

УДК 532.5.011

КОНЦЕНТРАЦИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ И СПИРАЛЬНЫЕ ВИХРИ

НОВИКОВ Е. А., СЕДОВ Ю. Б.

Характерной чертой квазилинейных вихрей различной природы является конвергенция — сходящееся радиальное движение среды у основания вихря. Наглядными примерами тому служат стоковые вихри в ванне, смерчи и тайфуны. Можно думать, что в замагниченной плазме возникают вихри такой же общей структуры. Решение полной трехмерной задачи о возникновении и взаимодействии такого рода вихрей встречает серьезные математические трудности. В данной работе конвергенция моделируется с помощью стоков (при этом физическая природа стоков не рассматривается, в случае тайфунов это может быть конвекция над перегретой поверхностью океана). Тем самым задача сводится к исследованию точных решений уравнений двумерной гидродинамики.

Неподвижный стационарный вихресток (наложение точечных вихря и стока) фигурировал еще в классических работах по гидромеханике [1] и получил название спирального вихря (по форме линий тока). В недавних исследованиях по теории тайфунов [2] предложено использовать спиральные вихри в качестве моделей тайфунов, но дальнейшего развития эта идея пока не получила.

Рассмотренные ниже задачи о концентрации завихренности и динамике вихрей в поле спирального вихря естественно моделировать в плоской кювете с неподвижным стоком. В качестве подвижных стоков, которые в результате концентрации завихренности превращаются в спиральные вихри, можно пытаться использовать легкие гибкие шланги с отсосом, подвешенные над кюветой.

Рассмотренные в работе динамические системы обладают рядом интересных и порой неожиданных свойств. Можно надеяться, что они найдут применение не только в указанных выше, но и в других областях науки, подобно тому, как обычные линейные и экранированные (геострофические) вихри оказались важными объектами исследования в теориях сверхтекучести, сверхпроводимости и замагниченной плазмы [3, 4].

1. Образование концентрированных вихрей. Поместим на плоскости в начале координат сток интенсивности $\mu < 0$. Пусть в начальный момент времени имеется осесимметричное поле вихря

$$\Omega_0(\mathbf{r}) = \kappa_0 \delta(\mathbf{r}) + q_0(r) \quad (1.1)$$

где κ_0 — интенсивность сингулярного вихря (как обычно, принимаем, что при $\kappa_0 > 0$ жидкость вращается против часовой стрелки), q_0 — непрерывная составляющая, \mathbf{r} — радиус-вектор. Для простоты предположим, что завихренность жидких частиц, попадающих в сток, без потерь переходит в сингулярный вихрь.

Из условий несжимаемости и сохранения циркуляции скорости получим уравнения для траекторий жидких частиц в полярных координатах

$$\dot{r} = \frac{\mu}{2\pi r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\kappa_0 + \Gamma(r_0)}{2\pi r^2}, \quad \Gamma(\rho) = 2\pi \int_0^\rho dr r q_0(r) \quad (1.2)$$

Здесь r_0 отвечает начальному положению частицы. Решение уравнений (1.2) имеет вид

$$r^2(t) = r_0^2 + \frac{\mu}{\pi} t, \quad \frac{r(t)}{r_0} = \exp \left\{ \frac{\mu(\varphi(t) - \varphi_0)}{\kappa_0 + \Gamma(r_0)} \right\} \quad (1.3)$$

где φ_0 — начальный угол. Таким образом, жидкие частицы движутся по логарифмическим спиральям, а квадрат расстояния частицы до стока линейно убывает со временем.

С учетом (2.2), (2.3) получим, что поле вихря меняется по закону

$$\Omega(t, r) = \kappa(t) \delta(\mathbf{r}) + q_0 \left(\sqrt{r^2 - \frac{\mu}{\pi} t} \right), \quad \kappa(t) = \kappa_0 + \Gamma \left(\left(-\frac{\mu}{\pi} t \right)^{1/2} \right)$$

Если начальное распределение ограничено в пространстве: $q_0(r) = 0$ при $r > a$, то завихренность схлопывается за время $t_* = -\pi a^2 / \mu$ и результирующий вихрь имеет интенсивность $\kappa(t_*) = \kappa_0 + \Gamma(a)$.

