

УДК 532.546

## О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ РАСТВОРОМ ДВУХ ПРИМЕСЕЙ (АКТИВНОЙ И ПАССИВНОЙ)

ЕНТОВ В. М., ЗАЗОВСКИЙ А. Ф.

Рассматривается фронтальное вытеснение нефти из однородной пористой среды раствором активной примеси при наличии в потоке компонента (называемого далее пассивной примесью), который не влияет непосредственно на отношение подвижностей воды и нефти, но взаимодействует с активной примесью, изменяя сорбируемость последней и (или) распределение ее между фазами [1]. Подобная ситуация возникает при вытеснении нефти растворами ПАВ и других реагентов, эффективность применения которых существенно снижается из-за их сорбции пористой средой (если только само сорбируемое вещество не снижает подвижности воды, как в случае полимера [2]). В этих условиях может оказаться целесообразным добавление в раствор ПАВ некоторого дешевого балластного вещества, не изменяющего отношения подвижностей фаз, но способного «отнимать» у ПАВ часть адсорбционных центров на поверхности пористого скелета. Другим примером пассивной примеси являются растворенные в воде соли, влияющие на распределение активной примеси между водой и нефтью, как это имеет место при вытеснении карбонизированной водой, ввиду зависимости растворимости углекислого газа в воде от ее минерализации [3].

Ниже исследована структура фронта вытеснения и развита техника построения автомодельного решения в том случае, когда сорбируемость пассивной примеси и ее распределение между фазами не зависят от содержания активной примеси.

1. Рассмотрим в крупномасштабном приближении [1] одномерный процесс вытеснения нефти раствором двух примесей, активной и пассивной, считая содержание примесей в фазах малым. В предположении о постоянстве суммарной скорости  $U$  уравнения сохранения в потоке воды и примесей могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{U}{m} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [cs + \varphi(1-s) + a] + \frac{U}{m} \frac{\partial}{\partial x} [cF + \varphi(1-F)] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [\gamma s + \psi(1-s) + b] + \frac{U}{m} \frac{\partial}{\partial x} [\gamma F + \psi(1-F)] = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $m$  — пористость,  $s$  — водонасыщенность,  $c$ ,  $\gamma$  и  $\varphi(c, \gamma)$ ,  $\psi(c, \gamma)$  — массовые концентрации активной и пассивной примесей соответственно в воде и в нефти,  $ma(c, \gamma)$  и  $mb(c, \gamma)$  — количества активной и пассивной примесей, сорбированных в единице объема пористой среды,  $F(s, c, \gamma)$  — обобщенная функция Баклея — Леверетта, равная доле воды в потоке,  $t$  — время,  $x$  — координата.

В соответствии с определением пассивной примеси имеем

$$F_{\gamma}' = \frac{\partial}{\partial \gamma} F(s, 0, \gamma) = 0 \quad (1.2)$$

Потребуем дополнительно, чтобы производные функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $F$  удовлетворяли неравенствам

$$\varphi_c' \geq 0, \quad \psi_{\gamma}' \geq 0, \quad a_c' \geq 0, \quad b_{\gamma}' \geq 0, \quad F_c' \leq 0 \quad (1.3)$$

означающим, что содержание каждой из примесей в нефти и в сорбированном состоянии возрастает с увеличением ее концентрации в воде и активная примесь увеличивает долю нефти в потоке, т. е. улучшает условия вытеснения.

Будем искать решение системы (1.1) при начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} s(0, x) &= s_0; & c(0, x) &= 0; & \gamma(0, x) &= \gamma_0; \\ s(t, 0) &= s^\circ; & c(t, 0) &= c^\circ; & \gamma(t, 0) &= \gamma^\circ \end{aligned} \quad (1.4)$$

Задача (1.1) — (1.4) имеет автомодельное решение

$$\begin{aligned} s &= s(\xi), & c &= c(\xi), & \gamma &= \gamma(\xi), & \xi &= mx/Ut \\ \xi \frac{ds}{d\xi} &= \frac{dF}{d\xi}, & \xi \frac{d}{d\xi} [cs + \varphi(1-s) + a] &= \frac{d}{d\xi} [cF + \varphi(1-F)] \\ \xi \frac{d}{d\xi} [\gamma s + \psi(1-s) + b] &= \frac{d}{d\xi} [\gamma F + \psi(1-F)] \\ s(0) &= s^\circ, & c(0) &= c^\circ, & \gamma(0) &= \gamma^\circ, & s(\infty) &= s_0, \\ c(\infty) &= 0, & \gamma(\infty) &= \gamma_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

