

Полученные зависимости дают возможность определить распределение давления в любой момент времени после начала нагнетания жидкостей во всех зонах пласта; забойное давление p_0 и закон движения границы раздела R . Линейное изменение проницаемости при стационарном режиме фильтрации рассмотрел С. В. Васильев [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lembke C.* Du mouvement des eaux souterraines et théorie de leurs collecteurs.— Rev. Univ. Mines, 3ème série, 1888, v. 1, 2, 3, 4.
2. *Чарный И. А.* Подземная гидромеханика. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 196 с.
3. *Чарный И. А.* Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложения к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов.— Изв. АН СССР. ОТН, 1949, № 3, с. 323—342.
4. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
5. *Пирвердян А. М.* Нефтяная подземная гидравлика. Баку: Азнефтеиздат, 1956. 332 с.
6. *Васильев С. В.* Закачка жидкостей в зону искусственной трещиноватости пород при изменении их проницаемости по линейному закону.— Тр. ВНИИ водоснабж., канализ., гидротехн. сооруж. и инж. гидрогеол., 1975, вып. 48, с. 53—56.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1981

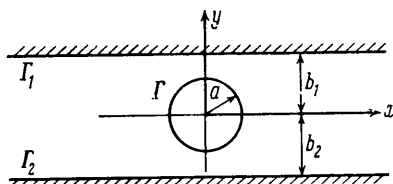
УДК 532.58.034

ДВИЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

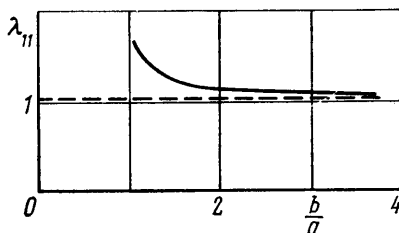
ВАСИЛЬЕВ А. Н., ГОЛУБЕВ В. В.

При движении тел в жидкости параметры их движения сильно зависят от взаимодействия с жидкостью, окружающей эти тела [1, 2]. Настоящая работа посвящена определению гидродинамических сил, действующих на цилиндр, при его движении в бесконечном прямолинейном канале в неподвижной идеальной несжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи и определение потенциала скоростей. Будем решать плоскую задачу, когда при движении круговой цилиндр не касается стенок прямолинейного



Фиг. 1



Фиг. 2

канала (фиг. 1). Считаем, что возмущенное движение жидкости, вызванное движением цилиндра, возникло из состояния покоя. Тогда потенциал скоростей возмущенного движения жидкости $\varphi(x, y)$ удовлетворяет в физической области D , расположенной внутри прямолинейного канала и вне окружности Γ (фиг. 1), представляющей собой контур цилиндра в перпендикулярной к его оси плоскости (x, y) , уравнению Лапласа и следующим граничным условиям [3]:

$$\Delta\varphi(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

$$\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\}_{\Gamma} = u_1 \cos(n, x) + u_2 \cos(n, y) \quad (1.2)$$

$$\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\}_{\Gamma_i} = 0; \quad \Gamma_1: y - b_1 = 0; \quad \Gamma_2: y - b_2 = 0 \quad (1.3)$$

Здесь n — направление нормали; u_1, u_2 — составляющие скорости цилиндра; Γ, Γ_i — границы цилиндра прямолинейного канала.

Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат в центре цилиндра. Физическую область D отобразим на вспомогательную область с помощью

отображения [4]

$$x = \frac{a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2}; \quad y = \frac{a^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (1.4)$$

Область D' расположена внутри окружности Γ^* : $\xi^2 + \eta^2 = a^2$, являющейся образом Γ , и вне окружностей Γ_i^* , являющимися образами стенок Γ_i :

$$\Gamma_i^*: \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{2} \frac{a}{b_i} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b_i^2}$$

Краевая задача (1.1)–(1.3) в D' имеет вид [4]

$$\Delta \Phi^*(\xi, \eta) = 0 \quad (1.5)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right\} = \frac{a^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_1(\eta^2 - \xi^2) - 2u_2 \xi \eta] \cos(n, \xi) + [u_2(\xi^2 - \eta^2) - 2u_1 \xi \eta] \cos(n, \eta) \right\}, \quad (x, y) \in \Gamma^* \quad (1.6)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} = 0, \quad \Gamma^* \quad (i=1, 2) \quad (1.7)$$

Отыскание гармонической функции $\Phi^*(\xi, \eta)$ по граничным условиям (1.6), (1.7) в D' сводится к нахождению минимума функционала [4] при естественных граничных условиях

$$I = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta - 2 \int_{\Gamma^*} \Phi^* \psi(G) dG \quad \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right\}_{\Gamma^*} = \psi(G) \quad (1.8)$$

Потенциал скоростей $\Phi^*(\xi, \eta)$ определяем в D' с помощью метода Ритца в виде

$$\Phi^*(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m A_{ij} \xi^i \eta^j \quad (1.9)$$

