МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1982

УДК 532.58

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ БЫСТРОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРОВ И ШАРОВ

ГОРОДЦОВ В. А., ТЕОДОРОВИЧ Э. В.

Моделируя шар и цилиндр источниками массы, распределенными по их поверхности, получены формулы для волнового сопротивления таких источников, горизонтально движущихся в экспоненциально стратифицированной жидкости. Показано, что при этом в отличие от моделирования таких же тел точечным диполем, не возникает парадокс бесконечного волнового сопротивления. Обсуждаются различные варианты метода эквивалентных источников.

1. Введение. При анализе излучения внутренних волн движущимися телами трудности точного решения задачи обтекания часто обходят с помощью приближенного моделирования тел совокупностью источников и стоков массы, массовых диполей [1–6]. Заимствуя дипольные распределения из теории однородной идеальной жидкости[1], обычно полагают, что соответствующие расчеты приведут к удовлетворительным результатам и в случае слабо стратифицированных жидкостей (при больших скоростях движения тел).

Привлекательность такого подхода заключается в его универсальности, в единообразном рассмотрении жидкостей с различными стратификациями. С другой стороны, как показано на примере жидкости с экспоненциальной стратификацией [7–9], для излучения некоторых простых источников свойственны парадоксальные (с точки зрения моделирования тел) черты. Так, потери энергии (волновое сопротивление) в трехмерной задаче при горизонтальном движении линейного распределения источников, в частности точечного источника и горизонтального диполя, оказываются бесконечно большими. Давление и другие характеристики возмущений на оси их следов также сингулярны.

Освободиться от этих парадоксов можно лишь при учете нелокальностей других типов. Достаточно простыми и удобными для моделирования являются нелокальные распределения источников по поверхности тел. В гидродинамике взаимодействие твердых тел с жидкостью происходит через их общую поверхность и вследствие этого задача отыскания модельных поверхностных распределений может быть сформулирована в замкнутом виде. Характеристики течений вокруг источников определяются по ним с помощью функции Грина, и при известной последней граничное условие обтекания тела приводит к граничному интегральному уравнению для функции поверхностного распределения источников.

В общем случае различных стратификаций и тел удобным представляется путь численного решения граничных интегральных уравнений [10]. Однако в данной работе внимание уделяется универсальному аналитическому методу описания полей внутренних волн по приближенным поверхностным распределениям источников, которые становятся точными решениями интегральных уравнений и точными моделями тел в однородной

[1] Они могут быть точными или приближенными, как в теории тонких и вытянутых тел.

жидкости. В дальнейшем на примерах движения цилиндра и шара в экспоненциально стратифицированной жидкости показано, что их волновое сопротивление при таком описании действительно конечно. Это позволяет поставить вопрос о регуляризации вышеупомянутого моделирования тел «объемными» диполями.

2. Граничное интегральное уравнение (ГИУ). В экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска поля малых возмущений скорости и давления $\mathbf{v}$, p, вызванные массовым источником плотности m, определяются соотношениями [9]

$$\mathbf{v}=\mathbf{l}\Phi,\qquad p=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\int d^n r'\,dt'\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,m(\mathbf{r}',t') \tag{2.1}$$

$$\mathbf{l}\nabla G(\mathbf{r},t)=\delta(\mathbf{r})\,\delta(t),\qquad \mathbf{l}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla+N^2\nabla_h$$

Здесь $G(\mathbf{r},\ t)$ — запаздывающая функция Грина, n — размерность пространства. Отметим также, что в однородной несжимаемой жидкости $\mathbf{l}=\nabla$.

Для равномерно движущегося источника $m(\mathbf{r},\ t)=f(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t)$ и поля гидродинамических возмущений стационарны в системе координат, движущейся вместе с источником,

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\int d^n r'\,f(\mathbf{r}')\,g(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'),\qquad \mathbf{r}_1\equiv\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t$$

$$g(\mathbf{r})=\int dt'\,G(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t',-t') \tag{2.2}$$

В частном случае источников, распределенных по поверхности равномерно движущегося тела S с плотностью $\sigma(\mathbf{r}_1)$ $(f(\mathbf{r}_1)=\sigma(\mathbf{r}_1)\,|\nabla S|\,\delta(S(\mathbf{r}_1)))$ граничное условие обтекания тела, которое в приближении идеальной жидкости заключается в равенстве нормальных компонент скорости движения тела и жидкости вблизи него, сводится к граничному интегральному уравнению для $\sigma(\mathbf{r}_1)$:

$$\mathbf{n}_1\mathbf{v}_0=\mathbf{n}_1\mathbf{l}\int\limits_S dS'\,\sigma(\mathbf{r}')\,g(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}') \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{n}_1$ — вектор внешней нормали к поверхности тела, $\mathbf{r}_1$ соответствует координатам точки, расположенной на внешней стороне поверхности движущегося тела.

