

УДК 535.5

**ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
В ЗАКРУЧЕННОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

ОСТАПЕНКО Н. А.

Известно, что тела с неосесимметричным поперечным сечением в однородном потоке могут иметь меньшее волновое сопротивление, чем тела вращения такой же длины и объема. Первые результаты получили для эллиптических конусов [1]. Затем в [2] было показано, что волновое сопротивление пирамидальных тел меньше, чем у эквивалентного кругового конуса. Последнее исследование послужило началом целого цикла работ ([3, 4] и др.), в которых как в модельной, так и в точной постановках было установлено, что волновое сопротивление тел со звездообразным поперечным сечением может быть в 2 и более раз меньше волнового сопротивления эквивалентного тела вращения. Последующие эксперименты [5] и параметрические экспериментальные исследования [6, 7] подтвердили выводы теории в широком диапазоне чисел Маха.

Значительный интерес представляет задача о пространственном теле минимального волнового сопротивления, движущемся с большой сверхзвуковой скоростью в закрученном потоке. Формулировка и решение соответствующей вариационной задачи даются ниже.

1. Рассмотрим обтекание тела в цилиндрической системе координат (r, θ, x) , направление оси x которой совпадает с направлением поступательного движения набегающего потока и является его осью вращения (фиг. 1); θ — угол, образованный радиусом r и плоскостью xy декартовой системы координат (x, y, z) .

Обозначим единичные векторы цилиндрической системы координат через $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_x$. Введем единичный вектор \mathbf{n} , нормальный к поверхности тела, положительное направление которого выберем в сторону от поверхности.

Волновое сопротивление тела зададим выражением

$$D = -q \iint_S C_p (\mathbf{n}\mathbf{u}_x) ds \quad (1.1)$$

где коэффициент давления в рамках теории Ньютона имеет вид

$$C_p = 2(\mathbf{n}\mathbf{u})^2 \quad (1.2)$$

Здесь q — скоростной напор, вычисленный по поступательной составляющей скорости U , \mathbf{u} — безразмерный вектор скорости набегающего потока, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси x , в направлении положительного изменения угла θ

$$\mathbf{u} = r\mathbf{u}_\theta\omega/U + \mathbf{u}_x \quad (1.3)$$

В предположении, что функция r переменных θ и x , описывающая поверхность тела, является однозначной по крайней мере там, где $C_p \neq 0$, соотношение (1.1) с учетом выражения для дифференциала площади поверхности тела $ds = r d\theta dx / (\mathbf{n}\mathbf{u}_r)$ и (1.2) примет вид

$$D = -2q \int_0^{2\pi} \int_0^L r \frac{(\mathbf{n}\mathbf{u})^2 (\mathbf{n}\mathbf{u}_x)}{(\mathbf{n}\mathbf{u}_r)} d\theta dx \quad (1.4)$$

где L — длина тела.

Если поверхность тела задана уравнением $f(r, \theta, x) = 0$, то для единичного вектора \mathbf{n} нормали к поверхности имеет место соотношение

$$\mathbf{n} = [f_r^2 + (f_\theta/r)^2 + f_x^2]^{-1/2} [f_r \mathbf{u}_r + (f_\theta/r) \mathbf{u}_\theta + f_x \mathbf{u}_x]$$

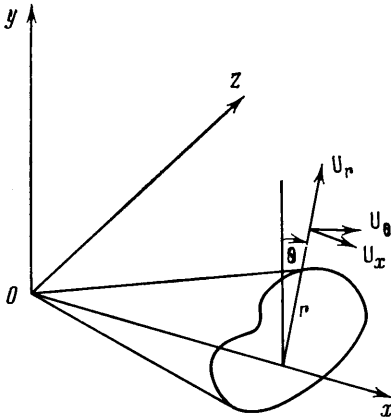
и сопротивление тела (1.4) с использованием (1.3) запишется в виде

$$D = -2q \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{r f_x}{f_r} \frac{(\omega f_\theta / U + f_x)^2}{f_r^2 + (f_\theta/r)^2 + f_x^2} d\theta dx \quad (1.5)$$

Будем отыскивать тела минимального сопротивления в классе поверхностей, которые бы имели подобные поперечные сечения по оси x [3] при $\omega = 0$. Соответствующие поверхности в сечении, нормальном оси x , по аналогии с [3] должны состоять из циклов, сопрягающихся на острых передних кромках. Не допуская срывов потока с острых передних кромок искомых оптимальных тел, нетрудно установить, что они находятся в классе функций

$$f = r - \varphi(x) R(\theta - \omega x / U) = 0 \quad (1.6)$$

При этом частицы газа, расположенные на некотором луче θ_0 при $x = 0$, в процессе движения со скоростью U вдоль оси x , оставаясь на луче $\xi = \theta - \omega x / U = \theta_0$, занимают фиксированное положение относительно концов интервала, соответствующего циклу поперечного



Фиг. 1

ного контура $R(\xi)$. Следовательно, каждый цикл поперечного контура тела (1.6) поворачивается в поперечной плоскости от его носика до донного сечения на угол $\sigma = \omega L / U$.