Подставим (1.9) в (1.8) и определим коэффициенты A_{ij} ($i, j=0, 1$) из следующей системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left(\iint_D \left[\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^m i A_{ij} \xi^{i-1} \eta^j \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m j A_{ij} \xi^i \eta^{j-1} \right)^2 \right] d\xi d\eta - 2 \int_{\Gamma^*} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m A_{ij} \xi^i \eta^j \right) \psi(G) dG \right) \quad (ij=0, m) \quad (1.10)$$

Сделав обратное преобразование, найдем потенциал скоростей $\Phi(x, y)$ в физической области D в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (A_{ij}^{(1)} u_1 + A_{ij}^{(2)} u_2) \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right)^i \left(\frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right)^j \quad (1.11)$$

Если в (1.9) ограничиться первым приближением по Ритцу, то получим потенциал скоростей (1.11) в виде

$$\Phi'(x, y) = (x u_1 + y u_2) a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{b_1^2} - \frac{1}{4} \frac{a^2}{b_2^2} \right) (x^2 + y^2) \right]^{-1} \quad (1.12)$$

При $b_i \rightarrow \infty$ из (1.12) получаем точное решение гидродинамической задачи при движении цилиндра радиуса a в безграничной области, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью [5].

2. Определение сил, действующих на цилиндр. Кинетическая энергия, заключенная в слое жидкости единичной высоты при движении цилиндра, может быть выражена выражением [3]

$$2T = \rho \Gamma \int \Phi(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial n} dG \quad (2.1)$$

где $\Phi(x, y)$ определяется из (1.11) и является в (2.1) граничным значением потенциала скорости на цилиндре. Значение $\{\partial \Phi / \partial n\}$ на поверхности цилиндра определяем

из выражения (1.2). Таким образом, (2.1) примет вид

$$2T = \rho a \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (A_{ij}^{(1)} u_1 + A_{ij}^{(2)} u_2) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right)^i \left(\frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right)^j (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \sin \theta_1) \right) d\theta_1 = \sum_{e=1}^2 \sum_{p=1}^2 \lambda_{ep} u_e u_p \quad (2.2)$$

где ρ — плотность жидкости; λ_{ep} ($e, p=1, 2$) — коэффициенты присоединенных масс.

На фиг. 2 приведены значения коэффициента присоединенных масс λ_{11} при различных значениях расстояний цилиндра от стенок прямолинейного канала ($b_1 = b_2 = b$). Из фиг. 2 видно, что при $b_i \rightarrow \infty$ коэффициенты присоединенных масс стремятся к значениям коэффициентов присоединенных масс при движении цилиндра в безграничной области [5], заполненной неподвижной идеальной несжимаемой жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазур В. Ю. Движение двух круговых цилиндров в идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6, с. 80–84.
2. Вальес Н. Г. Колебания системы стержней в жидкости. — Проблемы прочности, 1978, № 11, с. 62–68.
3. Седов Л. Н. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
4. Патарая Н. Н. Обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их приложения к задачам совместного движения твердых тел в жидкости. — Тр. Тбилисского ун-та, 1976, т. 166, с. 69–82.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.

Горький

Поступила в редакцию
22.XII.1980

УДК 532.593

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СДВИГОВЫХ ПОТОКАХ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

ЕЗЕРСКИЙ А. Б.

При распространении волновых пакетов в жидкостях и газах из-за нелинейности сред возникают средние потоки — индуцированные течения, величина которых пропорциональна квадрату амплитуды волн. Такие течения учитываются при определении переноса массы поверхностными и внутренними гравитационными волнами в океане [1], при расчете плотности энергии, скорости диссипации и энергетического баланса для волн, распространяющихся в сдвиговых потоках, при отыскании инкремента модуляционной неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости [2]. До настоящего времени структура течений, индуцированных волнами, подробно исследовалась в случаях, когда в среде отсутствуют сдвиговые потоки [3, 4]. Наличие сдвиговых потоков существенно влияет на возбуждение индуцированных течений, появляется возможность обмена энергией между волной и потоком, что приводит к возникновению пространственно-неоднородных течений, связанных с изменением амплитуды волны. Во многих случаях профили скорости реальных потоков, возникающих при лабораторном моделировании внутренних волн в наклонных лотках [5], при стекании стратифицированных пленок [6], при накате длинных волн на пологий берег могут быть аппроксимированы кусочно-линейной функцией [7].

В настоящей работе для потоков с такими профилями скорости определяются индуцированные течения, возникающие при распространении волновых пакетов малой, но конечной амплитуды, и основные эффекты, возникающие при этом: модифицированная неустойчивость гармонических волн, изменение среднего уровня жидкости, — связанные с возбуждением волновым пакетом средних течений.

Рассмотрим двумерные волны, распространяющиеся в невязком потоке, профиль скорости которого $U(y)$ кусочно-линейный. Считаем, что плотность жидкости ρ постоянна там, где постоянна завихренность потока (такая ситуация наиболее характерна для течений, см. [5, 6]), силы гравитации вертикальны.

Для потенциальных движений, которые будут рассматриваться далее, имеем

$$\Delta\varphi=0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + U(y) \quad (1)$$