2. Динамика вихрей в поле спирального вихря. При отсутствии осевой симметрии поле вихря эволюционирует в общем случае довольно сложным образом. Грубую картину можно получить, усредняя поле вихря по углу и используя результаты предыдущего пункта. Однако при этом ускользает целый ряд деталей и интересных режимов. Например, если имеются два одинаковых по структуре вихря противоположных знаков, находящихся на равном расстоянии от начала координат (где помещен спиральный вихрь), то при усреднении по углу эти вихри вообще выпадают из рассмотрения. Чтобы лучше разобраться в задаче, следуя развитой в [4–6] методике, рассмотрим систему дискретных вихрей.

В начале координат опять поместим спиральный вихрь с параметрами κ_0, μ . Обозначим (r_i, φ_i) — полярные координаты сосредоточенных вихрей с интенсивностями κ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Сток и вихри индуцируют соответственно радиальное и тангенциальные поля скорости (1.2). Нетрудно видеть, что движение вихрей описывается гамильтоновой системой уравнений

$$\kappa_i r_i \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \quad \kappa_i r_i \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} \quad (2.1)$$

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \ln r_{ij} + \frac{1}{2\pi} \sum_i \kappa_i (\mu \varphi_i - \kappa_0 \ln r_i) \quad (2.2)$$

$$r_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)$$

Первое слагаемое в гамильтониане H отвечает взаимодействию между вихрями [5], а второе — влиянию спирального вихря. (Уравнения (2.1), (2.2) нетрудно обобщить на случай нескольких неподвижных спиральных вихрей.)

Гамильтониан H является инвариантом движения для интервалов времени, в течение которых вихри не попадают в вихресток. При попадании вихрей в вихресток изменяется параметр κ_0 и число взаимодействующих вихрей n .

Следуя анализу коллапса вихрей [6], введем пространственный и угловой вириалы системы

$$-\sum_i r_i \frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j + \frac{\kappa_0}{2\pi} \sum_i \kappa_i = V \quad (2.3)$$

$$\sum_i \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = \frac{\mu}{2\pi} \sum_i \kappa_i = U \quad (2.4)$$

Используя второе и первое уравнения из (2.1), получим

$$\sum_i \kappa_i r_i^2 \dot{\varphi}_i = V \quad (2.5)$$

$$I(t) = \sum_i \kappa_i r_i^2(t) = 2Ut + I_0 \quad (2.6)$$

Рассмотрим однородный коллапс (разбегание) вихрей, при котором конфигурация изменяется подобным образом

$$r_i(t) = \lambda(t)r_i(0), \quad \dot{\varphi}_i(t) = \omega(t) \quad (2.7)$$

где $\lambda(t)$ — масштабный фактор, $\omega(t)$ — одинаковая для всех вихрей угловая скорость вращения. Из (2.5), (2.6), предполагая $I_0 \neq 0$, получим

$$\lambda^2(t) = 1 - \frac{t}{t_*}, \quad \omega(t) = \omega_0 \lambda^{-2}(t) \quad (2.8)$$

где $t_* = -I_0/(2U)$ — время коллапса (случай $t_* < 0$ отвечает разбеганию вихрей), $\omega_0 = V/I_0$ — начальная угловая скорость. Таким образом, движение вихрей происходит по логарифмическим спиральям

$$r_i(t) = r_i(0) \exp \left\{ \frac{U}{V} (\varphi_i(t) - \varphi_i(0)) \right\} \quad (2.9)$$

Пример однородного коллапса доставляет правильный n -угольник из одинаковых вихрей ($r_i \equiv r_1$, $\kappa_i \equiv \kappa_1$) с центром в начале координат. При этом

$$I = n\kappa_1 r_1^2, \quad V = \frac{n\kappa_1}{4\pi} [(n-1)\kappa_1 + 2\kappa_0], \quad U = \frac{n\kappa_1 \mu}{2\pi} \\ t_* = -\frac{\pi r_1^2(0)}{\mu}, \quad \omega_0 = \frac{(n-1)\kappa_1 + 2\kappa_0}{4\pi r_1^2(0)} \quad (2.10)$$

Формулы (2.7) — (2.10) описывают, в частности, движение одного вихря в поле спирального вихря.