Используя (1.6), из (1.5) найдем выражение для волнового сопротивления тонкого тела ($(f_x/f_r)^2 \ll 1$), переходя от переменных интегрирования θ, x к ξ, x и учитывая, что функция $R(\xi)$ — периодическая с периодом 2π

$$D = 2q \left[\int_0^L \varphi \dot{\varphi}^3 dx \int_0^{2\pi} \frac{R^6}{R^2 + \dot{R}^2} d\xi - \frac{\omega}{U} \int_0^L \varphi^2 \dot{\varphi}^2 dx \int_0^{2\pi} \frac{R^5 \dot{R}}{R^2 + \dot{R}^2} d\xi \right]$$

Здесь и далее точки обозначают производные функций φ и R по их аргументам x и ξ соответственно. Функцию $\varphi(x)$ будем называть определяющей продольный контур тела.

Вводя безразмерные величины $\rho(\xi) = R(\xi)/L$ и $x_1 = x/L$ (индекс 1 далее опустим), получим

$$D = 2qL^2 \left(\int_0^1 \varphi \dot{\varphi}^3 dx \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi - \sigma \int_0^1 \varphi^2 \dot{\varphi}^2 dx \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5 \dot{\rho}}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi \right) \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) можно переписать в следующих двух формах:

$$D = 2qL^2 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi \int_0^1 \varphi \dot{\varphi}^2 (\varphi - d\varphi) dx$$

$$d = \sigma \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5 \dot{\rho}}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi / \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi$$

$$D = qL^2 A \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5 (\rho - t\dot{\rho})}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi \quad (1.8)$$

$$t = 2\sigma \int_0^1 \varphi^2 \dot{\varphi}^2 dx / A, \quad A = 2 \int_0^1 \varphi \dot{\varphi}^3 dx$$

Приведенная запись волнового сопротивления позволяет разделить задачу нахождения оптимальной формы тела на две. Поскольку вариации продольного и поперечного контуров независимы, то продольный и поперечный контуры должны являться соответственно экстремалами функционалов I_1 и I_2

$$I_1 = \int_0^1 \varphi \dot{\varphi}^2 (\varphi - d\varphi) dx, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5 (\rho - t\dot{\rho})}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi$$

Вариационные задачи для каждого функционала формулируются и решаются независимо.

Так как независимая переменная x в функционале I_1 в явном виде отсутствует, найдем первый интеграл соответствующего уравнения Эйлера

$$2\varphi \dot{\varphi}^3 - d\varphi^2 \dot{\varphi}^2 = d_1$$

Без ограничения общности можно считать, что в конечных точках функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

Допуская наличие конечного числа точек разрыва первой производной продольного контура, из условия Вейерштрасса – Эрмана нетрудно установить, что в точках сопряжения экстремалей кривая является гладкой.

Полагая $\varphi = 1/u$ и учитывая краевое условие при $x=0$, найдем решение в параметрическом виде

$$\varphi = \frac{1}{du} (1 - \sqrt{1 - dd_1 u^4}), \quad u \geq 0$$

$$x = \frac{1}{2d} \left(1 - \sqrt{1 - dd_1 u^4} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - dd_1 u^4}}{2d} \right)$$

Постоянная d_1 определится из условия для $\varphi(x)$ в точке $x=1$.

Заметим, что при $d=0$ продольный контур является степенной функцией x с показателем степени $3/4$. Для $d \neq 0$ продольный контур остается выпуклым с асимптотикой в носике тела $(32d_1/27)^{1/4} x^{3/4}$.

Однако у оптимального тела при $\omega \neq 0$ ($d \neq 0$) продольный контур через параметр d зависит от формы поперечного контура, который в свою очередь через параметр t зависит от формы продольного контура. Для определения величин d и t необходимо решения $\varphi(x, d)$ и $\rho(\xi, t)$ соответствующих вариационных задач подставить в выражения (1.8) для d и t и решить получающуюся при этом систему двух уравнений. С учетом выписанного выше решения для продольного контура зависимость параметра t от d запишется в виде

$$t = 2\sigma \frac{[4 - 3u_1 + 2du_1(u_1 - 1)]}{d[8 - 3u_1 + 2du_1(u_1 - 2)]}$$

Здесь u_1 – значение параметра u , соответствующее $x=1$, первые два члена разложения которого в ряд по d имеют вид

$$u_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{27} d + \dots$$

Для коэффициента A в выражении для сопротивления (1.8) в этом случае найдем

$$A = \frac{1}{2u_1^3} [8 - 3u_1 + 2du_1(u_1 - 2)]$$

Если продольный контур считать заданным, например в виде степенной функции $\varphi(x) = x^m$, то для параметра t будем иметь

$$t = 2\sigma(2m-1)/(m(4m-1))$$

Коэффициент A в (1.8) запишется в виде

$$A = m^3/(2m-1), \quad m > 1/2$$

Для коэффициента волнового сопротивления тонкого тела из (1.8) получим выражение

$$C_x \equiv \frac{D}{qS} = \frac{A}{\sigma_1} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^5(\rho - t\dot{\rho})}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\xi \quad (1.9)$$

$$\sigma_1 \equiv \frac{S}{L^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\xi \quad (1.10)$$

Здесь σ_1 — безразмерная площадь миделевого сечения.