На участках непрерывного изменения  $s$ ,  $c$  и  $\gamma$  система (1.5) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} (\xi - F_s') ds/d\xi - F_c' dc/d\xi - F_\gamma' d\gamma/d\xi &= 0 \\ (\xi L - K) dc/d\xi + (\xi P - Q) d\gamma/d\xi &= 0 \\ (\xi R - T) dc/d\xi + (\xi N - M) d\gamma/d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} K(s, c, \gamma) &= F + (1-F)\varphi_c'; & L(s, c, \gamma) &= s + (1-s)\varphi_c' + a_c' \\ M(s, c, \gamma) &= F + (1-F)\psi_\gamma'; & N(s, c, \gamma) &= s + (1-s)\psi_\gamma' + b_\gamma' \\ P(s, c, \gamma) &= (1-s)\varphi_\gamma' + a_\gamma'; & Q(s, c, \gamma) &= (1-F)\varphi_\gamma' \\ R(s, c, \gamma) &= (1-s)\psi_c' + b_c'; & T(s, c, \gamma) &= (1-F)\psi_c' \end{aligned} \quad (1.8)$$

и имеет нетривиальное решение, когда автомодельная переменная равна одной из безразмерных характеристических скоростей исходной системы (1.1) [4]:

$$\xi_1 = F_s'; \quad \xi_{2,3} = \frac{1}{2} [A \pm (A^2 - 4B)^{1/2}] \quad (1.9)$$

$$A = (KN + LM - PT - RQ) / (LN - PR); \quad B = (KM - QT) / (LN - PR)$$

Из (1.7) следует, что на участках  $\xi = \xi_1$ , которые далее называются  $s$ -волнами,  $c = \text{const}$  и  $\gamma = \text{const}$ .

Участки, на которых  $\xi = \xi_{2,3}$ , далее называются  $c, \gamma$ -волнами; переменные  $s, c, \gamma$  связаны на них соотношениями

$$\frac{ds}{d\gamma} = (F_\gamma' + ZF_c') (\xi_{2,3} - \xi_1)^{-1}, \quad \frac{dc}{d\gamma} = Z = - \frac{P\xi_{2,3} - Q}{L\xi_{2,3} - K} \quad (1.10)$$

Далее будем рассматривать лишь случай, когда активная примесь не влияет на сорбцию и распределение между фазами пассивной примеси:  $\psi_c' = b_c' = 0$ , так что  $R = T = 0$ . При этом два связанных между собой семейства характеристик системы (1.1) становятся независимыми, характеристические скорости даются выражениями

$$\xi_2 = \frac{K}{L} = \frac{F - \varphi_c' / (\varphi_c' - 1)}{s - (\varphi_c' + a_c') / (\varphi_c' - 1)}, \quad \xi_3 = \frac{M}{N} = \frac{F - \psi_T' / (\psi_T' - 1)}{s - (\psi_T' + b_T') / (\psi_T' - 1)} \quad (1.11)$$

а уравнения (1.10) принимают вид

$$\begin{aligned} ds/dc &= F_c' / (\xi_2 - \xi_1), & d\gamma/dc &= 0 \quad (\xi = \xi_2) \\ ds/d\gamma &= (F_T' + ZF_c') / (\xi_3 - \xi_1) \\ dc/d\gamma &= Z = -(MP - NQ) / (ML - NK) \quad (\xi = \xi_3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

т. е. наряду с существованием  $s$ ,  $\gamma$ -волн ( $\xi = \xi_3$ ) возможно существование  $c$ -волн ( $\xi = \xi_2$ ) — участков непрерывного изменения  $s$  и  $c$  при  $\gamma = \text{const}$ .

