

градами) газовой струе зависят от  $\alpha$  и не зависят от  $M_\alpha$  и  $n$ . Газодинамический участок растекающейся газовой струи хорошо следит за формой преграды. При этом скачки нерасчетности повторяют кривизну преграды и после схода с нее. На фиг. 3 показано влияние угла  $\alpha$  и величины  $P_k$  на длину газодинамического участка в растекающейся газовой струе; кривые 1-4 соответствуют значениям  $P_k=50; 105; 140$  и  $175$ .

Длина газодинамического участка в растекающейся газовой струе  $L_g' = \text{const}$  при всех значениях  $x_n'$  и  $l'$ , для  $1 \leq x_c = x_c'/d_k \leq 30$  при растекании по плоской, вогнутой и выпуклой преградам и может быть аппроксимирована следующими зависимостями:

$$L_g = \frac{L_g'}{d_k} = a \exp(C - B\alpha) P_k$$

$$(30^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ)$$

$$L_g = \frac{f}{\alpha^a} \exp\left(\frac{K}{\alpha^\beta} P_k\right)$$

$$(15^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ)$$

$$a=4,35; B=0,16 \cdot 10^{-3}; \omega=1,78;$$

$$\beta=-1,025; C=0,0154;$$

$$f=1,86 \cdot 10^3; K=0,3227 \cdot 10^{-3}$$

На фиг. 1 показано влияние величины  $P_k$  на длину первой скачковой конфигурации в растекающейся по плоской и выпуклой преградам газовой струе при углах  $\alpha=15, 30$  и  $60^\circ$  (сплошные кривые 1-3) и в растекающейся по вогнутой преграде газовой струе при углах  $\alpha=15$  и  $30^\circ$  (штриховые кривые 4 и 5).

Длина первой скачковой конфигурации в растекающейся по плоской и выпуклой преградам газовой струе аппроксимируется зависимостью

$$l_1 = \frac{l_1'}{d_k} = 2(B + C\alpha + D\alpha^2) P_k^{\beta + \gamma\alpha}$$

$$B=0,666; C=-0,159; D=0,121 \cdot 10^{-3} \quad \beta=0,4714; \gamma=0,404 \cdot 10^{-2}$$

Длина первой скачковой конфигурации в растекающейся по вогнутой преграде газовой струе меньше и аппроксимируется зависимостями

$$l_1 = 0,5284 (P_k)^{0,587} \quad (\alpha=30^\circ); \quad l_1 = 0,491 (P_k)^{0,5445} \quad (\alpha=60^\circ)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юдаев Б. Н., Михайлов М. С., Савин В. К. Теплообмен при взаимодействии струи с преградами. М.: Машиностроение, 1977. 247 с.
2. Анцупов А. В., Благосклонов В. И. О структуре сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство. - Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1781, 23 с.
3. Анцупов А. В. Исследование параметров нерасчетной сверхзвуковой струи газа. - Ж. техн. физ., 1974, т. 44, № 2, с. 372.

Ленинград

Поступила в редакцию  
3.XI.1981

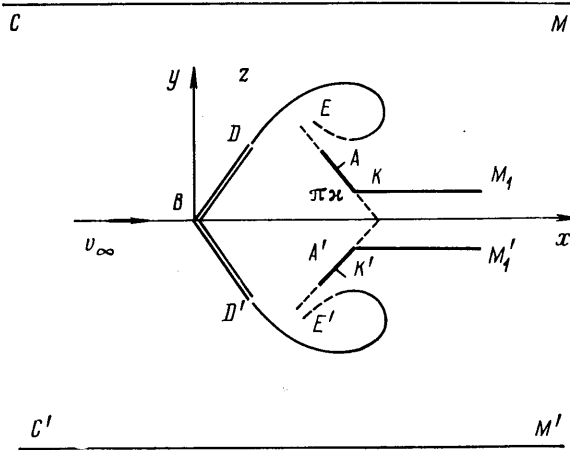
УДК 532.528

### ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РАЗВИТОГО КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КЛИНА

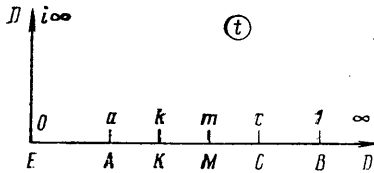
БЕКУЛОВ М. Т.