2. Если величина σ_1 (1.10) задана, то вариационная задача для поперечного контура может быть сформулирована следующим образом. Среди функций $\rho(\xi)$, удовлетворяющих соотношению (1.10) и условию $\rho(0) = \rho(2\pi)$, найти такую, которая минимизирует интеграл сопротивления (1.9).

Эта изопериметрическая задача эквивалентна определению минимума функционала

$$I = \int_0^{2\pi} F(\rho, \dot{\rho}, \lambda) d\xi, \quad F(\rho, \dot{\rho}, \lambda) = \frac{\rho^5(\rho - t\dot{\rho})}{\rho^2 + \dot{\rho}^2} + \lambda\rho^2$$

где λ — неопределенный постоянный множитель Лагранжа.

Экстремали поставленной задачи должны удовлетворять уравнению Эйлера, допускающему первый интеграл

$$F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}} \equiv \rho^6 \frac{\rho^2 + 3\dot{\rho}^2}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^2} - 2\rho^5 \frac{t\dot{\rho}^3}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^2} + \lambda\rho^2 = C \quad (2.1)$$

где C — постоянная.

Отсюда прежде всего следует, что если $\rho(\xi)$ — решение (2.1), то и $\rho = \rho(\xi + \text{const})$ также является решением. Таким образом, поперечный контур оптимального тела может быть составлен из целого числа n одинаковых циклов, каждый из которых занимает угол $2\pi/n$. В то же время поперечный контур тела в отличие от случая, рассмотренного в [3], не обладает свойством симметрии при $\omega \neq 0$, так как в (2.1) $\dot{\rho}$ входит в нечетной степени. Условие Лежандра запишется в виде

$$F_{\dot{\rho}\dot{\rho}} \equiv -t \frac{\dot{\rho}}{\rho} \left(\frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - 3 \right) + 3 \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} - 1 \geq 0 \quad (2.2)$$

Заметим, что область допустимых значений величины $\dot{\rho}/\rho$ содержит точки $\dot{\rho}/\rho = -\infty$ и $\dot{\rho}/\rho = (1 + \sqrt{1+t^2})/t$ и не содержит точку $\dot{\rho}/\rho = +\infty$. Из (2.2) следует, что $\dot{\rho}$ не может равняться нулю, и, значит, экстремаль обязательно имеет точки разрыва производной и состоит из нескольких дуг, каждая из которых является решением уравнения (2.1).

Условие в угловых точках имеет вид

$$\Delta[C] \delta\xi + \Delta \left[\rho^5 \frac{t(\dot{\rho}^2 - \rho^2) - 2\dot{\rho}\rho}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^2} \right] \delta\rho = 0 \quad (2.3)$$

Если положение ξ угловой точки не фиксировано и значение ρ в угловой точке не задано, то условие (2.3) с учетом (2.1) удовлетворяется лишь при $\dot{\rho}_- = \pm\infty$, $\dot{\rho}_+ = \mp\infty$, где индексами «минус» и «плюс» обозначены величины до и после угловой точки. Однако решение $\dot{\rho} = +\infty$ не удовлетворяет условию Лежандра (2.2). Поэтому в угловой точке по крайней мере должно быть задано либо ξ , либо ρ .

Пусть одни угловые точки совпадают с концами интервалов длиной $2\pi/n$, составляющих циклы поперечного контура, другие — располагаются внутри циклов. Не уменьшая общности исследования, предположим, что величина ρ на границах циклов достигает наибольшего значения ρ_1 .

Рассмотрим два случая.

а) Положение угловых точек циклов фиксировано, т. е. количество циклов n поперечного контура задано, а значение ρ_1 не задано. Тогда в угловых точках должно выполняться условие $\Delta[F_{\dot{\rho}}] = 0$, которое дает два решения, удовлетворяющих условию Лежандра (2.2)

$$\dot{\rho}(0) = -\infty, \quad \frac{\dot{\rho}(2\pi/n)}{\rho_1} = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \quad (2.4)$$

Однако при этом вдоль левой дуги цикла, выходящей из точки $\xi=0$, и вдоль правой дуги цикла, входящей в точку $\xi=2\pi/n$, константа C в первом интеграле уравнения Эйлера (2.1) будет различна.

С использованием условий (2.4) первый интеграл для левой и правой дуг цикла соответственно запишется в виде

$$F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}} = \lambda\rho_1^2 \quad (2.5)$$

$$F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}} = \lambda\rho_1^2 - \frac{t^2\rho_1^4}{2(1 + \sqrt{1+t^2})} \quad (2.6)$$

Таким образом, в интервале $(0, 2\pi/n)$ имеет место точка сопряжения ξ_0 дуг экстремали, в которой должны выполняться условия в угловой точке (2.2), согласующиеся с допустимыми вариациями величин ξ_0 и ρ_0 . Если допустить, что ξ_0 — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(0, 2\pi/n)$, то с необходимостью приходим к условию $\Delta[C] = 0$, противоречащему (2.5) и (2.6). Если далее предположить, что ρ_0 во внутренней угловой точке цикла не задано и $\rho_0 < \rho_1$, то в ней должны выполняться условия (2.4). В соответствии с первым условием (2.4) из уравнения (2.5) найдем $\lambda\rho_0^2 = -\lambda\rho_1^2$ и, следовательно, $\lambda=0$. Второе условие (2.4) приведет к противоречию в (2.6): $\rho_0 = \rho_1$.