Можно убедиться, что при выполнении неравенств  $(\gamma^0 - \gamma_0) \psi_{TT}'' \leq 0$ ,  $(\gamma^0 - \gamma_0) b_{TT}'' \leq 0$ ,  $a_{cc}'' \leq 0$ ,  $\varphi_{cc}'' \leq 0$  решение не содержит участков непрерывного изменения  $s$  и  $\gamma$ , а содержит лишь участки постоянства соответствующих величин. Действительно, при  $\xi = \xi_2 = K/L$  из (1.11) имеем

$$ds/d\xi = L \{ [1 - F - \xi_2(1-s)] \varphi_{cc}'' - \xi_2 a_{cc}'' \}^{-1}$$

В силу первого уравнения (1.5) и требования однозначности решения на участках убывания водонасыщенности  $d^2F/ds^2 = d\xi/ds < 0$ , и потому  $1 - F - \xi_2(1-s) < 0$ . Так как  $L > 0$ ,  $\xi_2 > 0$ , то при  $a_{cc}'' \leq 0$  и  $\varphi_{cc}'' \leq 0$  имеем  $dc/d\xi > 0$ . Но при  $\gamma = \text{const}$  концентрация активной примеси не может возрастать в потоке, поэтому из последнего неравенства следует, что существование  $c$ -волн невозможно и убывание  $s$  должно происходить скачком. Аналогично при  $\xi = \xi_3 = M/N$  имеем

$$d\gamma/d\xi = N \{ [1 - F - \xi_3(1-s)] \psi_{TT}'' - \xi_3 b_{TT}'' \}^{-1}$$

откуда следует недопустимость существования  $s$ ,  $\gamma$ -волн, если  $(\gamma^0 - \gamma_0) b_{TT}'' \leq 0$  и  $(\gamma^0 - \gamma_0) \psi_{TT}'' \leq 0$ .

На скачках системы уравнений (1.5) должны выполняться интегральные законы сохранения ( $V$  — скорость скачка)

$$\begin{aligned} \xi_j[s] &= [F], & \xi_j[cs + \varphi(1-s) + a] &= [cF + \varphi(1-F)] \\ \xi_j[\gamma s + \psi(1-s) + b] &= [\gamma F + \psi(1-F)]; & [f] &= f^+ - f^-, \\ f^\pm &= f(\xi_j \pm 0), & \xi_j &= mV/U \end{aligned}$$

которые можно преобразовать к виду

$$\xi_j = (F^+ - F^-) / (s^+ - s^-) = (F^+ - \omega_\varphi) / (s^+ - \omega_a) = (F^+ - \omega_\psi) / (s^+ - \omega_b) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi - 1}, & \omega_a &= \frac{\delta\varphi + \delta a}{\delta\varphi - 1}, & \omega_\psi &= \frac{\delta\psi}{\delta\psi - 1}, & \omega_b &= \frac{\delta\psi + \delta b}{\delta\psi - 1} \\ \delta\varphi &= [\varphi] / [c], & \delta a &= [a] / [c], & \delta\psi &= [\psi] / [\gamma], & \delta b &= [b] / [\gamma] \end{aligned}$$

Соотношения (1.13) останутся справедливыми, если верхние индексы «+» в двух последних выражениях заменить на «-».

Ввиду того что третье уравнение (1.7) при  $R = T = 0$  имеет тривиальное решение  $\gamma = \text{const}$ , скачкообразное изменение насыщенности и концентрации активной примеси может происходить при постоянной концентрации пассивной примеси. Такие скачки, называемые далее  $s$ -скачками, должны удовлетворять первым двум соотношениям (1.13).

Таким образом, искомое решение задачи (1.1) — (1.4) может состоять из участков постоянства  $s$ ,  $c$ ,  $\gamma$ ;  $s$ -,  $c$ - и  $s$ ,  $\gamma$ -волн; скачков  $s$  при  $c = \text{const}$  и  $\gamma = \text{const}$ ; сопряженных скачков  $s$  и  $c$  при  $\gamma = \text{const}$ ; сопряженных скач-

ков  $s$ ,  $c$ ,  $\gamma$  и должно удовлетворять двум дополнительным условиям: однозначности функций  $s(\xi)$ ,  $c(\xi)$ ,  $\gamma(\xi)$  и устойчивости скачков. Последнее в данном случае сводится к требованию, что общее число характеристических скоростей за  $(\xi_i^-, i=1, 2, 3)$  и перед скачком  $(\xi_k^+, k=1, 2, 3)$ , для которых выполняются неравенства  $\xi_i^- \geq \xi_j$ ,  $\xi_k^+ \leq \xi_j$ ,  $\xi_j = mV/U$ , равно четырем. Соответствующие им характеристики называются «приходящими на скачок», остальные — «уходящими». Подробнее условие устойчивости скачков применительно к подобным задачам обсуждается в [1, 5].