Для изучения симметричного стационарного обтекания с развитой кавитацией клина в канале потоком идеальной несжимаемой и невесомой жидкости предлагается схема, которая обобщает существующие схемы кавитационного обтекания тел и описывает течение, являющееся промежуточным между обтеканием препятствий по схемам Рябушинского и Эфроса. Подробные расчеты проведены для коэффициента сопротивления и размеров каверны в случае пластинки, обтекаемой неограниченным потоком. Результаты расчета приложены в виде числовой таблицы.

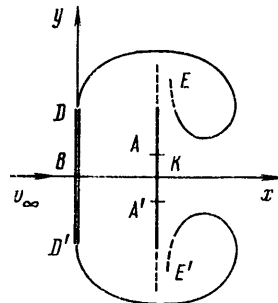
1. Рассмотрим клин  $D'BD$  с длиной щек, равной  $l$ , и углом раствора  $2\lambda$ , расположенный симметрично относительно оси  $x$  (фиг. 1). Ось  $x$  направлена по направлению скорости набегающего потока в бесконечности  $v_\infty$  и проходит через вершину  $B$  клина. Поток ограничен параллельными оси  $x$  стенками  $CM$  и  $C'M'$ , расстояние между которыми равно  $2L$ . С клина срываются струи. Смыканию струи препятствуют стенки  $EKM_1$  и  $E'K'M'_1$ . Скорость на свободной поверхности равна  $v_0$ . Расстояние от оси  $y$ , проходящей через вершину  $B$  клина, до точки  $K$  излома стенки  $EKM_1$  обозначим через  $h$ . Расстояние между стенками  $KM_1$  и  $K'M'_1$  равно  $2d$ . Рассматриваемое



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

течение определяется параметрами  $l$ ,  $\nu$ ,  $L$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $\kappa$  и числом кавитации  $Q=(v_0/v_\infty)^2-1$ .

Учитывая симметричность течения относительно оси  $x$  вместо всей области течения рассмотрим только одну из ее половин. Отобразим верхнюю половину области течения и соответствующие ей области изменения безразмерной комплексной скорости  $dw/v_0 dz$  и комплексного потенциала  $w$  на верхний правый квадрант параметрической плоскости  $t$  (фиг. 2). При этом потребуем соответствия трех граничных точек  $E$ ,  $B$ ,  $D$  в плоскости течения  $z$  трем граничным точкам  $t=0$ ,  $t=1$ ,  $t=\infty$  в плоскости  $t$  (на фигурах соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами). Так как на границе верхнего правого квадранта функция  $tdw/dt$  чисто действительна, т. е.

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} \right)^\gamma = 0 \quad (\operatorname{Im} t=0)$$

$$\left| \left( \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} \right)^\gamma \right| = 1, \quad \gamma = \frac{2}{\nu \kappa (\kappa + 1)} \quad (\operatorname{Re} t=0)$$

то эти функции могут быть аналитически продолжены с помощью принципа симметрии на всю плоскость  $t$ . Осуществляя зеркальные отображения относительно действительной и мнимой осей и пользуясь методом особых точек С. А. Чаплыгина,

окончательно найдем

$$\frac{dw}{v_0 dz} = \frac{t-a}{t+a} \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\nu} \left( \frac{t-k}{t+k} \right)^{\kappa}, \quad \frac{dw}{dt} = N \frac{t^2-a^2}{t(t^2-m^2)(t^2-c^2)} \quad (1.1)$$

