $\Delta k/k$ порядка ε . Пусть к тому же расстояния H_i между границами η_i и η_{i+1} удовлетворяют неравенству $\Delta k H_i < \varepsilon$. Пользуясь асимптотическим методом [8], получим уравнения для определения средних величин. Подставляя разложение (4) в (1), получим

$$\Delta \varphi_i^{(1)} = 0, \quad \Delta \varphi_i^{(2)} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial x \partial \xi} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta \varphi_i^{(3)} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(2)}}{\partial x \partial \xi} = 0 \quad (6)$$

Из условия непрерывности смещения границы раздела различных жидкостей (2), записанного с точностью до третьего порядка по ε и усредненных по фазе θ , следует, что, для того чтобы не было линейно растущих по фазе θ добавок $\eta_i^{(3)}$, которые за время $t \sim 1/\varepsilon^2$ нарастают до величины $\eta_i^{(1)}$, необходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial \tau} + U_i(\eta_i) \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_i}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \xi} \eta_i^{(1)} \right\rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x}(\eta_i) \eta_i^{(1)} \right\rangle = \frac{\partial \varphi_i^{(3)}}{\partial y}(\eta_i) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial \tau} + U_{i+1}(\eta_i) \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{i+1}}{\partial y}(\eta_i) \left\langle \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \xi} \eta_i^{(1)} \right\rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial \varphi_{i+1}^{(1)}}{\partial x}(\eta_i) \eta_i^{(1)} \right\rangle = \frac{\partial \varphi_{i+1}^{(3)}}{\partial y}(\eta_i) \end{aligned}$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по фазе θ .

Из граничных условий (3) следует, что $\partial \varphi_i^{(3)}/\partial x$, $\partial \varphi_i^{(3)}/\partial y$ всегда ограничены и не растут линейно по фазе θ .

Условие, из которого может быть найден средний поток $\langle \partial \varphi_i^{(2)}/\partial x \rangle = u_i^{(2)}$, получается из уравнений связи потенциала и давления, записанного с точностью до ε^2 .

Исключая возможность линейного роста по θ величин $\partial \varphi_i^{(3)}/\partial x$, $\partial \varphi_i^{(3)}/\partial y$, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \rho_i \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \tau} + U_i(y) \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_i}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \varphi_i^{(3)}}{\partial y} \right\rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \langle p_i^{(2)} \rangle = 0 \quad (8) \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\langle p_i^{(2)} \rangle + \frac{1}{2} \rho_i \left\langle \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

Для среднего течения, усредняя по θ третье уравнение (5), (6) с учетом условия $\Delta KH_i < \varepsilon$, получим

$$\frac{\partial^2 \langle \varphi_i^{(3)} \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} u_i^{(2)} = 0 \quad (9)$$

Система уравнений (7)–(9), дополненная граничными условиями (если, например, поток создан между твердыми стенками с координатами $y=0$ и $y=d$, то $\langle \partial \varphi^{(n)} / \partial y \rangle|_{y=0} = \langle \partial \varphi^{(n)} / \partial y \rangle|_{y=d} = 0$), позволяет по известным потенциалам $\varphi_i^{(1)}(y, \tau, \xi, \theta)$ и отклонениям поверхностей $\eta_i^{(1)}(\tau, \xi, \theta)$ определить индуцированные течения и средние смещения поверхностей раздела жидкостей.

Определим средние величины второго порядка малости по амплитуде волн, возникающие при распространении пакета на сдвиговом течении, профиль скорости которого представлен на фиг. 1.

Из (7)–(9) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \tau} + U(-H) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + g \frac{\partial}{\partial \xi} \langle \eta^{(2)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \\ & \frac{\partial \langle \eta^{(2)} \rangle}{\partial \tau} + U(0) \frac{\partial \langle \eta^{(2)} \rangle}{\partial \xi} + H \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle U_y' \langle \eta^{(1)} \rangle^2 + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \eta^{(1)} \right\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

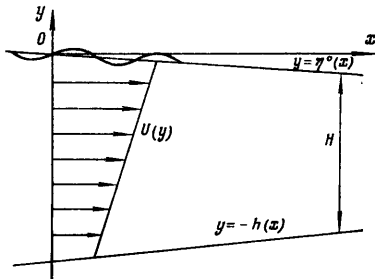
При выводе (10) учтено (см. [9]), что

$$u^{(2)}(y) = \text{const}, \quad \langle p^{(2)}(0) \rangle = \rho g \langle \eta^{(2)} \rangle - \rho \partial \varphi^{(1)}(0) / \partial y$$

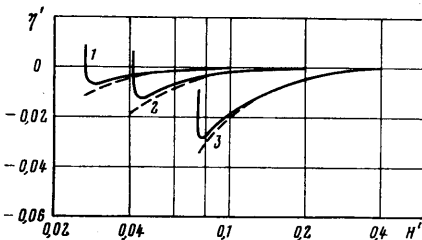
Если правые части (10) равны нулю, то эти уравнения описывают длинные волны на сдвиговом потоке. Отметим также, что первое уравнение (10) – закон сохранения энергии, а второе – закон сохранения массы при распространении в потоке волнового пакета.

