

УДК 533.9.082.76

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗОНДА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПЛАЗМЫ

**БЕНИЛОВ М. С., БОЧКАРЕВ Г. Г., БУЗНИКОВ А. Е.,
ГЕРМАН В. О., КОВБАСЮК В. И.**

Постановка и некоторые результаты решения задачи о распределении концентраций заряженных частиц и электрического поля в слабоионизованной плазме, обтекающей проводящее тело (электрический зонд) при условии, что число Рейнольдса набегающего потока велико, приведены в работах [1, 2]. В настоящей работе эта задача решается методом внешних и внутренних асимптотических разложений по малому параметру [3]. Анализируется вид вольт-амперных характеристик зонда в зависимости от значений определяющих параметров задачи. Приводятся также данные экспериментальной проверки полученных результатов для случая холодного зонда в потоке воздушной плазмы с присадкой калия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарный поток многокомпонентной умеренно ионизованной термически равновесной плазмы, содержащей нейтральные компоненты, положительные однозарядные ионы одного сорта и электроны, обтекающий проводящее тело (электрический зонд). Будем считать, что длина свободного пробега заряженных частиц много меньше всех характерных макроскопических размеров задачи, включая толщину дебаевского пограничного слоя. Молярные концентрации нейтральных компонент плазмы будем полагать постоянными и заданными. Полагая заданным также распределение плотности, среднemasсовой скорости и температуры плазмы, для нахождения полей молярных концентраций ионов и электронов x_i , x_e и электрического потенциала φ° имеем краевую задачу [4]

$$n \left(\nabla^\circ x_i + \frac{ex_i}{kT} \nabla^\circ \varphi^\circ \right) = - \frac{1}{D_i} J_i + \alpha_{ie} (x_i J_e - x_e J_i) \quad (1.1)$$

$$n \left(\nabla^\circ x_e - \frac{ex_e}{kT} \nabla^\circ \varphi^\circ \right) = - \frac{1}{D_e} J_e - \alpha_{ie} (x_i J_e - x_e J_i) \quad (1.2)$$

$$nv^\circ \nabla^\circ x_j + \nabla^\circ J_j = W^\circ \quad (j=i, e) \quad (1.3)$$

$$(\nabla^\circ)^2 \varphi^\circ = 4\pi en (x_e - x_i) \quad (1.4)$$

$$D_j^{-1} = \sum_{k=1}^M x_k a_{jk} \quad (j=i, e)$$

На поверхности зонда и вдали от него соответственно

$$x_i = x_e = 0, \quad \varphi^\circ = \varphi_w^\circ \quad (1.5)$$

$$x_i = x_e = x_\infty, \quad \varphi^\circ = 0 \quad (1.6)$$

Здесь n , T , v° – концентрация, температура и среднemasсовая скорость плазмы, ∇° – оператор градиента, J_i , J_e – числовые плотности диффузионных потоков ионов и электронов, e – заряд электрона, k – постоянная Больцмана, α_{jk} – коэффициенты сопротивления, W° – скорость изменения концентраций ионов и электронов за счет ионизации и рекомбинации, x_k ($k=1, \dots, M$), M – молярные концентрации нейтральных компонент плазмы и число этих компонент, φ_w° , x_∞ – потенциал поверхности зонда и молярная концентрация заряженных частиц в невозмущенной плазме (заданные величины).

Уравнения переноса (1.1), (1.2) получены из общих соотношений Стефана – Максвелла [5] в пренебрежении термодиффузией, бародиффузией и диффузионными скоростями нейтральных компонент. В отличие от уравнений переноса, использован-

ных в [4], в этих уравнениях учитываются столкновения ионов и электронов между собой (последние члены правых частей).

Будем предполагать, что коэффициенты сопротивления заряженная частица – нейтрал a_{jk} ($j=i, e; k=1, \dots, M$) зависят только от давления и температуры плазмы, а коэффициент сопротивления ион – электрон a_{ie} зависит также от концентраций заряженных частиц. Отметим, что при вычислении коэффициентов сопротивления в рамках первого приближения в разложении по полиномам Сонина в теории Чепмена – Энскога это предположение выполняется строго [6].

Исключая из уравнений (1.1) – (1.3) диффузионные потоки и переходя к безразмерным переменным, запишем задачу (1.1) – (1.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \theta^{-1} \mathbf{v} \nabla z_i - \nabla \left\{ \frac{(1+bz_i)a}{1+b(z_i+\beta z_e)} \left[\nabla z_i + \frac{bz_i}{1+bz_i} \nabla z_e + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta^{-1} z_i \nabla \varphi \left(1 - \frac{bz_e}{1+bz_i} \right) \right] \right\} = \chi^{-1} W \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \theta^{-1} \mathbf{v} \nabla z_e - \nabla \left\{ \frac{(\beta^{-1}+bz_e)a}{1+b(z_i+\beta z_e)} \left[\nabla z_e + \frac{\beta bz_e}{1+\beta bz_e} \nabla z_i - \right. \right. \\ \left. \left. - \theta^{-1} z_e \nabla \varphi \left(1 - \frac{\beta bz_i}{1+\beta bz_e} \right) \right] \right\} = \chi^{-1} W \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon \theta \nabla^2 \varphi = z_e - z_i \quad (1.9)$$