Выделив сингулярный вклад, обязанный случаю совпадения координат точек, по которым выполняются интегрирования и дифференцирования в формуле (2.3), интегральное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{n}_1\mathbf{v}_0=\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{r}_1)+\fint dS'\,\sigma(\mathbf{r}')\,\mathbf{n}_1\mathbf{l}g(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}') \tag{2.4}$$

Здесь перечеркнутый интеграл следует понимать в смысле главного значения.

3. Цилиндр и шар в однородной жидкости. Для тел с цилиндрической и сферической симметрией эквивалентные (по условиям внешнего обтекания однородной идеальной жидкостью) поверхностные распределения источников имеют простой вид [11]. Продемонстрируем здесь, как они получаются из соответствующих ГИУ.

В плоской задаче для функции Грина имеем

$$G(\mathbf{r},\ t)=g(\mathbf{r})\delta(t),\quad g(\mathbf{r})=(2\pi)^{-1}\ln r$$
$$g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-g(\mathbf{r})=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{r}\right)^{m}e^{im(\varphi-\varphi')},\qquad r>r' \tag{3.1}$$

Здесь углы φ и φ' отвечают направлениям двумерных векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, $r\equiv|\mathbf{r}|$.

Для тела в форме кругового цилиндра угловая зависимость распределения источников отделяется от радиальной ($m(\mathbf{r},\ t)=\sigma(\varphi)\delta(|\mathbf{r}_1|-r_0)$) и с учетом (3.1) ГИУ (2.3) при $\mathbf{l}=\mathbf{V}$ сводится к соотношениям

$$v_0\cos\varphi=\operatorname{Re}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_m e^{im\varphi},\qquad \sigma_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\,\sigma(\varphi')e^{-im\varphi'}$$

из которых следует $\sigma_m=v_0\delta_{m1}$.

Таким образом, в однородной идеальной жидкости движущемуся круговому цилиндру эквивалентно поверхностное распределение источников массы

$$m(\mathbf{r},\ t)=2r_1^{-1}(\mathbf{r}_1\mathbf{v}_0)\delta(|\mathbf{r}_1|-r_0) \tag{3.2}$$

коэффициенты Фурье которого выражаются через функцию Бесселя

$$m(\mathbf{k},\ \omega)=2\pi\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)f(\mathbf{k}),\quad f(\mathbf{k})=-4\pi ir_0k^{-1}(\mathbf{k}\mathbf{v}_0)J_1(kr_0) \tag{3.3}$$

Аналогично в пространственном случае для функции Грина однородной жидкости, пользуясь сферическими функциями $Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\equiv Y_{lm}(\mathbf{r}/r)$, имеем

$$G(\mathbf{r},\ t)=g(\mathbf{r})\delta(t),\quad g(r)=-(4\pi r)^{-1}$$
$$g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=-\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l}Y_{lm}^{*}\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right)Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),\qquad r>r' \tag{3.4}$$

и для поверхностного распределения источников, эквивалентного шару, $m(\mathbf{r},\ t)=\sigma(\mathbf{r}_1/r_1)\delta(|\mathbf{r}_1|-r_0)$, ГИУ примет вид

$$v_0\cos\varphi\sin\theta=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{l+1}{2l+1}\sigma_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$\sigma_{lm}=\int_{|\mathbf{r}'|=r_0}dS'\frac{1}{r'^2}\sigma\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right)Y_{lm}^{*}\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right)$$

Отсюда следует $\sigma(\theta,\ \varphi)={}^3/_2v_0\cos\varphi\sin\theta$, и, таким образом, для шара эквивалентным поверхностным распределением источников и его преобразованием Фурье будет

$$m(\mathbf{r},\ t)={}^3/_2r_1^{-1}(\mathbf{r}_1\mathbf{v}_0)\delta(|\mathbf{r}_1|-r_0),\quad m(\mathbf{k},\ \omega)=2\pi\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)f(\mathbf{k}) \tag{3.5}$$
$$f(\mathbf{k})=-6\pi i\frac{r_0^2}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2kr_0}}J_{3/2}(kr_0)\mathbf{k}\mathbf{v}_0$$

Отметим, что в то время как в плоской задаче для распределения (3.2) интегральный член в ГИУ (2.4) исчезает, для пространственного распределения (3.5) интегральный член в (2.4) составляет третью часть от величины первого слагаемого.