2. Для построения решения удобно воспользоваться понятием пути в плоскости  $(s, F)$  [1, 5], ставящего в соответствие каждой точке решения  $(s(\xi), c(\xi), \gamma(\xi))$  точку  $(s(\xi), F(s(\xi), c(\xi), \gamma(\xi)))$  плоскости  $(s, F)$ . Вдоль полученной таким образом кривой в силу первого уравнения (1.5) имеем

$$\xi = dF/ds \tag{2.1}$$

поэтому решение восстанавливается по пути единственным образом. Прямолинейным участкам пути соответствуют скачки решения, удовлетворяющие уравнениям (1.13), угловым точкам пути — участки постоянства насыщенности. Концентрации  $c$  и  $\gamma$  на  $s$ - и  $c$ ,  $\gamma$ -волнах находят интегрированием вдоль пути уравнений (1.12).

Из условия однозначности решения следует, что предельные значения автомобильной переменной (2.1)  $\xi^\pm$  на участках пути в плоскости  $(s, F)$ , примыкающих к скачку, должны удовлетворять неравенству

$$\xi^- \leq \xi_j \leq \xi^+ \tag{2.2}$$

причем значения  $\xi^\pm$  равны либо характеристическим скоростям  $\xi_i^\pm$  ( $i=1, 2, 3$ ), либо безразмерным скоростям предыдущего или последующего скачков. В случае выполнения строгого неравенства в (2.2) (т. е. существования у пути угловой точки) скачок сопрягает непрерывную часть решения с участком постоянства насыщенности; равновесия отвечают сопряжения скачка с  $s$ -,  $c$ - или  $c, \gamma$ -волнами.

Пусть  $\eta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — безразмерные характеристические скорости  $\xi_i$ , упорядоченные в порядке возрастания:  $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \eta_3$ . Тогда каждому скачку в соответствии с условием устойчивости отвечает реализация одной из трех возможностей

$$\begin{aligned} \xi_j \leq \eta_1^-, \eta_1^+ \leq \xi_j < \eta_2^+; \eta_1^- < \xi_j \leq \eta_2^-, \eta_2^+ < \xi_j < \eta_3^+ \\ \eta_2^- < \xi_j \leq \eta_3^-, \eta_3^+ \leq \xi_j \end{aligned} \tag{2.3}$$

Путь в плоскости  $(s, F)$ , составленный из перечисленных выше элементов и удовлетворяющий соотношениям (2.1)–(2.3), является решением поставленной задачи. Общая структура решения может быть представлена в виде двух участков постоянства  $c$  и  $\gamma$ , на которых концентрации принимают соответственно граничные ( $c^0, \gamma^0$ ) и начальные ( $0, \gamma_0$ ) значения и может изменяться лишь водонасыщенность, и заключенного между ними участка, на котором происходит изменение концентрации активной и пассивной примесей. Этот участок решения далее называется  $c, \gamma$ -переходом.

3. Техника построения автомобильного решения, развитая в [1, 2, 5] применительно к задаче вытеснения нефти раствором одной активной примеси, обобщается на рассматриваемую ситуацию. При этом центральным моментом является исследование структуры  $c, \gamma$ -перехода. В отличие от случая  $\gamma_0 = \gamma^0 = 0$ , когда концентрация активной примеси в потоке изменяется монотонно от своего значения, определяемого условиями нагнетания, до начального значения в невозмущенном пласте, теперь монотонно изменяется лишь концентрация пассивной примеси. Концентрация взаимодействующей с ней активной примеси может возрастать в потоке и достигать в некоторых случаях значений, превосходящих  $c^0$ . Таким образом, интервал изменения концентрации активной примеси заранее не известен и структура  $c, \gamma$ -перехода может зависеть от вида функций  $\phi(c, \gamma)$ ,  $a(c, \gamma)$  при  $c > c^0$ .