Следовательно, положение точки сопряжения дуг экстремали внутри цикла должно быть фиксировано, и значение функции $\rho(\xi_0)$ в ней задано: $\rho = \rho_0$.

Итак, в рассматриваемом случае (который будем называть «регулярным») — различные константы первого интеграла уравнения Эйлера вдоль дуг экстремали — решение может быть построено, если задано количество циклов n и параметры точки сопряжения дуг внутри цикла.

б) Заданы величины ρ_0 и ρ_1 , соответствующие значениям функции $\rho(\xi)$ во внутренних и внешних угловых точках циклов. Положение угловых точек не фиксировано. Тогда из условия $\Delta[C] = 0$ получим, что константа C первого интеграла (2.1) постоянна на всех дугах экстремали, а также краевые условия для левой и правой дуг цикла

$$\dot{\rho}(0)/\rho_1 = \dot{\rho}(\xi_0)/\rho_0 = -\infty \quad (2.7)$$

$$\dot{\rho}(\xi_0)/\rho_0 = \dot{\rho}(2\pi/n)/\rho_1 > 3/(2t) \quad (2.8)$$

В соответствии с условиями (2.7) из (2.1) получим $\lambda\rho_1^2 = C$ и $\lambda\rho_0^2 = C$, и так как $\rho_0 \neq \rho_1$, то $\lambda = C = 0$. Но тогда первый интеграл уравнения Эйлера (2.1) имеет два решения. Первое из них $\dot{\rho} = -\infty$, представляющее собой от-

резок луча $\xi = \text{const}$, является левой дугой экстремали с условием на концах (2.7), второе $-\dot{\rho}/\rho = \text{const}$ — решение уравнения

$$2t(\dot{\rho}/\rho)^3 - 3(\dot{\rho}/\rho)^2 - 1 = 0 \quad (2.9)$$

где $\dot{\rho}/\rho = a^2 > 3/(2t)$ дает левую дугу экстремали.

Таким образом, при заданных ρ_0 и ρ_1 можно построить поперечный контур, цикл которого состоит из двух дуг — прямой и кривой, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{\rho}/\rho = a^2 \quad (2.10)$$

Будем в дальнейшем называть это решение вариационной задачи «особым».

3. В соответствии со случаем а), рассмотренным в п. 2, цикл поперечного контура состоит из двух дуг, удовлетворяющих уравнениям

$$1 + 3(\dot{\rho}/\rho)^2 - 2t(\dot{\rho}/\rho)^3 = A_1 [1 + (\dot{\rho}/\rho)^2]^2 \quad (3.1)$$

$$1 + 3(\dot{\rho}/\rho)^2 - 2t(\dot{\rho}/\rho)^3 = A_1 \left[1 - \frac{t^2}{2(1 + \sqrt{1 + t^2})\alpha^2} \right] [1 + (\dot{\rho}/\rho)^2]^2 \quad (3.2)$$

$$A_1 = \beta(1 - \alpha)/\alpha^2, \quad \beta = \lambda/\rho_1^2, \quad \alpha = (\rho/\rho_1)^2$$

В общем случае найти решения уравнений (3.1) и (3.2) не представляется возможным. Однако если рассмотреть предельный случай $A_1 \ll 1$, то удастся для некоторых интервалов изменения параметра t построить аналитическое решение. Пренебрегая членами порядка A_1 по сравнению с единицей, из (3.1) и (3.2) соответственно получим

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = - \frac{t\alpha + \sqrt{t^2\alpha^2 + 3\beta(1 - \alpha)}}{\beta(1 - \alpha)} \alpha \quad (3.3)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{-t\alpha + \sqrt{t^2\alpha^2 + [3 + t^2/(2\alpha^2(1 + \sqrt{1 + t^2}))][\beta(1 - \alpha) - t^2/(2(1 + \sqrt{1 + t^2}))]}}{\beta(1 - \alpha) - t^2/(2(1 + \sqrt{1 + t^2}))} \alpha \quad (3.4)$$

Однако (3.4) является решением уравнения (3.2) с принятой точностью лишь для $t^2 \ll A_1$. При $t \geq 1$ не удастся найти приближенное решение уравнения четвертой степени (3.2) для правой дуги цикла, в то время как решение (3.3) уравнения (3.1) для левой дуги цикла остается справедливым с точностью до членов порядка A_1 по сравнению с единицей. Заметим, что для $t \ll A_1$ соотношения (3.3) и (3.4) дают симметричное решение [3].