В работе [7] средний поток $u^{(2)}$ находился в стационарном приближении $\partial / \partial \tau = 0$ из условия, что он компенсирует перенос массы между гребнями и впадинами волн – стоксов дрейф [9]. Если отклонение поверхности жидкости $\eta^{(1)} = -a(\xi) e^{i\theta} + \text{к.с.}$, то скорость среднего течения, полученная в работе [7], имеет вид

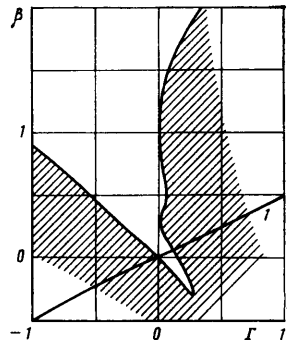
$$u^{(2)} = -\frac{1}{H} (U_y' + (\omega - kU(0)) \text{cth } kH) |a|^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Это неверно, так как не учитывается, что при наличии потока перенос массы может быть связан с изменением средней глубины жидкости $\langle \eta^{(2)} \rangle$ (член $U(0) \partial \eta^{(2)} / \partial \xi$ во втором уравнении (10)). Если бы потока не было, $U=0$, то, действительно, в стационарном случае стоков дрейф компенсируется индуцированным течением.

Пусть амплитуда волны, так же как в [7], зависит от координаты x из-за того, что медленно изменяется глубина жидкости $H=H(x)$. Уравнения (10) будут несколько иными, так как в левых частях уравнений (7) и (8) добавятся члены

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \left(\eta^{(0)} = -\frac{U^2}{2g} \right), \quad \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}$$

связанные с медленным изменением основного потока (поток считается плоскопараллельным). Изменяются также граничные условия. Теперь

$$\frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=-h(x)} = -h'x \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x}$$

так как равной нулю должна быть нормальная к дну компонента скорости.

В стационарном случае для потока без завихренности имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (U(\xi) u^{(2)}) + g \frac{\partial}{\partial \xi} \langle \eta^{(2)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (U(\xi) \langle \eta^{(2)} \rangle) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Hu^{(2)}) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \eta^{(1)} \right\rangle$$

$$\langle \eta^{(2)} \rangle = \frac{|a|^2}{U^2 - gH} (H(\omega - kU)^2 (\text{cth}^2 kH - 1) - 2\nu(\omega - kU) \text{cth} kH) \quad (12)$$

На фиг. 2 показана зависимость безразмерного уровня средней поверхности $\eta' = \eta_c / L_0$, $\eta_c = \eta^{(0)} + \langle \eta^{(2)} \rangle$ от глубины жидкости $H' = H / L_0$. Расчеты проведены для волн, частота которых $\omega = (2\pi g / L_0)^{1/2}$ — безразмерная величина расхода $q^* = 2\pi q_1 / L_0^2 \omega$

$$\left(q_1 = \int_{-h(x)}^{\eta_c + \eta^{(1)}} \left(U + u^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right) dy \right)$$

равна $q^* = 0,01$ (кривая 1), $q^* = 0,02$ (кривая 2), $q^* = 0,05$ (кривая 3).

Во всех случаях начальная амплитуда волны a_1 в точке, где $H = H_1 = 0,5L_0$, равна $a_1 / L_0 = 0,01$. Пунктиром на этой фигуре показана величина η' , подсчитанная в работе [7] для тех же значений начальной амплитуды и расхода жидкости. Значительное различие результатов наблюдается там, где скорость потока U совпадает со скоростью волн на мелкой воде $U = (gH)^{1/2}$. Эта особенность возникает из-за того, что при совпадении скоростей частота собственной крупномасштабной моды (в этой волне по гармоническому закону изменяются $u^{(2)}$ и $\langle \eta^{(2)} \rangle$) $\omega = kU - k(gH)^{1/2}$, распространяющейся вверх по потоку, равна нулю и совпадает с частотой внешней силы (правые части в (11) не зависят от времени). В результате есть частотный резонанс, приводящий к неограниченному нарастанию $\langle \eta^{(2)} \rangle$ и $u^{(2)}$ в окрестности точки, где $U = (gH)^{1/2}$. Такие эффекты в [7] не были обнаружены из-за некорректного определения индуцированных течений.

Приведем численную оценку, показывающую возможность регистрации средних потоков и средних смещений поверхности, вызванных гравитационными волнами. Пусть глубина жидкости 50 см, скорость потока 2 м/с, длина волны $\lambda = 3$ м, амплитуда 5 см. Тогда изменение уровня потока, обусловленное волной, будет 2 см, а скорость индуцированного течения 10 см/с.

Рассмотрим теперь влияние индуцированных течений на самовоздействие волны, распространяющейся в сдвиганном потоке типа пограничного слоя $U_1(y) = U_0(y) / H$ ($0 < y < H$), $U_2(y) = U_0$ ($H < y < H_1$).