Укажем прежде всего достаточные условия того, что задача построения  $c, \gamma$ -перехода расщепляется на две, которые можно решать последовательно, а именно, когда структура фронта распространения пассивной примеси в потоке может быть выяснена до построения  $c, \gamma$ -перехода и ре-

шения в целом. Эти условия по аналогии с [1] для функций  $F(s, c, \gamma)$  обычного вида сводятся к выполнению одного из следующих требований:

- 1) функции  $\psi(\gamma)$  и  $b(\gamma)$  — выпуклые:  $\psi_{\gamma\gamma}'' \leq 0$ ,  $b_{\gamma\gamma}'' \leq 0$ ;
- 2) функции  $\psi(\gamma)$  и  $b(\gamma)$  — вогнутые:  $\psi_{\gamma\gamma}'' \geq 0$ ,  $b_{\gamma\gamma}'' \geq 0$ ;
- 3) пассивная примесь не сорбируется пористым скелетом:  $b=0$ ;
- 4) отношение концентраций пассивной примеси в фазах постоянно:

$\psi(\gamma)/\gamma = \psi_0 = \text{const}$ .

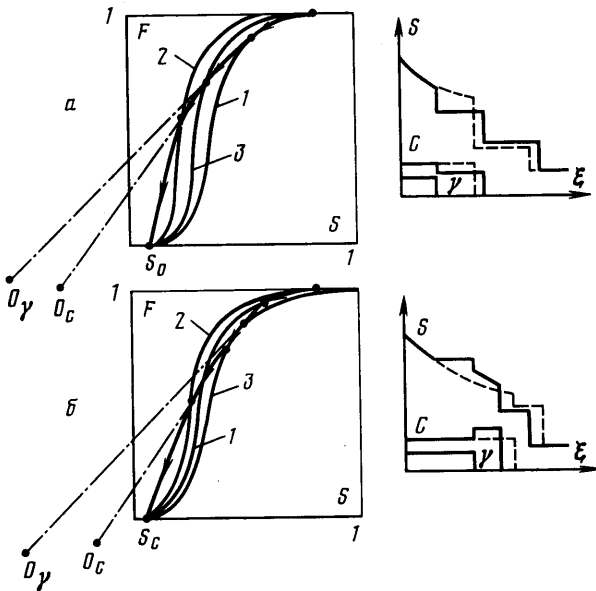
В первом случае изменение концентрации пассивной примеси происходит скачком ( $\gamma^+ = \gamma_0$ ,  $\gamma^- = \gamma^0$ ), во втором — непрерывно в  $c$ ,  $\gamma$ -волне (при  $\gamma^0 < \gamma_0$  случаи 1) и 2) меняются местами). В остальных двух случаях структура  $\gamma$ -перехода полностью определяется видом функций  $\psi(\gamma)$  и  $b(\gamma)$  соответственно так же, как при вытеснении раствором одной активной примеси [1].

Дальнейший анализ проведем только при  $(\gamma^0 - \gamma_0)\psi_{\gamma\gamma}'' \leq 0$  и  $(\gamma^0 - \gamma_0)b_{\gamma\gamma}'' \leq 0$ , когда концентрация пассивной примеси меняется скачком от  $\gamma^0$  до  $\gamma_0$ ; уже эта ситуация оказывается достаточно содержательной. Исследование удастся довести до конца для трех основных указанных ниже случаев.

*Случай 1.* Функции  $\varphi(c, \gamma)$  и  $a(c, \gamma)$  выпуклые по  $c$ :  $\varphi_{cc}'' \leq 0$ ,  $a_{cc}'' \leq 0$ . При этом концентрации обеих примесей в потоке меняются скачком, и структура  $c, \gamma$ -перехода может быть трех типов: а) фронт пассивной примеси распространяется медленнее фронта активной, б) фронт пассивной примеси опережает фронт активной и в) скорости распространения фронтов обеих примесей совпадают.