На поверхности зонда и вдали от него соответственно

$$z_i = z_e = 0, \quad \varphi = \varphi_w \quad (1.10)$$

$$z_i = z_e = 1, \quad \varphi = 0 \quad (1.11)$$

$$\nabla = L \nabla^\circ, \quad z_j = \frac{x_j}{x_\infty} \quad (j=i, e), \quad \varphi = \frac{e\varphi^\circ}{kT_\infty}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^\circ}{v_\infty^\circ}$$

$$a = \frac{nD_i}{n_\infty D_{i\infty}}, \quad b = x_\infty D_i a_{ie}, \quad W = \frac{W^\circ}{W_0^\circ}, \quad \beta = \frac{D_i}{D_e}$$

$$\operatorname{Re} = \frac{v_\infty^\circ L}{D_{i\infty}}, \quad \chi = \frac{n_\infty x_\infty D_{i\infty}}{W_0^\circ L^2}, \quad \varepsilon = \frac{kT_\infty}{4\pi n_\infty x_\infty e^2 L^2}$$

Здесь W_0° – характерное значение скорости возникновения заряженных частиц в единице объема за счет ионизации или скорости убыли за счет рекомбинации, L – характерный размер зонда, индекс ∞ присписан значениям соответствующих величин вдали от зонда. При записи системы уравнений предполагалось, что число Маха набегающего потока достаточно мало и поле давления плазмы однородно, а коэффициенты сопротивления ион-нейтрал и электрон-нейтрал в рассматриваемом диапазоне изменения температуры плазмы изменяются одинаковым образом и отношение коэффициентов диффузии β в плазме постоянно [7].

Задача (1.7) – (1.11) содержит в качестве коэффициентов заданные функции $a(\theta)$, $\theta(\mathbf{r}; \operatorname{Re})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}; \operatorname{Re})$ и заданные параметры β , Re , χ , ε , φ_w (\mathbf{r} – радиус-вектор текущей точки; предполагается, что число Шмидта, вычисленное по коэффициенту диффузии ионов, порядка единицы и введенный выше параметр Re по порядку величины равен обычному газодинамическому числу Рейнольдса). В общем случае постановку задачи необходимо дополнить также выражениями для функций b , W :

$$b = b(\theta, z_i, z_e), \quad W = W(\theta, z_i, z_e).$$

2. Асимптотическое решение. Будем предполагать параметры Re , χ^{-1} , ε^{-1} , φ_w большими и установим между ними следующие отношения поряд-

ка: $\chi^{-1}/\text{Re} \rightarrow k_1$; $\varepsilon^{-1}/\text{Re}^s \rightarrow k_2$, $s > 1$; $\varphi_w/\text{Re}^{1/2} \rightarrow k_3$ (k_1, k_2, k_3, s — заданные постоянные). Параметр β будем считать фиксированным.

Внешнее асимптотическое разложение решения задачи (1.7) — (1.11), справедливое в области невязкого течения, связано с пределом $\text{Re} \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varphi_w \rightarrow \infty$, \mathbf{r} фиксировано. Будем искать это разложение в виде

$$z_i = g_1(\mathbf{r}) + \alpha g_2(\mathbf{r}) + \dots, \quad z_e = f_1(\mathbf{r}) + \alpha f_2(\mathbf{r}) + \dots \quad (2.1)$$

$$\varphi = \text{Re}^{1/2} \varphi_1(\mathbf{r}) + \ln \omega^{-1} \varphi_2(\mathbf{r}) + \varphi_3(\mathbf{r}) + \dots, \quad \omega = \varepsilon \text{Re}$$

Здесь α — неизвестный малый параметр, зависящий от Re , χ , ε , φ_w . Отметим, что в общем случае в разложении потенциала помимо члена порядка $\ln \omega^{-1}$ между членами порядка $\text{Re}^{1/2}$ и порядка единицы возможно наличие и других членов. Однако можно показать, что и при учете этих членов все нижеследующее остается справедливым.

При рассматриваемом предельном переходе справедливы разложения

$$\theta(\mathbf{r}; \text{Re}) = 1 + o(\text{Re}^{-1/2}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, \text{Re}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \dots, \quad a(\theta) = 1 + o(\text{Re}^{-1/2}) \quad (2.2)$$

Подставляя разложения (2.1), (2.2) в уравнения (1.7) — (1.9) и первое граничное условие (1.11), получаем задачу для функций g_i, f_i

$$\mathbf{v}_1 \nabla g_i = k_i W_i, \quad \mathbf{v}_1 \nabla f_i = k_i W_i, \quad g_i = f_i$$

$$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad g_i \rightarrow 1, \quad f_i \rightarrow 1$$

$$W_i = W(1, g_i, f_i)$$

В силу очевидного равенства $W(1, 1, 1) = 0$ находим

$$g_i = f_i = 1$$

Для вывода определяющего уравнения для функции φ_1 вычтем (1.7) из (1.8), преобразуем разность конвективных членов с помощью (1.9) и подставим в полученное уравнение разложения (2.1), (2.2); граничным условием вдали от зонда служит второе условие (1.11)

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Нетрудно показать, что $\alpha = o(\text{Re}^{-1/2})$. Тогда для функций φ_2, φ_3 также получаются уравнения Лапласа с условиями затухания на бесконечности (2.3).