Формулы (1.1) дают общее решение поставленной задачи. Выпишем условия для определения неизвестных параметров. Из (1.1) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{N}{v_0} \frac{(t+a)^2}{t(t^2-m^2)(t^2-c^2)} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\nu} \left( \frac{t+k}{t-k} \right)^{\kappa} \quad (1.2)$$

Пользуясь (1.2), вычислим геометрические элементы  $L$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $h$ . Очевидно

$$l = e^{-i\pi\nu} \int_1^{\infty} \frac{dz}{dt} dt = \frac{N}{v_0} I \quad (1.3)$$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{(t+a)^2}{t(t^2-m^2)(t^2-c^2)} \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{\nu} \left( \frac{t+k}{t-k} \right)^{\kappa} dt$$

$$h = \operatorname{Re} \int_1^k \frac{dz}{dt} dt = \frac{N}{v_0} I_1 \quad (1.4)$$

$$I_1 = \int_1^k \frac{(t+a)^2}{t(t^2-m^2)(t^2-c^2)} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\nu} \left( \frac{t+k}{t-k} \right)^{\kappa} dt$$

После вычисления интегралов по бесконечно малым полуокружностям вокруг точек  $t=c$  и  $t=m$  получим

$$L = \frac{\pi N (c+a)^2}{2v_0 c^2 (c^2-m^2)} \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\nu} \left( \frac{c+k}{c-k} \right)^{\kappa} \quad (1.5)$$

$$d = \frac{\pi N}{2v_0 (c^2-m^2)} \left[ \left( \frac{c+a}{c} \right)^2 \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{\nu} \left( \frac{c+k}{c-k} \right)^{\kappa} - \left( \frac{m+a}{a} \right)^2 \left( \frac{1+m}{1-m} \right)^{\nu} \left( \frac{m+k}{m-k} \right)^{\kappa} \right] \quad (1.6)$$

С помощью (1.4) для числа кавитации  $Q$  имеем

$$Q+1 = \left( \frac{c+a}{c-a} \right)^2 \left( \frac{1+c}{1-c} \right)^{2\nu} \left( \frac{c+k}{c-k} \right)^{2\kappa} \quad (1.7)$$

Задаваясь значениями величин  $l$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $d$ ,  $Q$ , из (1.3)–(1.7) можно найти неизвестные параметры  $N$ ,  $m$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $c$  в функции от  $\nu$  и  $\kappa$ .

2. Сопротивление клина  $X$  найдем путем прямого интегрирования давления, действующего на клин. С учетом интеграла Бернулли и соотношения (1.1), (1.2) получим

$$X = \frac{\rho v_0^2}{2} \int \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] dy = \frac{\rho v_0 N}{2} (I - I_2) \quad (2.1)$$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{(t-a)^2}{t(t^2-m^2)(t^2-c^2)} \left( \frac{t-1}{t+1} \right)^{\nu} \left( \frac{t-k}{t+k} \right)^{\kappa} dt$$

Коэффициент сопротивления клина, отнесенный к его миделевому сечению, равен

$$C_x = \frac{2X}{\rho l v_{\infty}^2 \sin \pi \nu} = \frac{v_0^2}{v_{\infty}^2 \sin \pi \nu} \left( 1 - \frac{I_2}{I} \right) = \frac{1+Q}{\sin \pi \nu} \left( 1 - \frac{I_2}{I} \right) \quad (2.2)$$

Расчет  $C_x$  по (2.2) удобно производить, задаваясь значениями  $\nu$ ,  $\kappa$ ,  $m$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $c$ . При этом по соответствующим формулам следует вычислять значения  $L/l$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $Q$ .

Подробные расчеты проделаны ниже для плоской пластинки, обтекаемой неограниченным потоком.

3. Укажем на некоторые известные схемы кавитационного обтекания профиля, получающиеся при конкретных частных значениях параметров из (1.1).