4. Волновое сопротивление. Для равномерно прямолинейно движущегося источника $\dot{m}(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t)$ коэффициенты Фурье пропорциональны δ-функции, и потери энергии на единицу пути (волновое сопротивление) в экспоненциально стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска описываются общей формулой [9, 12]

$$2v_0R_n=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int d^nk\,d\omega|\omega|(N^2-\omega^2)|f(\mathbf{k})|^2\delta(\omega^2\mathbf{k}^2-N^2\mathbf{k}_h^2)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0) \tag{4.1}$$

Благодаря двум δ-функциям несложно выполнить два интегрирования, и для случая горизонтального движения получим

$$R_2=\frac{1}{4\pi v_0}\int_0^N d\omega\frac{\sqrt{N^2-\omega^2}}{\omega}\sum_{i=1}^{2}|f(\mathbf{k}_i)|^2$$

$$\mathbf{k}_iv_0=(\omega,\ \pm\sqrt{N^2-\omega^2}) \tag{4.2}$$

$$R_3=\frac{1}{8\pi^2v_0}\int_0^N d\omega\int_{N/v_0}^{\infty}dk\sqrt{\frac{N^2-\omega^2}{k^2v_0^2-N^2}}\sum_{i=1}^{4}|f(\mathbf{k}_i)|^2$$

$$\mathbf{k}_1v_0=(\omega,\ \omega\sqrt{k^2v_0^2-N^2},\quad kv_0N^{-1}\sqrt{N^2-\omega^2}) \tag{4.3}$$

Волновые векторы $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_4$ в выражении (4.3) отличаются от $\mathbf{k}_1$ знаком одной из компонент.

Если использовать (3.2), (3.3) в качестве приближенного модельного распределения источников для цилиндра в стратифицированной жидкости, то после подстановки его в формулу (4.2) получим достаточно простую формулу для волнового сопротивления цилиндра

$$R_2=8/3\pi r_0^3N^2FJ_1^2(F^{-1}),\qquad F\equiv v_0(Nr_0)^{-1} \tag{4.4}$$

Если же цилиндр моделировать горизонтальным дублетом[2] $m(\mathbf{r},t)=-2\pi r_0^2v_0\delta'(x-v_0t)\delta(z)$, то для волнового сопротивления получается

$$R_2=2/3\pi r_0^3N^2F^{-1} \tag{4.5}$$

При больших числах Фруда F, когда только и можно рассчитывать на удовлетворительность моделирования, формулы (4.4) и (4.5) дают близкие результаты (если ограничиться первым членом разложения функции Бесселя в ряд, то они совпадут). При малых величинах F только формула (4.4) предсказывает малые значения сопротивления.

В трехмерной задаче одним из «парадоксов» дипольного приближения является бесконечность волнового сопротивления шара при моделировании его горизонтальным дублетом [9]. Это можно видеть из расходимости интеграла по волновым числам в формуле (4.3) в этом случае.

В то же время модельное распределение (3.5) после подстановки в (4.3) приводит к конечному результату

$$R_3=\left(\frac{3\pi r_0^2N}{4}\right)^2F\int_1^{\infty}dx\frac{J_{3/2}(x/F)}{x^3\sqrt{x^2-1}} \tag{4.6}$$

который при больших числах Фруда принимает асимптотически упрощенный вид (C — постоянная Эйлера)

$$R_3\approx{}^1/_8\pi r_0^4N^2F^{-2}(\ln F+{}^{21}/_{12}-C),\qquad F\gg1 \tag{4.7}$$

Нетрудно убедиться, что для распределения (3.5) и давление на оси следа остается конечным.

[2] В однородной жидкости как это распределение, так и распределение (3.2) приводят к одинаковому течению вне цилиндра.

5. Асимптотика больших скоростей. Покажем, что асимптотики вида (4.5), (4.7) при больших числах Фруда справедливы для целых классов распределений источников.