Перейдем к рассмотрению первого внутреннего разложения, справедливого в квазинейтральной части газодинамического пограничного слоя. Будем для простоты изложения считать задачу осесимметричной. Искомое разложение связано с пределом

$$\text{Re} \rightarrow \infty, \quad \chi \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi_w \rightarrow \infty, \quad x, \quad y_i = y \text{Re}^{1/2} > 0$$

фиксированы (безразмерные криволинейные координаты x, y отсчитываются соответственно вдоль образующей поверхности зонда и по нормали к ней) и имеет вид

$$z_i = g_i(x, y_i) + \dots, \quad z_e = f_i(x, y_i) + \dots$$

$$\varphi = \text{Re}^{1/2} \varphi_{1w}(x) + \ln \omega^{-1} \varphi_{2w}(x) + \varphi_i(x, y_i) + \dots$$

где индекс w приписан значениям соответствующих функций на поверхности зонда.

При рассматриваемом предельном переходе справедливы разложения

$$\theta = \theta_i(x, y_i) + \dots, \quad v_x = v_{xi}(x, y_i) + \dots, \quad v_y = \text{Re}^{-1/2} v_{yi}(x, y_i) + \dots$$

Для функций g_i, f_i, φ_i получаем систему уравнений

$$\frac{1}{\theta_i} \left(v_{x_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} + v_{y_i} \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{(1+b_i g_i) a_i}{1+b_i(g_i+\beta f_i)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_i} + \frac{b_i g_i}{1+b_i g_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \frac{g_i}{\theta_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \left(1 - \frac{b_i f_i}{1+b_i g_i} \right) \right] \right\} = k_i W_i \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\theta_i} \left(v_{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_{y_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{(\beta^{-1}+b_i f_i) a_i}{1+b_i(g_i+\beta f_i)} \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta b_i f_i}{1+\beta b_i f_i} \frac{\partial g_i}{\partial y_i} - \frac{f_i}{\theta_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \left(1 - \frac{\beta b_i g_i}{1+\beta b_i f_i} \right) \right] \right\} = k_i W_i \quad (2.5)$$

$$g_i = f_i$$

$$a_i = a(\theta_i), \quad b_i = b(\theta_i, g_i, f_i), \quad W_i = W(\theta_i, g_i, f_i) \quad (2.6)$$

Граничными условиями при $y_i \rightarrow \infty$ будут условия сращивания с внешним разложением (2.1), граничными условиями на стенке будут первые условия (1.10)

$$y_i = 0, \quad g_i = f_i = 0; \quad y_i \rightarrow \infty, \quad g_i \rightarrow 1, \quad f_i \rightarrow 1 \quad (2.7)$$

$$y_i \rightarrow \infty, \quad \varphi_i \sim (\partial \varphi_i / \partial y)_{wy_i} + \varphi_{3w}(x) + \dots \quad (2.8)$$

Комбинируя уравнения (2.4), (2.5), получаем для функции g_i уравнение амбиполярной диффузии

$$\frac{1}{\theta_i} \left(v_{x_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} + v_{y_i} \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{1+\beta} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right) = k_i W_i \quad (2.9)$$

Для функции φ_i находим выражение

$$\varphi_i = \int_0^{y_i} \left\{ \left[\frac{g_i^{-1} + (1+\beta) b_i}{1 + (1+\beta) b_\infty} \frac{\theta_i}{a_i} - 1 \right] \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_w + \right. \\ \left. + \theta_i \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\partial \ln g_i}{\partial y_i} \right\} dy_i + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_w y_i + \varphi_{3w}(x)$$

Поскольку это выражение имеет особенность на стенке, необходимо рассматривать второе внутреннее разложение, справедливое в пристеночном дебаевском пограничном слое. Это разложение связано с пределом $\text{Re} \rightarrow \infty, \chi \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \varphi_w \rightarrow \infty, x, y_5 = y / (\varepsilon^{1/2} \text{Re}^{-1/2}) \geq 0$ фиксированы и имеет вид

$$z_i = \omega^{1/2} g_5(x, y_5) + \dots, \quad z_e = \omega^{1/2} f_5(x, y_5) + \dots \quad (2.10)$$

$$\varphi = \text{Re}^{1/2} \varphi_{1w}(x) + \ln \omega^{-1} \left[\varphi_{2w}(x) - \frac{u_1(x)}{3} \right] + \varphi_5(x, y_5) + \dots$$

$$u_1(x) = \theta_w \left[\frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{u_2^{-1}(x) a_w^{-1}}{1 + (1+\beta) b_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_w \right], \quad u_2(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)_w \quad (2.11)$$

При рассматриваемом предельном переходе справедливы разложения

$$\theta = \theta_w + \dots, \quad v_x = \omega^{1/2} \left(\frac{\partial v_{x_i}}{\partial y_i} \right)_w (x) y_5 + \dots$$

$$v_y = \varepsilon^{1/2} \text{Re}^{1/2} \left(\frac{\partial^2 v_{y_i}}{\partial y_i^2} \right)_w (x) \frac{y_5^2}{2} + \dots$$