При  $\kappa=0$  и  $d=0$  формулы (1.1) переходят в формулы, описывающие симметричное кавитационное обтекание клина в канале (см. работу [1] на стр. 260 формулы (30.1) и (30.2)). Частный случай клина — нормальная к стенкам пластинка ( $\kappa=0$ ,  $\nu=1/2$ ,  $d=0$ ) — подробно изучен в [2].

Вычислим половину толщины струйки  $\delta$  в бесконечности. Для этого достаточно произвести интегрирование (1.2) вдоль четверти окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке  $E$  ( $t=0$ ) против часовой стрелки

$$\delta = i \frac{\pi N a^2}{2\nu_0 m^2 c^2} e^{-i\pi\kappa} \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что при  $a=0$  толщина струйки обращается в нуль, т.е. струйки исчезают. Частный случай последней задачи ( $\nu=\kappa$ ,  $d=0$ ,  $a=0$ ) — обтекание клина в канале по схеме с зеркалом, как отмечает Биркгоф [3], рассмотрен Кейвудом в 1946 г.

В случае неограниченной жидкости, когда стенки удалены в бесконечность, полагая  $L=\infty$ , из (1.5) получаем  $m=c$ . Общее решение задачи принимает вид

$$\frac{dw}{\nu_0 dz} = \frac{t-a}{t+a} \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^\nu \left( \frac{t-k}{t+k} \right)^\kappa, \quad \frac{dw}{dt} = N \frac{t^2-a^2}{t(t^2-c^2)^2} \quad (3.2)$$

Полагая  $\kappa=0$ , из (3.2) получаем обтекание клина по схеме Эфроса. Случай  $a=0$  совпадает с обобщенной схемой Рябушинского, из которой, в частности, следуют схемы: обтекания пластинки ( $a=0$ ,  $\nu=\kappa=1/2$ ) или клина ( $a=0$ ,  $\nu=\kappa$ ) с зеркалом; Жуковского — Рошко ( $a=0$ ,  $\kappa=0$ ); Кирхгофа ( $a=0$ ,  $\kappa=0$ ,  $c=0$ ) и др.

Если же  $a \neq 0$ , то получаем кавитационное обтекание профиля с разделяющейся возвратной струей.

4. В качестве примера подробно рассмотрим случай  $\nu=\kappa=1/2$ ,  $m=c$  (фиг. 3). Формулы (3.2) принимают вид

$$\frac{dw}{\nu_0 dz} = \frac{t-a}{t+a} \sqrt{\frac{1-t}{1+t} \frac{t-k}{t+k}}, \quad \frac{dw}{dt} = N \frac{t^2-a^2}{t(t^2-c^2)^2} \quad (4.1)$$

Условия (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) для определения неизвестных параметров  $N$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $c$  соответственно переписываются в виде

$$l = \frac{N}{\nu_0} I, \quad I = \int_1^\infty \frac{(t+a)^2}{t(t^2-c^2)^2} \sqrt{\frac{t+1}{t-1} \frac{t+k}{t-k}} dt \quad (4.2)$$

$$k = \frac{N}{\nu_0} I_1, \quad I_1 = \int_1^k \frac{(t+a)^2}{t(t^2-c^2)^2} \sqrt{\frac{1+t}{1-t} \frac{t+k}{t-k}} dt \quad (4.3)$$

$$a = \frac{c^2(1+k)(c^2-k)}{2(c^2-k^2)(1-c^2)-c(1+k)(c^2-k)} \quad (4.4)$$

$$Q+1 = \frac{1+c}{1-c} \frac{c+k}{c-k} \left( \frac{c+a}{c-a} \right)^2 \quad (4.5)$$

Формула (2.2) для коэффициента сопротивления принимает вид

$$C_x = (1+Q) \left( 1 - \frac{I_2}{I} \right), \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{(t-a)^2}{t(t^2-c^2)^2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1} \frac{t-k}{t+k}} dt \quad (4.6)$$

где  $I$  — определяется по формуле (4.2).