Перепишем общую формулу для потерь энергии (4.1) в другом удобном виде

$$v_0 R_n = \int d^n r\, d^n r' f(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}') w_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$w_n(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{(2\pi)^n} \int d^n k\, d\omega |\omega| (N^2-\omega^2) \delta(\omega^2 \mathbf{k}^2 - N^2 \mathbf{k}_h^2) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tag{5.1}$$

Для горизонтально движущихся источников после выполнения интегрирований по волновым векторам в выражении для $w_n(\mathbf{r})$ получаются следующие представления в виде однократных интегралов от цилиндрических и тригонометрических функций:

$$\frac{dw_2}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi v_0} \int_{-N}^{N} d\omega \sqrt{N^2-\omega^2} \sin\left(\frac{|\omega| x}{v_0}\right) \cos\left(\frac{z\sqrt{N^2-\omega^2}}{v_0}\right) \tag{5.2}$$

$$w_3 = \frac{1}{4\pi^2 v_0} \int_{-N}^{N} d\omega \sqrt{N^2-\omega^2} \cos\left(\frac{\omega x}{v_0}\right) \left\{ K_0(\sqrt{\xi})\theta(\xi) - \frac{\pi}{2} N_0(\sqrt{-\xi})\theta(-\xi) \right\} \tag{5.3}$$

$$v_0^2 \xi \equiv \omega^2 y^2 - (N^2-\omega^2) z^2$$

Для всех обсуждавшихся в предыдущих пунктах распределений имеет место свойство $f(-x, \mathbf{r}_\perp) = -f(x, \mathbf{r}_\perp)$ и из низших интегральных моментов отличен от нуля лишь дипольный момент $d_n = 2\pi r_0^n v_0$

$$\int dx f(\mathbf{r}) = \int d^n r f(\mathbf{r}) = 0, \quad d_n = \int d^n r f(\mathbf{r}) x \tag{5.4}$$

Удерживая низшие члены разложения тригонометрических и цилиндрических функций по обратным степеням скорости, при больших скоростях движения для подобных распределений получим

$$R_2 = \frac{d_2^2 N^3}{6\pi v_0^3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{v_0^2}\right) \right\}, \quad R_3 = \frac{d_3^2 N^4}{32\pi v_0^4} \{\ln v_0 + O(1)\} \tag{5.5}$$

Выписанный член разложения R_2 в (5.5) совпадает с результатом (4.5) для дублета в плоской задаче. В трехмерной задаче имеет место согласие между R_3 (5.5) и (4.7), в то время как для дублета R_3 бесконечно велико.

6. Регуляризация дипольного приближения. Причина обращения в бесконечность волнового сопротивления горизонтально движущегося дублета в трехмерной задаче, как можно видеть из (4.3) и (5.1), (5.3) (подробнее см. в [9]), связана с большими вкладами в интеграл потерь энергии очень коротких внутренних волн. При моделировании тел следует учитывать, что эти вклады уменьшаются из-за конечности объема тела. В частности, при использовании дипольного приближения при моделировании тел следует предусмотреть процедуру регуляризации, обрезающую вклад коротких волн (волн с большими волновыми числами). При этом из-за слабого логарифмического характера расходимости интеграла волнового сопротивления дублета можно ожидать, что регуляризованный ответ будет слабо зависеть от конкретного вида регуляризации.

При простейшей регуляризации, заключающейся во введении некоторого конечного верхнего предела в интеграле по волновым числам, формула для волнового сопротивления (4.3) преобразуется к виду

$$R_в \approx \frac{1}{8\pi^2 v_0} \int_0^N d\omega \int_{N/v_0}^{k_m} dk \sqrt{\frac{N^2-\omega^2}{k^2 v_0^2 - N^2}} \sum_{i=1}^{4} |f(\mathbf{k}_i)|^2 \qquad (6.1)$$

В частном случае горизонтального дублета, моделирующего шар радиуса r_0, $f(\mathbf{r}) = -2\pi r_0^3 v_0 \delta'(x)\delta(y)\delta(z)$, имеем $|f(\mathbf{k})|^2 = (2\pi\omega r_0^3)^2$ и после интегрирования получаем

$$R_в \approx \frac{\pi}{8}\frac{r_0^6 N^4}{v_0^2} \ln\left\{\frac{k_m v_0}{N}\left(1+\sqrt{1-\frac{N^2}{k_m^2 v_0^2}}\right)\right\} \qquad (6.2)$$

Поскольку для шара имеется один характерный масштаб длины, то $k_m = \alpha/r_0$ с числовым коэффициентом α порядка единицы и при больших числах Фруда ($v_0 \gg N r_0$) формула (6.2) примет вид

$$R_в \approx {}^1/_8 \pi r_0^4 N^2 F^{-2} \ln(2\alpha F), \quad F \gg 1$$

Последняя формула лишь числовым множителем под знаком логарифма отличается от формулы (4.7) и подобна общей формуле (5.6).

Таким образом, процедура с обрезанием интегралов по волновым числам на верхнем пределе позволяет проводить вычисления волнового сопротивления при больших числах Фруда с логарифмической точностью.