После замены переменных получаем следующую однопараметрическую краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial y_6} \left(\frac{\partial g_6}{\partial y_6} + g_6 \frac{\partial \Psi}{\partial y_6} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_6} \left(\frac{\partial f_6}{\partial y_6} - f_6 \frac{\partial \Psi}{\partial y_6} \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_6^2} = f_6 - g_6$$

$$y_6 = 0, \quad g_6 = f_6 = 0$$

$$y_6 \rightarrow \infty, \quad g_6 \sim y_6 + \dots, \quad f_6 \sim y_6 + \dots, \quad \Psi \sim \theta_w^{-1} u_1(x) \ln y_6 + o(1)$$

$$y_6 = [\theta_w^{-2} u_2(x)]^{1/3} y_5, \quad g_6 = [\theta_w u_2(x)]^{-2/3} g_5, \quad f_6 = [\theta_w u_2(x)]^{-2/3} f_5 \quad (2.13)$$

$$\Psi = \theta_w^{-1} \{ \varphi_5 - u_1(x) \ln [\theta_w u_2(x)]^{2/3} - u_3(x) - \varphi_{3w}(x) \}$$

$$u_3(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{g_4^{-1} + (1+\beta) b_4}{1 + (1+\beta) b_\infty} \frac{\theta_4}{a_4} - 1 - \frac{\theta_w u_2^{-1}(x) a_w^{-1}}{1 + (1+\beta) b_\infty} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{y_4(1+u_2(x)y_4)} \right] \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_w + \left[\theta_4 \frac{\partial \ln g_4}{\partial y_4} - \frac{\theta_w}{y_4(1+u_2(x)y_4)} \right] \frac{1-\beta}{1+\beta} \right\} dy_4 \quad (2.14)$$

Полученная задача тождественна задаче о дебаевском слое в слабоионизованной химически замороженной покоящейся плазме, численное решение которой приведено в [8].

С точностью $o(1)$ для величины φ_w находим следующее выражение (функция $\Psi_w(\lambda)$ вычислена в [8]):

$$\varphi_w = \text{Re}^{1/2} \varphi_{1w}(x) + \ln \omega^{-1} \varphi_{2w}(x) + \varphi_{3w}(x) - \ln \omega^{-1} \frac{u_1(x)}{3} + \\ + \frac{2u_1(x)}{3} \ln [\theta_w u_2(x)] + u_3(x) + \theta_w \Psi_w[\theta_w^{-1} u_1(x)]$$

Первые три слагаемых правой части этого выражения можно интерпретировать как вклад области невязкого течения в полную разность потенциалов зонд-плазма, следующие три — как вклад квазинейтральной части газодинамического пограничного слоя, последний член — как вклад дебаевского пограничного слоя.

Теперь можно сформулировать следующий алгоритм построения полного решения исходной задачи (1.7)–(1.11). Концентрации заряженных частиц в области невязкого течения, как показано выше, в первом приближении постоянны

$$z_i^i = 1 + o(1), \quad z_e^i = 1 + o(1)$$

В квазинейтральной части газодинамического пограничного слоя концентрации заряженных частиц определяются из решения задачи (2.9), (2.7)

$$z_i^{bl} = g_i + o(1), \quad z_e^{bl} = g_i + o(1)$$

Далее вычисляется вспомогательная функция q_1 , удовлетворяющая уравнению Лапласа, условию затухания вдали от зонда и равная φ_w на поверхности зонда. Затем вычисляются функции $u_1(x)$, $u_3(x)$, при этом вместо функции φ_1 в правые части выражений (2.11), (2.14) следует подставлять функцию $\text{Re}^{-1/2} q_1$. Распределение потенциала в области невязкого течения определяется из решения выписанной ниже задачи Дирихле (2.16)–(2.18)

$$\varphi^i = q_2 + o(1) \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 q_2 = 0 \quad (2.16)$$

На поверхности зонда и вдали от него соответственно

$$q_2 = \varphi_w + \ln \omega^{-1} \frac{u_1(x)}{3} - \frac{2u_1(x)}{3} \ln[\theta_w u_2(x)] - u_3(x) - \theta_w \Psi_w[\theta_w^{-1} u_1(x)] \quad (2.17)$$

$$q_2 = 0 \quad (2.18)$$

В квазинейтральной части газодинамического пограничного слоя распределение потенциала вычисляется по формуле

$$\varphi^{bi} = q_{2w} + \int_{\infty}^{y_4} \left\{ \left[\frac{g_4^{-1} + (1+\beta)b_4}{1 + (1+\beta)b_{\infty}} \frac{\theta_4}{a_4} - 1 \right] \text{Re}^{-1/2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} \right)_w + \theta_4 \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\partial \ln g_4}{\partial y_4} \right\} dy_4 + \text{Re}^{-1/2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} \right)_w y_4 + o(1)$$

Наконец, в дебаевском пограничном слое распределения концентраций заряженных частиц и потенциала определяются из решения задачи (2.12)

$$z_i^D = \omega^{1/3} [\theta_w u_2(x)]^{2/3} g_6 + o(\omega^{1/3}), \quad z_e^D = \omega^{1/3} [\theta_w u_2(x)]^{2/3} f_6 + o(\omega^{1/3}) \\ \varphi^D = \varphi_w + \theta_w (\Psi - \Psi_w) + o(1)$$

С физической точки зрения указанный выше способ вычисления распределения потенциала имеет следующий смысл. Основной вклад в полную разность потенциалов зонд-плазма вносит область невязкого течения. Поэтому в первом приближении распределение потенциала в этой области и распределение плотности тока на поверхности зонда определяются без учета падения напряжения в пограничном слое. Затем по определенному таким образом распределению плотности тока вычисляются указанные падения, после чего уточняется распределение потенциала в области невязкого течения.

