**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1983**

УДК 532.522

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ СТРУЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

ЯРИН А. Л.

Квазиодномерные уравнения пространственного движения тонких струй капельной жидкости были выведены в работах [1, 2] из балансных интегральных уравнений массы, количества движения и момента количества движения, записанных для выделенного отрезка струи. Подобные упрощенные уравнения позволяют, в частности, сравнительно легко исследовать движение изгибающихся струй, а также изгибные формы потери устойчивости струй при их движении в воздухе. Представляет интерес получение квазиодномерных уравнений струйного движения путем непосредственного интегрирования по сечению тонкой струи дифференциальных трехмерных уравнений гидромеханики. В данной заметке этот подход иллюстрируется на примере плоского изгиба струи.

Будем полагать, что сечение струи сохраняет свою круговую форму при изгибе. Это предположение справедливо для достаточно малых амплитуд A изгибных возмущений оси струи, порядка $(2\div4)a_0$, где a_0 – начальный радиус. Действительно, геометрические искажения сечения при таких амплитудах несущественны, так как A много меньше длины волны изгибного возмущения в рассматриваемом длинноволновом приближении. С другой стороны, энергетические оценки показывают, что искажение сечения изгибающейся струи достаточно вязкой жидкости, движущейся в воздухе, перепадом давления также несущественно вплоть до $A\sim(2\div4)a_0$. При бо́льших амплитудах скорость искажения сечения резко возрастает и происходит разрыв струи. Таким образом, вплоть до разрыва струи ее сечение при изгибной потере устойчивости сохраняет первоначальную круговую форму.

Радиус-вектор боковой поверхности струи $\mathbf{r}_a$ представляется выражением

$$\mathbf{r}_a=\mathbf{R}(s,\ t)+a(s,\ t)\,(\mathbf{n}\cos\varphi+\mathbf{b}\sin\varphi)$$

где a – радиус сечения струи, φ – полярный угол в сечении, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор оси струи, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ – нормаль и бинормаль к оси, s – произвольный параметр оси, t – время.

Соответственно для скорости жидкой частицы на боковой поверхности $\mathbf{v}_a$ имеем с учетом кинематического соотношения (1.4) работы [2]

$$\mathbf{v}_a=\frac{d\mathbf{r}_a}{dt}=\frac{\partial\mathbf{r}_a}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{r}_a}{\partial s}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}_a}{\partial t}=\mathbf{U}+\frac{\partial a}{\partial t}(\mathbf{n}\cos\varphi+\mathbf{b}\sin\varphi)+a\left(\cos\varphi\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}+\sin\varphi\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right)\tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}_a}{\partial s}=\lambda\boldsymbol{\tau}+\frac{\partial a}{\partial s}(\mathbf{n}\cos\varphi+\mathbf{b}\sin\varphi)+a\left(\cos\varphi\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s}+\sin\varphi\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial s}\right)$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{V_\tau-U_\tau}{\lambda},\qquad \mathbf{V}=\frac{d\mathbf{R}}{dt},\qquad \mathbf{U}=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t},\qquad \lambda=\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\right|$$

Здесь $\mathbf{V}$ – скорость жидкой частицы, находящейся на оси струи, $\mathbf{U}$ – скорость движения фиксированной точки оси струи (переносная скорость), $\boldsymbol{\tau}$ – касательная к оси струи. Проекции векторов на направления ортов $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\tau}$ обозначаются соответствующими индексами.

Легко видеть, что

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}=-\boldsymbol{\tau}\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kU_\tau\right),\qquad \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t}=\mathbf{n}\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kU_\tau\right),\qquad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=0,\tag{2}$$

а формулы Френе – Серре дают

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s}=-\lambda k\boldsymbol{\tau},\qquad \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial s}=\lambda k\mathbf{n},\qquad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial s}=0\tag{3}$$

Кривизна оси струи обозначена k.

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$\mathbf{v}_a=\mathbf{V}+\frac{\partial a}{\partial t}(\mathbf{n}\cos\varphi+\mathbf{b}\sin\varphi)-a\cos\varphi\boldsymbol{\tau}\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kU_\tau\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial a}{\partial s}(\mathbf{n}\cos\varphi+\mathbf{b}\sin\varphi)-\lambda ka\cos\varphi\boldsymbol{\tau}\right]\lambda^{-1}(V_\tau-U_\tau) \qquad (4)$$

Вследствие тонкости струи и отсутствия на ее боковой поверхности значительных касательных напряжений (что имеет место при движении в воздухе) профиль скорости в сечении струи в линейном приближении представляется в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{A}(s,\ t)y+\mathbf{B}(s,\ t)z \qquad (5)$$

Координаты y и z отсчитываются от центра сечения по нормали и бинормали к оси струи. Записывая (5) на боковой поверхности струи и сравнивая с (4), находим **A** и **B** и получаем следующее выражение для профиля скорости в сечении струи

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{n}y\left[\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{\lambda a}\frac{\partial a}{\partial s}(V_\tau-U_\tau)\right]+\mathbf{b}z\left[\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{\lambda a}\frac{\partial a}{\partial s}(V_\tau-U_\tau)\right]-$$
$$-\boldsymbol{\tau}y\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kV_\tau\right) \qquad (6)$$

В криволинейной системе координат y, z, s, используемой в тонкой струе, в рассматриваемом случае плоского изгиба выражение для оператора градиента имеет вид

$$\nabla=\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{b}\frac{\partial}{\partial z}+\lambda^{-1}(1-ky)^{-1}\boldsymbol{\tau}\frac{\partial}{\partial s} \qquad (7)$$