Таким образом, с указанной точностью оптимальный поперечный контур тонкого тела в закрученном гиперзвуковом потоке будет состоять из несимметричных циклов лишь для $t > A_1$. При $t \ll \sqrt{A_1}$ уравнения (3.3) и (3.4) соответственно для левой и правой дуг цикла, упростив, удобно переписать в виде

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = - \frac{3\gamma\alpha}{t[\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} - \gamma\alpha]} \quad (3.5)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{3\gamma\alpha}{t(\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} - 3\gamma^2/4 + \gamma\alpha)}, \quad \gamma^2 = t^2/(3\beta) \quad (3.6)$$

Согласно (3.6), величина $\dot{\rho}/\rho$ существует для всех α из отрезка $[0, 1]$ при $0 \leq \gamma \leq 1$. Причем случай $\gamma = t = 0$ соответствует решению [3].

Учитывая соотношение для α (3.2), найдем уравнения левой и правой дуг экстремали в параметрической форме

$$\xi_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\alpha} \frac{d\alpha}{(\dot{\rho}/\rho)_{\pi\alpha}} = -\frac{t}{6} \int_1^{\alpha} \frac{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} - \gamma\alpha}{\alpha^2} d\alpha$$

$$\xi_2 = \frac{2\pi}{n} + \frac{t}{6} \int_1^{\alpha} \frac{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1 - 3\gamma^2/4} + \gamma\alpha}{\alpha^2} d\alpha$$

Здесь принято, что цикл заключен на отрезке $[0, 2\pi/n]$. После интегрирования получим следующие уравнения дуг цикла поперечного контура

$$\begin{aligned} \xi_1 = & t/6\gamma \{ \gamma \ln \alpha + (\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} - \gamma\alpha)/\alpha - \\ & - \gamma \ln [(2\gamma\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} + 2\gamma^2\alpha - 1)/(4\gamma^2 - 1)] - \\ & - 1/2 \ln [(2\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1} - \alpha + 2)/(\alpha(2\gamma + 1))] \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & 2\pi/n + t/6\gamma \left\{ \gamma \ln \alpha + \frac{3}{2} \gamma - (\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1 - 3\gamma^2/4} + \gamma\alpha)/\alpha + \right. \\ & + \gamma \ln [(2\gamma\sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1 - 3\gamma^2/4} + 2\gamma^2\alpha - 1)/(3\gamma^2 - 1)] + \frac{1}{2\sqrt{1 - 3\gamma^2/4}} \times \\ & \times \ln [(2\sqrt{1 - 3\gamma^2/4} \sqrt{\gamma^2\alpha^2 - \alpha + 1 - 3\gamma^2/4} - \\ & \left. - \alpha + 2(1 - 3\gamma^2/4))/(\alpha(\gamma\sqrt{1 - 3\gamma^2/4} - 1 + 2(1 - 3\gamma^2/4))) \right] \} \end{aligned} \quad (3.8)$$

При некотором $\alpha_1 = (\rho_0/\rho_1)^2$, соответствующем внутренней угловой точке ξ_0 цикла — точке сопряжения дуг (3.7) и (3.8), будет выполняться соотношение $\xi_{\pi}(\alpha_1) = \xi_{\pi p}(\alpha_1)$, из которого найдем

$$\pi/n = tB_1/(12\gamma) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & (a_1 + a_2)/\alpha_1 - 3\gamma/2 - \gamma b_1 - b_2/2 - b_3/(2a_3) \\ a_1 = & \sqrt{\gamma^2\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1}, \quad a_2 = \sqrt{\gamma^2\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 - 3\gamma^2/4}, \quad a_3 = \sqrt{1 - 3\gamma^2/4} \\ b_1 = & \ln \frac{(2\gamma a_1 + 2\gamma^2\alpha_1 - 1)(2\gamma a_2 + 2\gamma^2\alpha_1 - 1)}{(4\gamma^2 - 1)(3\gamma^2 - 1)} \\ b_2 = & \ln \frac{2a_1 - \alpha_1 + 2}{(2\gamma + 1)\alpha_1}, \quad b_3 = \ln \frac{2a_2 a_3 + 2a_3^2 - \alpha_1}{2a_3^2 + \gamma a_3 - 1} \end{aligned}$$

Введем параметр формы тела K

$$K \equiv \frac{\sigma_1}{\pi\rho_1^2} \equiv \left(\frac{\sigma_1}{\pi\rho_1^2} \right) / \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{\sigma_1}{\pi\rho_1^2} = \frac{1}{4} \int_1^{\alpha_1} \left[\frac{1}{(\dot{\rho}/\rho)_1} - \frac{1}{(\dot{\rho}/\rho)_2} \right] d\alpha = \frac{t}{12\gamma} B_2$$

$$B_2 = b_1/(2\gamma) + b_2 + a_3 b_3 - a_1 - a_2 - 3\gamma/2$$

В соответствии с выражениями (3.9) и (3.10) имеем

$$n = n(t, \gamma, \alpha_1), \quad K = K(\gamma, \alpha_1) \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что при заданных t и параметре формы K (либо K/α_1 , как это было в [3], что не изменит рассуждений) система (3.11) определяет параметры γ и α_1 лишь при известном количестве циклов n . Координата внутренней угловой точки ξ_0 — точки сопряжения дуг цикла — определится затем из (3.7) либо (3.8) по найденным γ и α_1 .