Важно подчеркнуть, что найденный выше алгоритм позволяет строить решение непосредственно для заданного потенциала поверхности зонда в отличие от аналогичного алгоритма, предложенного в [1], в рамках которого решение строится для заданного распределения плотности тока на поверхности зонда, а потенциал поверхности получается из решения, причем не является в общем случае постоянным вдоль поверхности.

Изложенный анализ справедлив при условии, что на всей поверхности зонда дебаевский слой является однородным и может быть описан в рамках единого асимптотического разложения. Это условие выполняется, если на всей поверхности зонда функция $\theta_w^{-1} u_1(x)$, являющаяся параметром задачи (2.12), не превосходит по модулю единицу [8]. Последнее условие выполняется при

$$-\beta \varphi_c < \varphi_w < \varphi_c \quad (2.19)$$

$$\varphi_c = \frac{1 + (1+\beta)b_{\infty}}{1+\beta} 2a_w \text{Re}^{1/2} \min_x \left[-\frac{u_2(x)}{u_4(x)} \right], \quad u_4(x) = \left(\frac{\partial q_3}{\partial y} \right)_w$$

Здесь q_3 — гармоническая функция, равная единице на поверхности зонда и затухающая на бесконечности; предполагается, что на всей поверхности зонда $(\partial q_3 / \partial y)_w < 0$.

3. Вольт-амперная характеристика. Плотность тока j° и интегральный электрический ток I° с поверхности зонда в плазму можно следующим образом выразить через распределение потенциала в области невязкого течения:

$$j = - \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \right)_w + O(1 + \varepsilon \text{Re}^{3/2}), \quad I = - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial y} \right)_w dS + o(1) \quad (3.1)$$

$$j^\circ = \frac{kT_{\infty}}{eL} \sigma_{\infty} j, \quad I^\circ = \frac{kT_{\infty} L \sigma_{\infty}}{e} I, \quad \sigma_{\infty} = \frac{n_{\infty} x_{\infty} e^2 D_{e\infty} (1+\beta)}{kT_{\infty} [1 + (1+\beta)b_{\infty}]}$$

где dS — безразмерный элемент площади поверхности зонда, σ_{∞} — определенная обычным образом проводимость невозмущенной плазмы (выписан-

ная формула для σ_∞ может быть получена из уравнений (1.1), (1.2)), интеграл берется по полной поверхности зонда Σ .

Подставляя (2.15) во вторую формулу (3.1), получаем для вольт-амперной характеристики следующее выражение:

$$I = - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} \right)_w dS + o(1) \quad (3.2)$$

Удерживая в разложении (2.15) лишь первый член, можно получить более простую формулу

$$I = \frac{4\pi C}{L} \varphi_w \left[1 + O \left(\frac{\ln \omega^{-1}}{\text{Re}^{1/2}} \right) \right], \quad C = - \frac{L}{4\pi} \int_{\Sigma} u_4(x) dS \quad (3.3)$$

Введенный здесь коэффициент размерности длины C имеет смысл электростатической емкости зонда.

Полученные соотношения описывают вольт-амперную характеристику зонда на интервале $(-\beta\varphi_c; \varphi_c)$; как видно из (3.3), на этом участке характеристика близка к прямой линии.

Рассмотрим ход вольт-амперной характеристики при $\varphi_w \geq \varphi_c$ или, что то же самое, при $I \geq I_c = 4\pi CL^{-1}\varphi_c$. Оставляя строгий анализ за рамками настоящей работы, приведем некоторые качественные соображения, проясняющие возможный вид характеристики в этой области. Вид вольт-амперной характеристики при $\varphi_w \leq -\beta\varphi_c$ может быть рассмотрен аналогично.

Введем величину I_{es} наибольшего тока, текущего с зонда в плазму в случае, когда на всей поверхности зонда дебаевский слой является асимптотически тонким (по сравнению с толщиной газодинамического пограничного слоя, имеющей порядок $\text{Re}^{-1/2}$). Эта величина в первом приближении дается формулой [7]

$$I_{es} = \int_{\Sigma} j_{es}(x) dS, \quad j_{es} = 2a_w \frac{1 + (1 + \beta)b_\infty}{1 + \beta} \text{Re}^{1/2} u_2(x)$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда отношение $u_2(x)/u_4(x)$ постоянно вдоль поверхности зонда, $I_{es} = I_c$. В противном случае $I_{es} > I_c$. Ниже будем для определенности полагать, что $I_{es} > I_c$; случай $I_{es} = I_c$ может быть рассмотрен аналогично.

Всю интересующую нас область $I \geq I_c$ можно подразделить на две: $I > I_{es}$ и $I_c \leq I \leq I_{es}$. Очевидно, что при $I > I_{es}$ (всюду подразумевается, что $I - I_{es} = O(\text{Re}^{1/2})$, $I - I_c = O(\text{Re}^{1/2})$) по крайней мере на части поверхности зонда толщина дебаевского слоя имеет порядок $\text{Re}^{-1/2}$. Нетрудно показать, что при этом падение напряжения в дебаевском слое имеет порядок величины $(\epsilon \text{Re})^{-1/2}$, а падения напряжения в области невязкого течения и квазинейтральной части газодинамического пограничного слоя по-прежнему имеют порядки $\text{Re}^{1/2}$, $\ln \omega^{-1}$. Таким образом, при $I > I_{es}$ основные вклады в полную разность потенциалов зонд-плазма вносят область невязкого течения и дебаевский слой; соотношение между этими вкладами определяется параметром ϵRe^2 .