7. Влияние режима обтекания на волновые потери. Обсуждавшиеся выше расчеты волновых потерь на основе замены движущихся тел поверхностными и объемными распределениями массы носят неполный характер. Прежде всего это связано с использованием приближения идеальной жидкости. Если оставаться в рамках такого приближения, то для улучшения описания необходимо дополнительное моделирование целого ряда особенностей реального обтекания. К ним относятся ламинарные и турбулентные пограничные слои, турбулентно-вихревые следы, отрыв потока, эффекты «блокировки» и «коллапса» и т. п.

Поэтому, вообще говоря, для моделирования тел в форме кругового цилиндра или шара требуются распределения источников, отличающиеся от рассмотренных выше. Тело вместе с пограничным слоем и следом с точки зрения порождения волн можно считать за некоторое фиктивное тело другой формы. Попытки учета влияния «утолщения тела за счет пограничного слоя» на порождение поверхностных волн делались неоднократно, начиная с работы [13]. «Увеличение длины тела из-за спутного следа» обсуждалось в [14]. Нетрудно перенести это и на внутренние волны.

Для того чтобы моделирование вязкого воздействия тел на жидкость с образованием пограничного слоя и следа стало более полным, необходимо использовать наряду с источниками массы вихреисточники или силовые источники [15]. Турбулентное перемешивание неоднородной жидкости, вызванное движущимся телом, в рамках известного лайтхилловского подхода к описанию излучения линейных волн турбулентным потоком может моделироваться силовым источником $\mathbf{F} = -\rho_0(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и дополнительным источником массы $q = -(\mathbf{v}\nabla)\rho$ в уравнении $\partial\rho/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\rho_0 = q$.

Вопрос о волновом сопротивлении при совместном учете силовых ($\mathbf{F}$) и массовых (f, q) источников решается аналогично тому, как и для одних массовых. Вместо формулы (4.1) получим

$$R_n = \frac{\pi}{(2\pi)^n v_0} \int d^n k\, d\omega\, |\omega|\, (N^2-\omega^2)\, |M|^2 \delta(\omega^2 \mathbf{k}^2 - N^2 \mathbf{k}_h^2)\, \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)$$

$$M = f(\mathbf{k}) - i\frac{g k_z}{N^2-\omega^2} q(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\omega|}\mathbf{F}(k) - \frac{k^2}{|\omega| k_z} F_z(\mathbf{k})$$

Из этой общей формулы, в частности, следует утверждение об эквивалентности массового источника f и продольного силового источника $\mathbf{F}=(v_0f, 0, 0)$ [7].

Более трудным является подбор подходящих модельных распределений источников в различных реальных ситуациях. Здесь уже использование ГИУ не решает полностью задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu T. Y., Mei C. C.* Two-dimensional gravity waves in a stratified ocean.– Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 3, p. 482–486.
2. *Miles J. W.* Internal waves generated by a horizontally moving source.– Geophys. Fluid Dyn., 1971, v. 2, № 1, p. 63–87.
3. *Стурова И. В.* Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.– ПМФТ, 1974, № 6, с. 80–91.
4. *Rehm R. G., Radt H. S.* Internal waves generated by a translating oscillating body.– J. Fluid Mech., 1975, v. 68, № 2, p. 235–258.
5. *Стурова И. В. Сухарев В. А.* Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4, с. 148–152.
6. *Олейник А. Я., Стеценко А. Г., Никишов В. И.* Внутренние волны, вызванные системой источников и стоков в потоке слабо стратифицированной жидкости.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 1, с. 36–40.
7. *Докучаев В. П., Долина И. С.* Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости.– Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 6, с. 655–663.
8. *Липовский В. Д.* Черенковское излучение акустико-гравитационных волн горизонтально движущимися источниками.– Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 2, с. 159–168.
9. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников.– Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 9, с. 954–961.
10. Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978. 210 с. (Механика. Новое в заруб. науке, № 15)
11. *Костюков А. А.* Взаимодействие тел, движущихся в жидкости. Л.: Судостроение, 1972. 310 с.
12. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимися сингулярными источниками.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 77–83.
13. *Лаврентьев В. М.* Влияние пограничного слоя на волновое сопротивление корабля.– Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 6, с. 857–860.
14. *Havelock T. H.* Wave resistance: Some cases of unsymmetrical forms.– Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1926, v. 110, № 754, p. 233–241.
15. *Докучаев В. П.* К линейной теории обтекания тел. Метод силовых источников.– ПММ, 1966, т. 30, № 6, с. 1006–1014.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1981