С использованием соотношений (1.9), (3.5) и (3.6) получим выражение для коэффициента сопротивления оптимального тела с регулярным поперечным контуром

$$C_x/(A/\sigma_1) = n\rho_1^4 t^3 B_3 / (54\gamma^3) \quad (3.12)$$

$$B_3 = (a_1^3 + a_2^3) / \alpha_1 - 3B_2/2 - 9\gamma^3/2$$

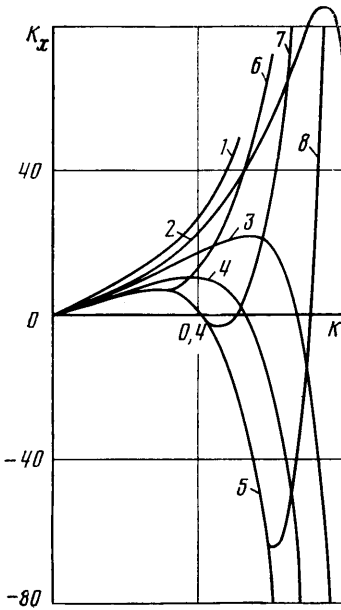
Для дальнейшего анализа удобно ввести коэффициент относительного сопротивления $K_x = n^2 C_x / C_{x0}$, где C_{x0} — коэффициент волнового сопротивления эквивалентного тела вращения с тем же продольным контуром

$$C_{x0} = 2A\sigma_1/\pi \quad (3.13)$$

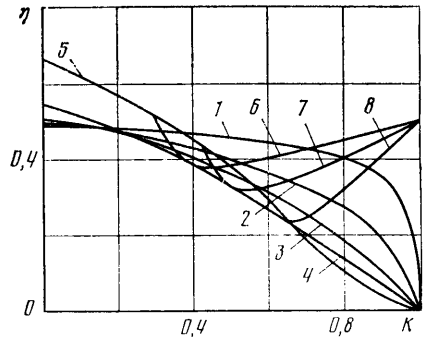
Используя соотношения (3.9), (3.10), (3.12) и (3.13), найдем

$$K_x = 16\pi^2 B_3 / (B_1 B_2^2) \quad (3.14)$$

На фиг. 2 приведено однопараметрическое семейство кривых $K_x(\gamma, K)$. Кривые 1—5 соответствуют значениям параметра $\gamma = 0; 0,3; 0,5; 0,7$ и 1, причем первая из них представляет собой симметричное решение [3] при $\omega = 0$. Кривые для значений $\gamma > 0$ располагаются ниже кривой $\gamma = 0$. На них нанесена сетка кривых $nt = \text{const}$ (кривые 6—8 соответствуют значениям параметра $nt = 5, 10$ и 20), облегчающая пользование зависимостью K_x от K при заданных n и t . Прежде всего обращает на себя внимание наличие области значений $K_x \leq 0$. При $nt = \text{const}$ путем уменьшения параметра формы тела K , т. е. уменьшая отношение $\rho_0/\rho_1 = \sqrt{\alpha_1}$ (при этом удлиняются «лепестки» поперечного сечения тела), представляется возможным перейти от тела, имеющего некоторое волновое сопротивление, к телу, обладающему тягой. Так, при $n = 15$ и $t = 2/3$ будем иметь $nt = 10$ (кривая 7 на фиг. 2). Если, например, $K \approx 0,60$, то волновое сопротивление оптимального тела будет составлять $\sim 10\%$ от волнового сопротивления эквивалентного тела вращения. Однако при переходе вдоль той же кривой $nt = 10$



Фиг. 2



Фиг. 3

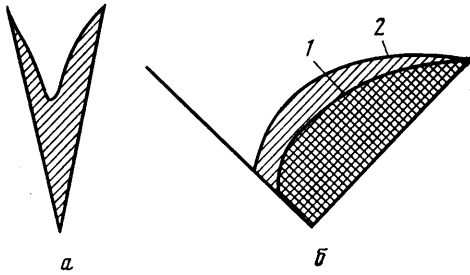
к параметру формы тела $K \approx 0,47$ новое оптимальное тело будет обладать тягой, составляющей $\sim 2\%$ от сопротивления эквивалентного тела вращения.

Как видно, при постоянных K и t увеличение количества циклов n , как и увеличение t при постоянном n , а также увеличение и того и другого параметра приведет к усилению «эффекта тяги». Наличие тяги указывает, что при некоторых значениях определяющих параметров на части поверхности тела под воздействием потока возникают силы, действующие в сторону, противоположную направлению его поступательной скорости.

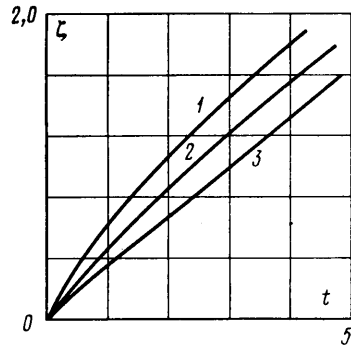
Анализ проекции нормального к поверхности тела вектора \mathbf{n} на ось x показывает, что в соответствующих случаях она отрицательна на лобовой и положительна на кормовой поверхности тела. Это подтверждает сказанное выше.