Рассмотрим сначала случай $\epsilon \text{Re}^2 \rightarrow 0$. В этом случае при $I > I_{es}$ основной вклад в полную разность потенциалов зонд-плазма вносит дебаевский слой, толщина этого слоя на всей поверхности зонда имеет порядок $\text{Re}^{-1/2}$. При $I_c \leq I \leq I_{es}$ в этом случае можно ожидать следующее. На некоторой части Σ_1 поверхности зонда дебаевский слой является однородным и асимптотически тонким, на остальной части Σ_2 — неоднородным и асимптотически тонким. Толщина неоднородного дебаевского слоя и падение напряжения в нем имеют порядки величины $\epsilon^{1/2} \text{Re}^{1/6}$ и $\text{Re}^{1/2}$. Распределение плотности тока на Σ_2 описывается функцией $j_{es}(x)$, а на Σ_1 может быть найдено из

решения выписанной ниже краевой задачи (3.5), (3.6) для распределения потенциала в области невязкого течения

$$[j(x)]_{z_1} = -(\partial\varphi^i/\partial y)_{z_1} \quad (3.4)$$

$$\nabla^2\varphi^i = 0 \quad (3.5)$$

$$(\varphi^i)_{z_1} = \varphi_w, (\partial\varphi^i/\partial y)_{z_2} = -j_{es}(x); |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \varphi^i \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

При этом для данного значения φ_w выделение частей Σ_1 и Σ_2 должно быть произведено таким образом, чтобы решение этой задачи удовлетворяло следующим условиям:

$$-(\partial\varphi^i/\partial y)_{z_1} < j_{es}(x), (\varphi^i)_{z_2} \leq \varphi_w$$

При увеличении тока от I_c до I_{es} доля части поверхности зонда Σ_2 возрастает от 0 до 100%; дальнейшее увеличение тока сопровождается увеличением толщины дебаевского слоя на всей поверхности зонда.

Из сказанного выше следует, что в случае $\varepsilon Re^2 \rightarrow 0$ порядок величины $dI/d\varphi_w$, характеризующей наклон вольт-амперной характеристики к оси потенциалов, при $I < I_{es}$ равен единице, а при $I > I_{es}$ существенно меньше и равен $\varepsilon^{1/2} Re = o(1)$. Такое изменение наклона вольт-амперной характеристики можно назвать электронным насыщением.

Интересно оценить значение потенциала φ_{es} , при котором $I = I_{es}$, т. е. происходит выход на насыщение. Заметим, что при $\varphi_w \geq \varphi_{es}$, $\varphi_w = o(\varepsilon Re)^{-1/2}$ распределение потенциала в области невязкого течения в первом приближении не зависит от φ_w и определяется из решения следующей внешней задачи Неймана:

$$\nabla^2\varphi_{es}^i = 0$$

$$(\partial\varphi_{es}^i/\partial y)_w = -j_{es}; |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \varphi_{es}^i \rightarrow 0$$

Полагая, что φ_{es} соответствует наименьшему значению φ_w , при котором падение напряжения в дебаевском слое $(\varphi_w - \varphi_{esw}^i)$ неотрицательно на всей поверхности зонда, находим $\varphi_{es} = \max \varphi_{esw}^i(x)$.

Ожидаемый в случае $\varepsilon Re^2 \rightarrow 0$ вид вольт-амперной характеристики схематически изображен на фиг. 1 (кривая 1).

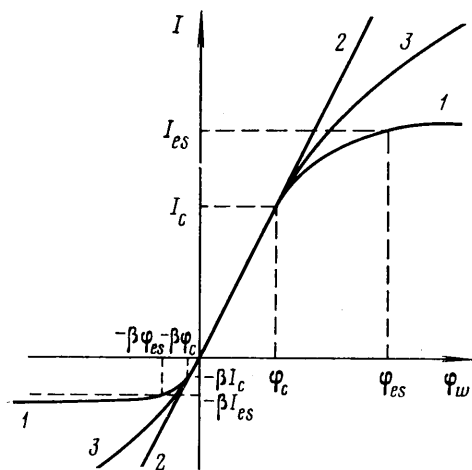
Рассмотрим теперь случай $\varepsilon Re^2 \rightarrow \infty$. В этом случае основной вклад в полную разность потенциалов зонд — плазма при $I > I_{es}$ (а следовательно, и при $I_c \leq I \leq I_{es}$) вносит область невязкого течения. Во всем диапазоне токов $I = O(Re^{1/2})$ вольт-амперная характеристика близка к прямой (линия 2 на фиг. 1) и в первом приближении описывается формулой (3.3). Распределение плотности тока с поверхности зонда имеет вид

$$j(x) = -\varphi_w u_4(x)$$

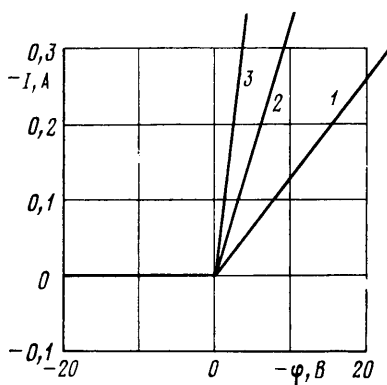
Наконец, при $\varepsilon Re^2 = O(1)$ вольт-амперная характеристика имеет прожекторный вид (кривая 3 на фиг. 1). При $I > I_c$ в общем случае падение напряжения в дебаевском слое на части поверхности зонда становится сравнимым с падением напряжения в области невязкого течения, вследствие чего характеристика отклоняется от прямой линии. В то же время падение напряжения в дебаевском слое при $I = O(Re^{1/2})$ не является доминирующим и поэтому насыщение отсутствует.