Если в рассмотренном примере провести усреднение по углу поля вихря (заменить систему n вихрей круговой вихревой пеленой с интегральной интенсивностью $n\kappa_1$) и воспользоваться формулой (1.3) для движения самой пелены, то результат будет тем точнее, чем больше n . Действительно, в (1.3) нужно положить $\Gamma(r_0) = 1/2 n\kappa_1$, тогда как соответствующие слагаемые в (2.9) с учетом (2.10) равны $1/2(n-1)\kappa_1$.

Перейдем теперь к случаю пары вихрей $\kappa_1 = -\kappa_2 \equiv \kappa > 0$. Угловой вириал (2.4) обращается в нуль, (2.2) и (2.6) дают инварианты движения

$$h \equiv \frac{2\pi H}{\kappa^2} = \ln r_{12} + \alpha\varphi - \frac{\kappa_0}{\kappa} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (2.11)$$

$$\left(\alpha = \frac{\mu}{\kappa}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \right), \quad \frac{I}{\kappa} = r_1^2 - r_2^2 = \text{const} \quad (2.12)$$

Из (2.1) получим уравнения

$$\dot{\varphi} = -\frac{\kappa}{2\pi r_{12}^2} \left[2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 r_2} \cos \varphi \right] + \frac{\kappa_0}{2\pi} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \quad (2.13)$$

$$\dot{r}_1 = \frac{\mu}{2\pi r_1} + \frac{\kappa r_2 \sin \varphi}{2\pi r_{12}^2} \quad (2.14)$$

которые с учетом (2.11), (2.12) сводятся к квадратурам.

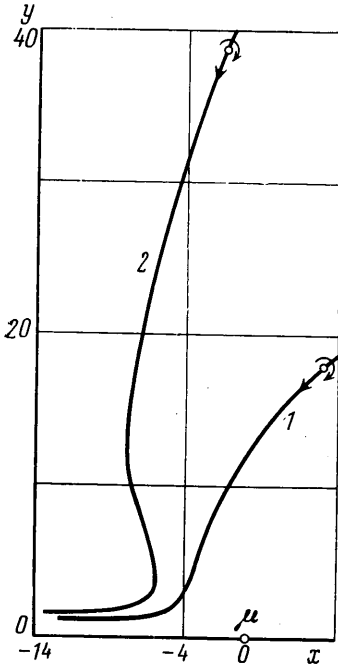
При симметричном расположении вихрей имеем $r_1 = r_2$

$$r_{12}^2 = 2r_1^2(1 - \cos \varphi) = \exp \{2h - 2\alpha\varphi\} \quad (2.15)$$

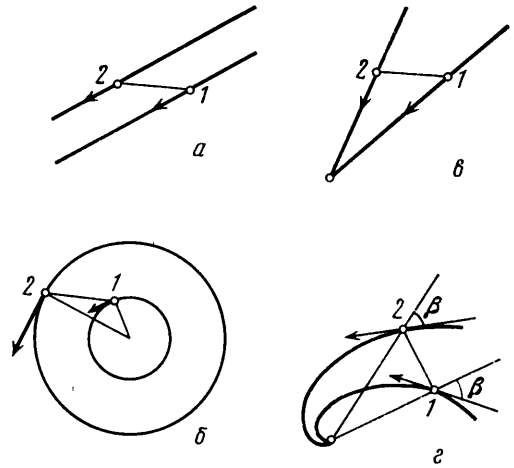
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = (\cos \varphi - 1) e^{2\alpha\varphi}, \quad \tau \equiv \frac{\kappa}{\pi} e^{-2h} t = \int \frac{e^{-2\alpha\xi} d\xi}{2 \sin^2 \xi/2} \quad (2.16)$$

Поскольку $|\varphi| \leq 2\pi$, то из (2.15) следует, что вихри не могут попасть в вихресток и минимальное расстояние между ними достигается при $\varphi =$

$=2 \operatorname{arctg} 2\alpha$. Согласно (2.15), (2.16), угол φ и расстояние между вихрями r_{12} систематически убывают. На фиг. 1 изображены траектории вихрей в поле стока ($\kappa_0=0$), построенные по (2.15) при $\alpha=-0,8; -1,2$. Ось x совпадает с осью симметрии, $1 < y < \exp\{-2\alpha\pi\}$, граничные значения y являются



Фиг. 1



Фиг. 2

ся асимптотическими. Два типа траекторий отвечают случаям: $\alpha \geq -1$, $\alpha < -1$. Особенно интересен последний случай ($\alpha < -1$, кривая 2), когда влияние стока временно пересиливает стремление пары вихрей уйти на бесконечность.