На фиг. 3 построены кривые, определяющие положение угловой точки ξ_0 сопряжения дуг экстремали в цикле поперечного контура $[0, 2\pi/n]$. Кривые 1—5 соответствуют значениям параметра $\gamma=0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ и 1; кривые 6—8 — значениям параметра $nt=5, 10$ и 20. Характер поведения величины $\eta=\xi_0/(2\pi/n)$ указывает, что асимметрия цикла поперечного контура возрастает с увеличением величины nt . При этом относительная величина центрального угла, стягиваемого левой дугой экстремали, уменьшается.

На фиг. 4, *a* изображен пример формы цикла поперечного контура оптимального тонкого тела для значений $t=2/3, n=15$ ($nt=10$), $K=0,51$. При этом волновое сопротивление тела равно нулю.



Фиг. 4



Фиг. 5

Если предположить, что количество циклов поперечного контура задано, то при $K \rightarrow 1$ наклон дуг экстремалей по модулю будет уменьшаться. В результате при некотором значении K условие Лежандра (2.2) не будет выполнено. Отсюда следует, что при значениях параметра формы K , близких к единице, вариационную задачу необходимо переформулировать, допуская возможность существования отрезков поперечного контура, вдоль которых $\rho=0$. Тогда цикл поперечного контура тела будет состоять из дуги (2.5), дуги окружности и дуги (2.6). Очевидно, что каждым значением параметров n и t будет соответствовать свое критическое значение параметра формы K , выше которого поперечный контур представляет собой комбинацию дуг окружности и дуг экстремалей (2.5), (2.6). При $K \rightarrow 1$ поперечный контур будет, как и в симметричном случае [3], вырождаться в окружность, а волновое сопротивление тела стремиться к волновому сопротивлению эквивалентного тела вращения.

Анализ условия в угловых точках (2.3) в этом случае доставляет значение параметра $\rho/\rho_0 = -t - \sqrt{t^2 + 1}$ для левой дуги в точке сопряжения ее с дугой окружности $\rho = \rho_0$. При этом координата ξ точки сопряжения правой дуги экстремали с дугой окружности должна быть задана, а фактически получена, как и при докритических значениях параметра K , в результате расчета.

С использованием (3.5) и (3.6) найдем выражение для d (1.8)

$$d = \frac{3\sigma\gamma}{t} \frac{B_4}{B_5} \quad (3.15)$$

$$B_4 = \frac{1-2\gamma^2\alpha_1}{2\gamma} (a_1+a_2) + \frac{1-4\gamma^2}{\gamma^2} b_1 + \frac{3}{4} \gamma^2 b_4 - \frac{3}{4} (1-2\gamma^2)$$

$$B_5 = (a_1^3 + a_2^3) / \alpha_1 - 3\gamma b_1 - \frac{3}{2} b_2 + \frac{3}{2} a_3 b_3 + \frac{9}{4} \gamma^3 b_4$$

$$b_4 = \ln \frac{\alpha_1 (2\gamma a_2 + 2\gamma^2 \alpha_1 - 1)}{(3\gamma^2 - 1)}$$

Для каждого σ из соотношения (3.15) совместно с соотношением $t(d)$, выписанным в п. 1, получим значения параметров d и t , соответствующие оптимальной форме тела. Расчет удобно проводить, задавая t и находя d и σ .

4. В соответствии со случаем б), рассмотренным в п. 2, цикл поперечного контура состоит из прямой $\xi = \text{const}$ (левая дуга) и кривой, удовлетворяющей уравнению (2.10) (правая дуга), проинтегрировав которое, получим форму правой дуги экстремали

$$\rho / \rho_1 = \exp [a^2 (\xi - 2\pi/n)] \quad (4.1)$$

При $\xi = 0$ из (4.1) найдем выражение для минимального радиуса поперечного контура

$$\rho_0 / \rho_1 = \exp (-u), \quad u = 2\pi a^2 / n$$

Из уравнения (2.9) получим

$$a^2 = [1 + (\sqrt{1+t^2} + t)^{2/3} + (\sqrt{1+t^2} - t)^{2/3}] / (2t) \quad (4.2)$$

При этом условие Лежандра (2.2) будет выполняться при всех значениях t . Параметр формы K (3.10) тела, поперечный контур которого на отрезке $[0, 2\pi/n]$ определяется соотношением (4.1), имеет вид

$$K = [1 - \exp (-2u)] / (2u)$$

Подставляя (4.1) в соотношение (1.9) и учитывая выражение для коэффициента волнового сопротивления эквивалентного тела вращения (3.13), найдем относительный коэффициент сопротивления

$$K_{x1} = \frac{C_x}{C_{x0}} = - \frac{a^2 t - 1}{1 + a^4} u \operatorname{cth} u \quad (4.3)$$

Найденное решение таково, что при заданных t и ρ_0 / ρ_1 (здесь ρ_0 и ρ_1 известны) количество циклов n поперечного контура определяется. Однако так как n должно быть целым положительным числом, большим единицы, то на значение параметра ρ_0 / ρ_1 накладываются соответствующие ограничения. Параметр формы тела K также не произволен, а определяется через n и t .