Размеры области кавитации определяются следующим образом: длина области кавитации  $H$  берется от пластинки до точки поверхности каверны с вертикальной касательной, а половина ширины области кавитации  $b$  берется между осью симметрии и точкой свободной поверхности с горизонтальной касательной. В точке поверх-

ности каверны с горизонтальной и вертикальной касательными имеем

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{v_0 dz} \Big|_{t=i\alpha} = 0, \quad \operatorname{Re} \frac{dw}{v_0 dz} \Big|_{t=i\beta} = 0$$

Из этих условий находим

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{k + a^2 + 2a(1+k) + \sqrt{(k+a^2+2ak)^2 + 4a(a+k)(1+a)}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2ak+a^2(1+k)}{1+k+2a}} \quad (4.7)$$

Величины  $H$  и  $b$  определяются формулами

$$H = \operatorname{Re} \int_1^{i\beta} \frac{dz}{dt} dt, \quad b = \operatorname{Im} \int_1^{i\alpha} \frac{dz}{dt} dt$$

По формулам (4.2), (4.3), (4.5), (4.6), (4.8) в предположении  $l=1$  проведены численные расчеты на ЭВМ величин  $Q$ ,  $C_x$ ,  $b$ ,  $H$  и  $h$  задавая параметрами  $k$  и  $c$ .

$c$	$Q$	$C_x$	$h$	$b$	$H$	$Q$	$C_x$	$h$	$b$	$H$
$k=0,01$										
0,15	0,852	1,625	11,67	2,412	11,92	0,833	1,608	11,94	2,434	11,95
0,20	1,340	2,063	5,879	1,910	6,268	1,301	2,029	6,027	1,925	6,237
0,25	2,019	2,682	3,125	1,615	3,696	1,954	2,623	3,294	1,625	3,669
0,30	3,009	3,594	1,624	1,424	2,323	2,904	3,498	1,794	1,431	2,305
0,35	4,545	5,025	0,687	1,292	1,513	4,371	4,864	0,863	1,297	1,502
0,40	7,144	7,474	0,040	1,198	1,001	6,829	7,179	0,228	1,202	0,994
$k=0,03$										
0,20	1,272	2,003	6,189	1,939	6,257	—	—	—	—	—
0,25	2,575	3,424	3,424	1,635	3,659	1,857	2,535	3,539	1,644	3,667
0,30	2,815	3,416	1,913	1,438	2,294	2,738	3,345	2,013	1,444	2,290
0,35	4,218	4,723	0,982	1,302	1,494	4,083	4,598	1,078	1,307	1,489
0,40	6,552	6,920	0,350	1,205	0,989	6,305	6,689	0,446	1,209	0,985
$k=0,05$										
0,25	1,819	2,501	3,645	1,654	3,696	1,786	2,470	3,746	1,665	3,750
0,30	2,669	3,283	2,103	1,651	2,294	2,608	3,227	2,185	1,458	2,305
0,35	3,963	4,487	1,160	1,312	1,487	3,854	4,386	1,234	1,317	1,489
0,40	6,083	6,482	0,527	1,212	0,983	5,882	6,294	0,598	1,216	0,982
$k=0,07$										
0,30	2,552	3,175	2,262	1,465	2,325	2,500	3,127	2,336	1,474	2,357
0,35	3,755	4,293	1,303	1,322	1,494	3,662	4,208	1,367	1,327	1,503
0,40	5,699	6,122	0,663	1,219	0,983	5,529	5,964	0,723	1,223	0,986
$k=0,09$										
0,35	3,575	1,427	1,333	1,333	1,516	3,492	4,050	1,485	1,339	1,534
0,40	5,372	5,816	0,779	1,227	0,990	5,224	5,677	0,832	1,231	0,997
$k=0,11$										
0,35	3,412	3,975	1,539	1,346	1,559	3,333	3,901	3,591	1,353	1,593
0,40	5,083	5,545	0,882	1,295	1,006	4,949	5,419	0,930	1,240	1,017
$k=0,13$										
0,40	4,819	5,297	0,975	1,245	1,031	4,693	5,178	1,019	1,251	1,049
0,45	7,474	7,818	0,503	1,163	0,669	7,243	7,599	0,544	1,166	0,676
$k=0,15$										
0,40	4,568	5,061	1,061	1,257	1,071					
0,45	7,022	7,389	0,584	1,170	0,684					
$k=0,17$										
0,45	6,600	6,989	0,659	1,178	0,706	6,808	7,186	0,622	1,174	0,694
$k=0,19$										
0,45	6,197	6,606	0,728	1,189	0,739	6,397	6,796	0,694	1,183	0,721