Влияние κ_0 (при $r_1=r_2$) сказывается только на изменении угла поворота системы $\psi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Второе из уравнений (2.1) с учетом (2.15), (2.16) дает простую связь $\kappa\psi + \kappa_0\varphi = \text{const}$. В частности, при $\kappa_0 = \kappa/2$ получим $\varphi_1 = \text{const}$, а при $\kappa_0 = -\kappa/2$ имеем $\varphi_2 = \text{const}$, т. е. в этих случаях один из вихрей движется вдоль луча.

3. Динамика спиральных вихрей. Система свободных спиральных вихрей представляет собой обобщение рассмотренных ранее систем вихрей [1, 4-6] и источников [7]. Пусть $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — декартовы координаты i -го спирального вихря ($i=1, 2, \dots, n$) интенсивности (κ_i, μ_i) . Выражение для скорости i -го спирального вихря получим, учитывая влияние на него остальных спиральных вихрей системы:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j x_{ij} - \kappa_j y_{ij}}{2\pi b_{ij}} \equiv X_i, \quad \dot{y}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j y_{ij} + \kappa_j x_{ij}}{2\pi b_{ij}} \equiv Y_i \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv (x_{ij}, y_{ij}) = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad b_{ij} = r_{ij}^2$$

Уравнения (3.1) имеют интегралы: $\sum_i (\mu_i x_i - \kappa_i y_i) = \text{const}$, $\sum_i (\mu_i y_i + \kappa_i x_i) = \text{const}$.

(Этим же уравнениям подчиняется динамика системы m свободных спиральных вихрей в поле $n-m$ закрепленных спиральных вихрей. Индекс i при этом принимает значения от 1 до $m < n$, а положения вихрей \mathbf{r}_j фиксированы при $j > m$.)

Правые части системы $2n$ уравнений (3.1) зависят только от относительных переменных r_{ij} , поэтому, следуя [5], получим замкнутую систему уравнений порядка $2n-2$ для относительного движения $\dot{x}_{ij}=X_i-X_j$, $\dot{y}_{ij}=Y_i-Y_j$.

Удобно ввести относительные полярные координаты так, что

$$x_{ij}=r_{ij} \cos \varphi_{ij}, \quad y_{ij}=r_{ij} \sin \varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij}=\operatorname{arctg} y_{ij}/x_{ij}$$

угол φ_{ij} отсчитывается от оси x до вектора r_{ij} . В новых переменных уравнения примут вид

$$\dot{b}_{ij} = \frac{M}{\pi} + \sum_{k \neq i, j} \left[\frac{2\kappa_k}{\pi} S_{ijk} (b_{jk}^{-1} - b_{ik}^{-1}) + \frac{\mu_k}{2\pi} \left(\frac{b_{ij} - b_{jk}}{b_{ik}} + \frac{b_{ij} - b_{ik}}{b_{jk}} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$b_{ij} \dot{\varphi}_{ij} = \frac{K}{2\pi} + \sum_{k \neq i, j} \left[-\frac{\kappa_k}{4\pi} \left(\frac{b_{ij} - b_{jk}}{b_{ik}} + \frac{b_{ij} - b_{ik}}{b_{jk}} \right) + \frac{\mu_k}{\pi} S_{ijk} (b_{jk}^{-1} - b_{ik}^{-1}) \right] \quad (3.3)$$

$$K = \sum_i \kappa_i, \quad M = \sum_i \mu_i, \quad S_{ijk} = \gamma_{ijk} \sqrt{A_{ijk}}/4$$