Таким образом, сделанный в [7] на основании асимптотического анализа модели с единственным малым параметром ε вывод о существовании токов насыщения применим и к настоящей модели, в которой наряду с ε существенным малым параметром является Re^{-1} , при условии, что $\varepsilon Re^2 \rightarrow 0$. Отметим, что в [9] аналогичное условие получено для модели, в которой основными малыми параметрами являются ε и χ .

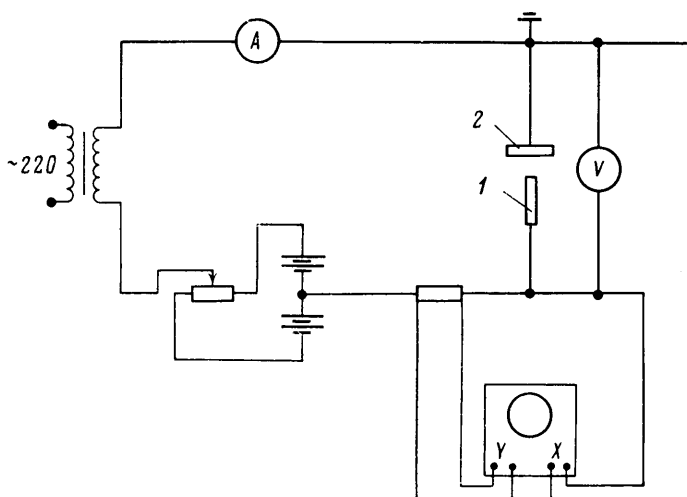
Экспериментальная проверка вида вольт-амперных характеристик проводилась на установке, в которой источником плазмы служил плазмо-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

трон со следующими характерными параметрами [10]: мощность 300 кВт, расход воздуха 30 г/с, давление, температура, скорость струи соответственно 1 атм, 2500 К, 300 м/с, весовая концентрация присадки (атомов калия) 0–1%. Использовался медный зонд с водяным охлаждением, выполненный в виде цилиндра с полусферической головкой (радиус скругления 0,5 см); ответным электродом служило сопло форкамеры плазмотрона. Отношение диаметра зонда к размеру струи плазмы составляло 0,2, число Рейнольдса набегающего потока $Re \sim 3000$, $\epsilon \ll 10^{-7}$.

Для снятия вольт-амперных характеристик использовалась электрическая схема, изображенная на фиг. 2 (I — зонд, 2 — ответный электрод). Схема предусматривает измерения как по постоянному току, так и по переменному. Для измерений на переменном токе был использован осциллограф, на вход которого по горизонтали подавалась разность потенциалов зонд — ответный электрод, а по вертикали — сигнал, пропорциональный току зонда, снимаемый с шунта в цепи зонда.

Измерения проводились преимущественно на переменном токе, так как, во-первых, параметры плазмы в данной экспериментальной установке флуктуируют, вследствие чего при нелинейном характере электрического сопротивления зонда проявляется эффект детектирования; во-вторых, су-

ществует поток твердых заряженных частиц, образуемых из-за эрозии электродов плазмотрона и налипающих на зонд, чем, вероятно, объясняется появление отрицательных импульсов возмущения потенциала зонда и тока на зонд (которые контролировались с помощью осциллографа). Поэтому показывающие приборы постоянного тока могут вносить погрешность, измеряя некие усредненные значения напряжений и токов.

Типичные экспериментальные вольт-амперные характеристики приведены на фиг. 3. Заметим, что в принятом масштабе катодная ветвь совпадает с отрицательной частью оси потенциалов. Вид кривых вполне соответствует предсказываемому для данных условий теорией. Кривые 1, 2 на фиг. 3 соответствуют разным значениям площади собирающей поверхности зонда (~ 5 и ~ 8 см²), кривые 1, 3 — разным значениям концентрации присадки ($\sim 0,1$ и $\sim 1\%$). Кривые сняты при амплитуде переменного напряжения 30 В. Величина напряжения ограничена условиями пробоя в катодном режиме, сопровождавшегося резким увеличением тока. В анодном режиме характеристика оставалась линейной, участка электронного насыщения в исследованном диапазоне потенциалов зонда (до 80 В) не наблюдалось. Важно отметить, что зонд должен быть все время холодным. В данном эксперименте при длительной эксплуатации зонда на нем осаждалась пленка присадки, вследствие чего появлялись заметные токи на зонд в катодной области (катодная ветвь вольт-амперной характеристики отклонялась от горизонтали).

4. **Диагностическая методика.** Запишем формулу (3.3) в размерных переменных

$$I^2 = 4\pi C \sigma_{\infty} \varphi_w^2 \quad (4.1)$$

Входящая в это соотношение емкость зонда зависит только от геометрии зонда и либо известна из теории, либо определяется из эксперимента. В частности, для некоторых простейших конфигураций можно использовать теоретические результаты работы [11].