Результаты расчетов приведены в таблице. Из таблицы следует, что коэффициент сопротивления и размеры каверны зависят от числа кавитации. При возрастании числа кавитации растет коэффициент сопротивления, а размеры области кавитации уменьшаются. График зависимости  $C_x$  от  $Q$  представляет собой почти прямую линию. В заключение автор благодарит П. М. Иванова, Х. Х. Калажокова и Т. Сохова за помощь в проведении вычислительных работ на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 496 с.
2. Гуревич М. И. Симметричное кавитационное обтекание плоской пластинки, помещенной между параллельными стенками. — Изв. АН СССР. ОТИ, 1946, № 4, с. 487—498.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 184 с.

Нальчик

Поступила в редакцию  
20.IV.1981

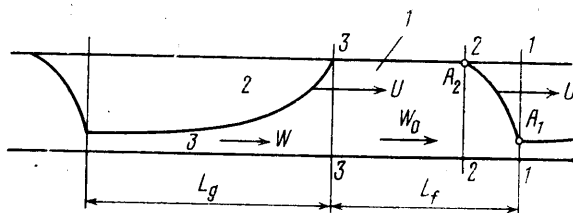
УДК 532.529

### О ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ПРОБКОВЫМ И РАССЛОЕННЫМ ТЕЧЕНИЯМИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ

МАРКОВИЧ Э. Э.

Рассмотрены условия, без которых не могут существовать пробковые течения, и построена граница области существования. Сравнения с собственными и опубликованными экспериментальными данными показали сходимость результатов.

Газожидкостные смеси, текущие в трубах, могут иметь разные структуры. В этой статье рассматриваются условия, при которых пробковая структура течения в прямой круглой горизонтальной трубе сменяется расслоенной, т. е. граница между



Фиг. 1

пробковым и расслоенным течениями. Пробковое течение (фиг. 1) представляет собой чередование жидких пробок 1, перекрывающих все сечение трубы, с длинными газовыми пузырями 2, занимающими верхнюю часть сечения. Под газовыми пузырями расположены слои 3, которые движутся медленнее пробки. При расслоенном течении газ движется над слоем жидкости.

Для определения границы между пробковым и расслоенным течениями есть много эмпирических зависимостей (см., например, [1—4]). В работах [2, 5—7], цель которых — рассчитать параметры границы, рассматривается переход от расслоенного безволнового к пробковому течению. Рассматривается развитие возмущений поверхности раздела фаз под действием газового потока. Считается, что граница пробкового и расслоенного течений лежит там, где волны, растущие по амплитуде под действием газового потока, достигают верхней образующей трубы. Для конечных возмущений принимаются эмпирические законы роста. Расход газа считается неизменным и равным расходу при безволновом расслоенном течении вплоть до образования пробки. Такой подход к анализу границы представляется неудовлетворительным. Первая же возникающая в трубе пробка перекроет трубу и расход газа в ней уменьшится. Кроме того, как только рассматриваемая волна перекроет сечение трубы (т. е. превратится в пробку), газовый поток над ней исчезнет вообще и принятый механизм роста перестанет действовать. Пробковое течение может существовать, только если пробки сохраняются без газового потока над ними.

В этой статье применен другой подход. Рассматривается не процесс перехода от расслоенного течения к пробковому, а установившееся пробковое течение, и разыскиваются необходимые условия его существования.