С учетом соотношения (4.2) из (4.3) следует, что относительный коэффициент сопротивления K_{x1} тел с формой поперечного контура (4.1) на отрезке $[0, 2\pi/n]$ во всей области существования решения отрицателен.

Таким образом, все тела, соответствующие особому решению, обладают тягой. На фиг. 5 приведена величина $\xi = |K_{x1}|$ для значений параметра $n = 3, 4$ и 6 (соответственно кривые 1—3).

Заметим, что при $t \rightarrow 0$ найденные тела переходят не в симметричное решение [3], как в случае регулярного поперечного контура, а вырождаются в пластинчатые тела с параметром $K = 0$.

Следует отметить, что области существования регулярного и особого решений не пересекаются.

На фиг. 4, б приведены примеры формы цикла особого поперечного контура для случая $n = 4$. Кривая 1 соответствует $t = 2, K = 0,3$ и $K_{x1} = -0,85$; кривая 2 — $t = 4, K = 0,42$ и $K_{x1} = -1,54$.

Обращает на себя внимание, что достигаемый выигрыш в тяге у тел с особым контуром значительно превосходит его у тел с регулярным контуром. При этом количество циклов у особого поперечного контура невелико. Следует заметить однако, что этот вывод может являться результатом предельного решения $t^2 \ll 1$ в регулярном случае.

Поскольку, как уже отмечалось выше, условие Лежандра в особом случае не нарушается при всех t , то здесь не будет решений, содержащих

дуги окружностей, что имело место в регулярном случае. Кроме того, при $K \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ и $\rho_0/\rho \rightarrow 1$.

Используя соотношение (4.1), найдем выражение для d (1.8)

$$d = \sigma a^2 \quad (4.4)$$

которое совместно с соотношением $t(d)$ (см. п. 1) даст при каждом σ значения d и t , соответствующие оптимальной форме тела в особом случае.

Заметим, что у тел рассматриваемой геометрии, движущихся в закрученном потоке, может иметь место момент относительно продольной оси, который вообще говоря необходимо каким-либо способом компенсировать. В связи с этим может представлять интерес задача отыскания тела минимального волнового сопротивления с заданным моментом сил относительно продольной оси. Однако поскольку с точностью до постоянного множителя, что легко установить, момент сил, действующих на тело, равен второму слагаемому в формуле сопротивления (1.7), то решение вариационной задачи для поперечного контура не изменится. В этом случае минимизируемый функционал I (п. 2) будет иметь тот же вид, лишь вместо параметра t в основной функции F следует писать $t_1 = t + \lambda_1$, где λ_1 — неопределенный постоянный множитель Лагранжа; λ_1 или, что то же, t_1 будет определяться по заданному значению момента относительно продольной оси тела в регулярном и особом случаях из соотношений:

$$M_x / (LqSC_{x0}) = \frac{1}{3} \frac{t_1}{\gamma\sigma} \frac{B_1 B_4}{B_2^2}, \quad M_x / (LqSC_{x0}) = \frac{a^2 t_1}{1+a^2} u \operatorname{cth} u \quad (4.5)$$

Следует иметь в виду, что в (4.5) входящие величины вычисляются по соответствующим формулам при замене t на t_1 . Так же вычисляется и параметр d ((3.15), (4.4)), определяющий продольный контур тела.

Особо отметим случай $M_x = 0$. Анализ первого соотношения (4.5) показывает, что указанный случай реализуется при $t_1 \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow 0$, когда поперечный контур состоит из симметричных циклов (см. (3.3) и (3.4)). Это же следует из нечетности подынтегральной функции по $\dot{\rho}(\xi)$ во втором сомножителе второго слагаемого формулы (1.7). Из (3.15) найдем, что $d = 0$ и, следовательно, продольный контур тела описывается степенной функцией $x^{3/4}$. В особом случае при $t_1 \rightarrow 0$ тело вырождается ($K = 0$).

Таким образом, тонкое тело минимального волнового сопротивления с нулевым моментом относительно продольной оси в закрученном потоке будет иметь поперечный контур с симметричными циклами, описываемыми решением [3]. Его сопротивление, отнесенное к сопротивлению эквивалентного тела вращения с тем же продольным контуром, K_x (3.14) описывается кривой I на фиг. 2 ($\gamma = 0$), т. е. совпадает с величиной сопротивления оптимального тела в незакрученном потоке [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ferry A., Ness N., Kaplita T. T. Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry. — J. Aeronaut. Sci., 1953, v. 20, № 8, p. 513–524.
2. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 2, с. 376–378.
3. Гонор А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 185–189.
4. Гонор А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 974–976.
5. Гонор А. Л., Казаков М. Н., Швец А. И. Измерение сопротивления тела звездообразной формы в сверхзвуковом потоке при числах $M \approx 6$ и 8. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1, с. 94–97.
6. Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик звездообразных тел при сверхзвуковых скоростях. — В кн.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 28–39.
7. Ведерников Ю. А., Гонор А. Л., Зубин М. А., Остапенко Н. А. Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах $M = 3 \div 5$. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 88–93.

Москва
Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
4.VIII.1981