Из решения системы (7)–(9) для такого потока можно получить, что величиной среднего течения, индуцированного волной в незавихренной жидкости при $H_1 \gg H$ можно пренебречь, а в завихренной жидкости индуцированное течение, однородное по глубине, определяется уравнением

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \frac{U_0^2}{H^2} e^{-2kH} \frac{\partial}{\partial x} (BB^*) = 0 \quad (13)$$

Здесь B — амплитуда отклонения поверхности раздела жидкостей $\eta = Be^{i\theta}$.

Уравнение, описывающее эволюцию амплитуды волны, имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial B}{\partial x} + i \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + i \gamma B |B|^2 = i \sigma u^{(2)}, \quad \sigma = k$$

$$\omega = U_0 k - U_0 / H \operatorname{sh} kH e^{-kH} \quad (14)$$

$u^{(2)}$ — определяется (13), γ — коэффициент, рассчитанный в работе [10]. В этой работе возбуждение средних течений не принималось во внимание, поэтому условие неустойчивости решения $B = B_0 e^{-i\gamma|B_0|^2}$ по отношению к малым возмущениям $b \exp(i\Omega t - qx)$ сводилось к условию Лайтхилла $\omega_{hk}'' \gamma > 0$. Так как $\omega_{hk}'' = 2U_0 H e^{-2kH}$, то неустойчивость возникала при $\gamma > 0$.

При учете средних течений выполнение условия $\gamma \omega_{hk}'' > 0$ не обязательно. Для Ω и q в этом случае имеем

$$\left(\left(\frac{\Omega}{q\omega_{hk}'} \right)^2 - \beta \right) \left(\frac{\Omega}{q\omega_{hk}'} + 1 \right) = \Gamma \quad (15)$$

$$\Gamma = 4 \frac{(2U_0 q^2 H e^{-2kH} - \gamma |B_0|^2)}{2U_0 q (1 - e^{-2kH})^3} e^{-2kH} \quad (16)$$

$$\beta = 4 \frac{(2U_0 q^2 H e^{-2kH} - \gamma |B_0|^2)}{U_0 q (1 - e^{-2kH})} e^{-2kH} \quad (17)$$

На фиг. 3 для переменных Γ и β построена область неустойчивости (она заштрихована). Даже если $\gamma < 0$, то, например, при $kH \gg 1$, $Hq \ll 1$ из (16), (17) имеем $\Gamma = 2\beta$ (прямая 1) и гармоническая волна неустойчива к малой модуляции. Это модифицированный распад — появление модуляции сопровождается возбуждением средних потоков.

Отметим, что экспериментально такую неустойчивость можно обнаружить, если только искусственно создавать пограничные слои с профилем скорости, близким к кусочно-линейным. В реальных пограничных слоях [11] коэффициенты γ и σ в (14) — комплексные, что приводит к взрывной неустойчивости пакетов — за конечное время амплитуда модуляций нарастает до бесконечности. Между тем проведенное выше вычисление инкремента модуляционной неустойчивости волн в пограничном слое представляет методический интерес и позволяет исправить полученные ранее в [10] некорректные результаты.

В заключение автор выражает признательность М. И. Рабиновичу и Е. Н. Пелиновскому за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves — Phil. Trans., 1953, v. A245, № 903, p. 535–581.
2. Борисенко Ю. Д., Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976, т. 12, № 3, с. 293–301.
3. Деорянинов Г. С., Тимченко И. Е., Чехлян А. Е. К теории генерации стационарных потоков в пограничном слое поверхностными волнами. — В кн.: Морские гидрофиз. исследования. Севастополь, 1978, № 1, с. 5–14.
4. Dore B. D. Mass transport in layered fluid systems. — J. Fluid Mech., 1970, v. 40, № 1, p. 113–126.
5. Tshimitsu Komatsu, Makoto Imasaka, Toidiro Tsubaki. Statistical properties of internal waves at the interface of two-layered flows. — Кюдай Когакко сую, 1979, т. 52, № 1, (пер. АГР-2644).
6. Tshahalis D. T. The hydrodynamic stability of two viscous incompressible fluids in parallel uniform shearing motion. — J. Appl. Mech., 1979, v. 46, № 3, p. 499–504.
7. Jonsson I. G., Brink-Kjser O., Thomas G. P. Wave action and set-down for waves on a shear current. — J. Fluid Mech., 1978, v. 87, № 3, p. 401–416.
8. Островский Л. А. Приближенные методы в теории нелинейных волн. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 454–476.
9. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеозиздат, 1980. 319 с.
10. Benney D. I., Maslowe S. A. The evolution in space and time of nonlinear waves in parallel shear flows. — Stud. Appl. Math., 1975, v. 54, № 3, p. 181–204.
11. Hocking L. M. Non-linear instability of the asymptotic section velocity profile. — Quart. Mech. and Appl. Math., 1975, v. 28, № 3, p. 341–353.

Горький

Поступила в редакцию
9.III.1981