Формула (4.1) позволяет по наклону линейного участка измеренной в эксперименте вольт-амперной характеристики непосредственно определять проводимость невозмущенной плазмы σ_{∞} . Отметим, что в силу сделанных при анализе пограничного слоя предположений эта формула справедлива, строго говоря, лишь для осесимметричных зондов, ось симметрии которых параллельна набегающему потоку. Однако, поскольку в области применимости формулы (4.1) основной вклад в полную разность потенциалов зонд — плазма вносит область невязкого течения, можно ожидать, что эта формула остается применимой также и в тех случаях, когда обтекание зонда является трехмерным. По той же причине можно ожидать, что эта формула остается применимой и в тех случаях, когда длина свободного пробега заряженных частиц сравнима с толщиной дебаевского слоя или больше этой толщины.

Важно подчеркнуть, что для определения по формуле (4.1) проводимости невозмущенной плазмы точные значения коэффициентов переноса плазмы и констант скоростей реакций ионизации и рекомбинации знать не обязательно, достаточно оценить порядки величин Re , χ , ϵ . При необходимости после определения величины σ_{∞} можно оценить концентрацию заряженных частиц в невозмущенной плазме $n_{\infty} x_{\infty}$, для чего, конечно, необходимо знать соответствующие коэффициенты переноса.

В случае $\epsilon Re^2 \ll 1$ величины σ_{∞} и $n_{\infty} x_{\infty}$ можно находить также по значениям токов насыщения; такой подход рассматривался в [12].

Наконец, рассмотрим нахождение по измеренной вольт-амперной характеристике потенциала невозмущенной плазмы. Нетрудно видеть, что с точностью до членов порядка $kT_w (\ln \omega^{-1})/e + kT_{\infty}/e$ этот потенциал совпадает с плавающим потенциалом.

Отметим, что основанная на формуле (4.1) методика нахождения величины σ_{∞} применима при следующих условиях: расстояние между зондом и ответным электродом существенно превышает размеры зонда; площадь поверхности ответного электрода существенно превышает площадь поверхности зонда. В этих условиях потенциал зонда следует отсчитывать от ответного электрода. В случае, когда удовлетворить второе условие затруднительно и падение напряжения в дебаевском слое на ответном электроде может привести к отличию вольт-амперной характеристики от обсуждавшегося выше вида, можно ввести в плазму находящийся под плавающим потенциалом дополнительный (опорный) электрод и отсчитывать потенциал зонда от этого электрода. При этом расстояние от зонда до опорного электрода должно существенно превышать размеры зонда.

Выполненная в описанном выше эксперименте оценка проводимости по наклону линейного участка (без калибровки показаний, учитывающей точную геометрию за-

дачи и неоднородное распределение параметров плазмы) дала ожидаемый порядок величины для заданных варьируемых экспериментальных условий (0,3–3 См/м). Плавающий потенциал во всех случаях в пределах точности измерений совпадал с потенциалом корпуса плазмотрона. Поскольку можно ожидать, что в данной установке потенциал плазмы близок к потенциалу корпуса плазмотрона, то это обстоятельство вполне согласуется с развитой выше теорией.

В заключение отметим, что ранее в экспериментах для определения проводимости плазмы применялся близкий по своей идее к обсуждаемому выше электродный метод, суть которого состоит в измерении тока в цепи между двумя электродами, помещенными в плазму, и напряжения на межэлектродном промежутке [13]. При применении этого метода возникают трудности, связанные с учетом падения напряжения в слоях вблизи электродов, а также неопределенностью конфигурации разряда. Важно подчеркнуть, что в рамках зондовой методики, развитой в настоящей работе, указанные трудности не возникают.

Авторы благодарят Любимова Г. А. за внимание к работе и полезные обсуждения

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lam S. H.* A general theory for the flow of weakly ionized gases.— *AIAA Journal*, 1964, v. 2, № 2, p. 256–262.
2. *Su C. H.* Compressible plasma flow over a biased body.— *AIAA Journal*, 1965, v. 3, № 5, p. 842–848.
3. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976, 455 с.
4. *Чан П., Талбот Л., Туриан К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме (Теория и применение). М.: Мир, 1978, 201 с.
5. *Колесниченко А. В., Тирский Г. А.* Соотношения Стефана – Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред.— В кн.: Численные методы механики сплошных сред. Т. 7, № 4. Новосибирск, 1976, с. 106–121.
6. *Гиршфельдер Дж., Кергисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, 929 с.
7. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* О токах насыщения на зонд в плотной плазме.— *ПМТФ*, 1979, № 6, с. 16–24.
8. *Бенилов М. С.* К теории сферического электрического зонда в покоящейся слабоионизованной плазме.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1981, № 6.
9. *Бенилов М. С.* Теория области возмущения химически равновесной слабоионизованной плазмы вблизи электрода.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1982, № 1, с. 142–153.
10. *Герман В. О., Зекцер М. П., Любимов Г. А., Парфенов Б. В.* Исследование разряда между модулями холодной изоляционной стенки.— *Теплофизика высоких температур*, 1972, т. 10, № 4, с. 874–881.
11. *Страттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, 539 с.
12. *Бенилов М. С., Рогов Б. В., Тирский Г. А.* Теоретическое определение ионного тока насыщения на электрические зонды в дозвуковых потоках плазмы.— *Теплофизика высоких температур*, 1981, № 5, с. 1031–1039.
13. *Васильева И. А., Нефедов А. П., Селф С. Э.* Диагностика плазмы в МГД-установках.— В кн.: Магнитогидродинамическое преобразование энергии. Открытый цикл. М.: Наука, 1979, с. 531–570.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1981