Подставляя (6) в дифференциальное уравнение неразрывности $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ и используя (7), приходим после интегрирования по сечению струи к уравнению

$$2\left[\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{\lambda a}\frac{\partial a}{\partial s}(V_\tau-U_\tau)\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial V_\tau}{\partial s}-kV_n=0$$

Последнее уравнение с использованием соотношений (1), (3) сводится к полученному в работах [1, 2] уравнению неразрывности

$$\frac{\partial\lambda f}{\partial t}+\frac{\partial Wf}{\partial s}=0,\qquad f=\pi a^2,\qquad W=V_\tau-U_\tau$$

Ограничиваясь случаем вязкой ньютоновской жидкости, обратимся теперь к уравнению Навье – Стокса $\rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^*$ ($\boldsymbol{\sigma}^*$ – тензор напряжений). Конвективное ускорение представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(v_n-V_n)\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}+v_b\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}+\frac{V_\tau-U_\tau}{\lambda}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s}$$

Используя (2), (3) и (6), после интегрирования по сечению струи D получаем

$$\int\limits_D\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dS=\rho f\left\{\mathbf{n}\left[\frac{\partial V_n}{\partial t}+V_\tau\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kU_\tau\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{V_\tau-U_\tau}{\lambda}\left(\frac{\partial V_n}{\partial s}+\lambda kV_\tau\right)\right]+\boldsymbol{\tau}\left[\frac{\partial V_\tau}{\partial t}-V_n\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_n}{\partial s}+kU_\tau\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{V_\tau-U_\tau}{\lambda}\left(\frac{\partial V_\tau}{\partial s}-\lambda kV_n\right)\right]\right\} \qquad (8)$$

С помощью реологического соотношения ньютоновской жидкости $\boldsymbol{\sigma}^*=-p\mathbf{g}^*+2\mu\mathbf{D}^*$ ($\mathbf{g}^*$ – метрический тензор, $\mathbf{D}^*$ – тензор скоростей деформаций, p – давление, μ – коэффициент вязкости), выражений (6), (7) и оценок для напряжений в тонкой струе [1, 2] находим главные члены выражения для $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^*$, после чего интегрированием по сечению струи получаем выражение ($\mathbf{Q}$ – перерезывающая сила)

$$\int\limits_D\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^*dS=\lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\left[\boldsymbol{\tau}\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_\tau}{\partial s}-kV_n\right)3\mu f+\mathbf{Q}\right] \qquad (9)$$

Приравнивая (8) и (9), после преобразований приходим к полученному в работах [1, 2] квазиодномерному уравнению количества движения

$$\frac{\partial \lambda f \mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial f \mathbf{V} W}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left[3\mu f\left(\lambda^{-1}\frac{\partial V_\tau}{\partial s}-kV_n\right)\boldsymbol{\tau}+\mathbf{Q}\right]$$

В рамках подобного подхода может быть учтено также влияние массовых сил и усилий на боковой поверхности струи.

Квазиодномерное уравнение момента количества движения, выведенное в [1, 2], точно так же получается интегрированием по сечению струи дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\times\mathbf{v}(1-ky)]=\mathbf{r}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^*)$$

где $\mathbf{r}=\mathbf{R}+y\mathbf{n}+z\mathbf{b}$ – радиус-вектор точки в струе.

Таким образом, квазиодномерные уравнения струйного движения капельной жидкости получены интегрированием по сечению тонкой струи дифференциальных трехмерных уравнений гидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Динамика струй капельной жидкости. М., 1979, 64 с. (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 127).
2. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Уравнения динамики струи капельной жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 11–18.

Москва

Поступила в редакцию 12.V.1981

УДК 532.525.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИНЫ И ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЫ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УЧАСТКА В ПРЯМОЙ И РАСТЕКАЮЩЕЙСЯ ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

ЛАКОТКИН Ю. Б.

Приведены результаты экспериментального исследования волновой структуры прямой и растекающейся газовых струй. Получены зависимости для расчета длины газодинамического участка в прямой и растекающейся газовых струях.

Результаты исследования структуры прямой и растекающейся струй холодного газа изложены в работах [1–3]. Однако в них недостаточно данных о структуре растекающейся газовой струи и ее протяженности при различных углах встречи прямой струи с бесконечной и конечной преградами; не рассмотрена волновая структура при растекании струи по вогнутой и выпуклой преградам; требуется уточнение количества отдельных скачковых конфигураций и длины каждой из них в прямой газовой струе, а также зависимости для расчета длины газодинамического участка.

Исследования проводились на горячих (показатель адиабаты k=1,25) и холодных (k=1,4) струях путем измерения давления на преградах и теневого фотографирования. Использовалось 16 вариантов сопел с диаметрами d_k=3, 5, 10 и 15 мм. Сопло каждого диаметра было выполнено в четырех модификациях, отличающихся степенью расширения: M_a=2, 3, 4, 5. Нерасчетность n менялась в пределах от 0,18 до 6,4 с шагом h=0,3.

Главным критерием при определении длины газодинамического участка в прямой газовой струе является отношение давления в ресивере к атмосферному давлению ($p_k/p_a=P_k$). Поэтому длина газодинамического участка с точностью до определения длины первой «бочки» может быть описана однопараметрической зависимостью

$$L=\frac{L'}{d_k}=8.13(P_k)^{0,53}$$

При $M_a>1$, $n>1$ и $P_k\geqslant 35$ за первой волновой конфигурацией в виде бочки следует пять волновых конфигураций в виде конусов; длина каждой конусообразной волновой конфигурации убывает вниз по потоку и аппроксимируется зависимостью

$$l_N=\frac{l'_N}{d_k}=(\gamma-BN)\,(P_k)^{\beta N^{-\xi}}$$

γ=0,9501; B=0,0532; β=0,5731; ξ=0,021.