Здесь K — суммарный вихрь, а M — суммарный сток системы спиральных вихрей; S_{ijk} — ориентируемая площадь треугольника, образуемого спиральными вихрями с номерами i, j, k , ориентация этого треугольника $\gamma_{ijk} = \pm 1$ в зависимости от того, против или по часовой стрелке происходит обход его вершин. Область допустимых значений переменных b_{ij} определяется неравенствами

$$A_{ijk} = 2(b_{ij}b_{jk} + b_{ki}b_{ij} + b_{jk}b_{ki}) - b_{ij}^2 - b_{jk}^2 - b_{ki}^2 \geq 0$$

равносильными соответствующим неравенствам треугольника. Изменение знака величины γ_{ijk} происходит, когда спиральные вихри с номерами i, j, k оказываются на одной прямой и величина A_{ijk} обращается в нуль.

Таким образом, система $2n$ уравнений (3.1) свелась к замкнутой системе уравнений (3.2) для расстояний между спиральными вихрями, имеющей, как нетрудно видеть, порядок, равный $2n-3$. Это позволяет решить задачу о взаимодействии двух спиральных вихрей. Из (3.2), (3.3) при $n=2$ получим

$$b_{12}(t) = b_{12}(0) + \frac{M}{\pi} t, \quad \dot{\varphi}_{12} = \frac{K}{2\pi b_{12}} \quad (3.4)$$

Откуда следует, что при $M=0$ расстояние между спиральными вихрями не изменяется, при $M<0$ вихри сближаются, а при $M>0$ разбегаются. Далее, при $K=0$ вектор r_{12} сохраняет направление, при $K>0$ вихри вращаются против часовой стрелки, а при $K<0$ — по часовой стрелке. Зная относительное движение (3.4), по интегралам уравнений (3.1) нетрудно рассчитать абсолютное движение спиральных вихрей.

Имеем следующие типы траекторий, приведенные на фиг. 2. При $K=M=0$ пара спиральных вихрей противоположных интенсивностей движется поступательно со скоростью, равной $(\kappa_1^2 + \mu_1^2)^{1/2} (2\pi r_{12})^{-1}$ и направленной под углом, косинус которого равен $-\mu_1(\kappa_1^2 + \mu_1^2)^{-1/2}$, к вектору r_{12} .

При $K \neq 0, M=0$ движение спиральных вихрей происходит по концентрическим окружностям с угловой скоростью $K/(2\pi b_{12})$. Центр окружностей удален от центра тяжести вихрей в направлении, перпендикулярном вектору r_{12} , на расстояние $(\mu_2/K)r_{12}$.

При $K=0, M \neq 0$ спиральные вихри движутся по лучам, пересекающимся в точке, удаленной на расстояние $|\kappa_2/M|r_{12}$ от центра тяжести сток в направлении, перпендикулярном r_{12} . Если $M>0$, вихри разбегаются на бесконечность, при $M<0$ они сливаются, образуя сток интенсивности M , за время $t_* = -\pi b_{12}/M$.

При $K, M \neq 0$ движение спиральных вихрей происходит по логарифмическим спиральям с параметром $-M/K$. Если $\kappa_1\mu_2 = \kappa_2\mu_1$, общий полюс спиралей совпадает с центром тяжести спиральных вихрей. В общем случае он находится в точке пересечения прямых, проходящих через начальные положения спиральных вихрей под углом $\beta = \text{arctg}(-M/K)$ к векторам начальных скоростей. При $M > 0$ вихри разлетаются, а при $M < 0$ схлопываются в полюсе за время $t_* = -\pi b_{12}/M$.

Система двух спиральных вихрей с $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ и $\mu_1, \mu_2 < 0$ может служить моделью взаимодействия двух тайфунов, имеющих тенденцию к сближению [8].

Система трех уравнений (3.2) в задаче о взаимодействии трех спиральных вихрей сводится к неавтономному уравнению первого порядка. В ряде случаев можно получить аналитические решения для трех и более спиральных вихрей. Так, если в начальный момент спиральные вихри находятся в вершинах правильного треугольника, то, согласно (3.2), треугольник остается правильным, а его динамика определяется из (3.4).

Рассмотрим систему спиральных вихрей с одинаковыми отношениями стоковой и вихревой интенсивностей: $\mu_i/\kappa_i = \alpha$. В этом случае исходные уравнения приводятся к гамильтонову виду

$$\kappa_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \kappa_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j (\ln r_{ij} - \alpha \varphi_{ij})$$

Из инвариантности гамильтониана H относительно сдвигов следует дополнительный векторный инвариант движения

$$\sum_i \mu_i \mathbf{r}_i = \alpha \sum_i \kappa_i \mathbf{r}_i$$

который при $M = \alpha K \neq 0$ определяет положение совпадающих центров тяжести систем соответствующих вихрей и стоков. Далее, аналогично (2.5), (2.6) получим

$$\alpha \sum_i \mu_i r_i^2 \dot{\varphi}_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \equiv V_c \quad (3.5)$$

$$I_c(t) = \sum_i \mu_i r_i^2(t) = I_c(0) + 2V_c t \quad (3.6)$$

Если для всех спиральных вихрей $\mu_i < 0$, то из (3.6) следует, что за конечное время все спиральные вихри должны слиться в один с суммарной интенсивностью (K, M) , расположенный в центре тяжести. Поскольку при каждом слиянии величина I_c изменяется непрерывно, а V_c уменьшается скачком, наименьшее время требуется для одновременного слияния всех спиральных вихрей.

Одновременное слияние всей системы спиральных вихрей происходит при однородном коллапсе, описываемом формулами (2.7)–(2.9), где теперь $t_* = -I_c(0)/(2V_c)$, $\omega_0 = V_c/(\alpha I_c(0))$, а роль параметра U/V в логарифмической спирали (2.9) играет величина α . Пример однородного коллапса дает система одинаковых спиральных вихрей ($\kappa_i = \kappa_1, \mu_i = \mu_1$), помещенных в вершины правильного n -угольника. Если в центре n -угольника поместить спиральный вихрь произвольной интенсивности (κ_0, μ_0) , то, варьируя параметры κ_0, μ_0 , можно добиться того, чтобы вихри двигались по лучам, а также найти стационарные конфигурации.

4. Другие примеры динамики особенностей. Данная работа, как и [4–6], относится к направлению в механике жидкости и плазмы, которое можно называть «динамика особенностей». На этом пути можно ожидать появления новых моделей для описания различных явлений природы. Приведем два достаточно экзотических примера динамики особенностей.

Первый пример связан с точечными источниками (стоками) в трехмерном течении несжимаемой жидкости. Расстояние между двумя свободными источниками, которые будут двигаться по соединяющей их прямой, изменяется по закону

$$r_{12}^3(t) = r_{12}^3(0) + \frac{3M}{4\pi} t, \quad M = \mu_1 + \mu_2$$

Другой пример доставляет система n параллельных плоских источников. Упорядочивая их по координатам $x_j < x_{j+1}$, для интервалов времени между слияниями получим общее решение

$$x_j(t) = x_j(0) + \frac{t}{2} \left[\sum_{i=1}^{j-1} \mu_i - \sum_{i=j+1}^n \mu_i \right]$$

(для $j=1$ нужно опустить первое слагаемое в квадратных скобках, для $j=n$ – второе слагаемое). Отметим, что по такому же закону (при $\mu_i < 0$) изменятся скорости сосредоточенных гравитационных масс в одномерном мире [9].

Подход, аналогичный вышеизложенному, может быть применен для исследования динамики других гидродинамических особенностей (мультиплетов, вихревой пелены и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
2. Шулейкин В. В. Расчет развития, движения и затухания тропических ураганов и главных волн, создаваемых ураганами. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 97 с.
3. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
4. Novikov E. A. Stochastization and collaps of vortex systems. – Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, Nonlinear Dynamics, p. 47–54.
5. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей. – ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 5, с. 1868–1882.
6. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Коллапс вихрей. – ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 2, с. 588–597.
7. Богомолов В. А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 21–27.
8. Brand S. Interaction of binary tropical cyclones of the western north Pacific Ocean. – J. Appl. Meteorol., 1970, v. 9, № 3, p. 433–441.
9. Новиков Е. А. Нелинейное развитие возмущений в одномерном мире. – ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 3, с. 938–940.

Москва

Поступила в редакцию
7.IX.1981