Проверка возможности реализации решений последних двух типов элементарна [5]. Для этого в плоскости  $(s, F)$  достаточно построить две кривые  $F(s, c^0, \gamma^0)$  и  $F(s, 0, \gamma)$ . Если наклон луча, проходящего через точку  $O_c$ :  $(s, F) = (\omega_a, \omega_\varphi)$  и касающегося кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , меньше наклона луча, касающегося той же кривой и проходящего через точку  $O_\gamma$ :  $(s, F) = (\omega_b, \omega_\psi)$ , где  $\delta\varphi$ ,  $\delta a$ ,  $\delta\psi$  и  $\delta b$  определены в (1.13) при  $c^+ = 0$ ,  $c^- = c^0$ ,  $\gamma^+ = \gamma_0$ ,  $\gamma^- = \gamma^0$ , то решение типа б) возможно. Устойчивость  $c$ -скачка обеспечивается условиями  $\xi_j < \xi_{j\pm}$ ,  $\xi_{2^+} \leq \xi_j = \xi_{1^-} \leq \xi_{2^-}$ ,  $\xi_j < \xi_{1^+}$ ; устойчивость  $\gamma$ -скачка — условиями  $\xi_{2^\pm} < \xi_j < \xi_{1^\pm}$ ,  $\xi_{3^+} \leq \xi_j \leq \xi_{3^-}$ . Случай в) реализуется, если луч  $O_c O_\gamma$  имеет точку пересечения с кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , в которой его наклон больше или равен наклону касательной. Устойчивость сопряженного  $c, \gamma$ -скачка обеспечивается условиями  $\xi_{1^-} < \xi_j < \xi_{1^+}$ ,  $\xi_{2,3}^+ \leq \xi_j \leq \xi_{2,3}^-$ .

Структура  $c, \gamma$ -перехода с опережающим распространением фронта активной примеси может быть двух типов (фиг. 1а, б — сплошные линии; кривая 1 отвечает  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , 2 —  $F(s, 0, \gamma)$ , 3 —  $F(s, c^+, \gamma_0)$ ). В случае а) прямая, по которой происходит сопряженный скачок активной и пассивной примесей в плоскости  $(s, F)$ , касается кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , в случае б) — кривой  $F(s, c^+, \gamma_0)$ , чем обеспечивается устойчивость  $c, \gamma$ -скачка. Значение концентрации активной примеси за скачком  $c^+$  находится из последнего уравнения (1.13), в котором верхние индексы «+» заменены на «-» и  $c^- = c^0$ ,  $\gamma^+ = \gamma_0$ ,  $\gamma^- = \gamma^0$ . В случае б)  $\xi_j$  не определяется независимо от  $c^+$  и можно предложить следующий алгоритм построения решения. Двигаясь из точки  $(s, F) = (1, 1)$  с малыми шагами по кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , проверяем в каждой точке пути возможность построения  $c, \gamma$ -скачка и дальнейшего продолжения решения. При этом скорость «виртуального» скачка  $\xi_j$  однозначно определяется положением точки  $(s, F)$  на кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$  и равна угловому коэффициенту прямой, проходящей через эту точку и точку  $O_\gamma$ . Устойчивый скачок ( $\xi_{1^-} < \xi_j = \xi_{1^+} < \xi_{2^\pm}$ ,  $\xi_{3^+} \leq \xi_j \leq \xi_{3^-}$ ) происходит по  $\gamma$ -лучу, касающемуся кривой  $F(s, c^+, \gamma_0)$ , где  $c^+$  — решение уравнения  $\xi_j = (F^- - \omega_\varphi) / (s^- - \omega_c)$ .



Фиг. 1

Для сравнения на фиг. 1а, б пунктиром показаны распределения  $s(\xi)$  и  $c(\xi)$ , соответствующие равенству концентрации  $\gamma^0$  и  $\gamma_0$ , причем значение  $\gamma^0$  фиксировано. Видно, что в случае а) пассивная примесь в пластовых водах играет роль отрицательного фактора, а в случае б) — положительного, увеличивающего нефтеотдачу на промежуточной стадии вытеснения (правда, при этом несколько снижаются темпы вытеснения на начальной стадии).

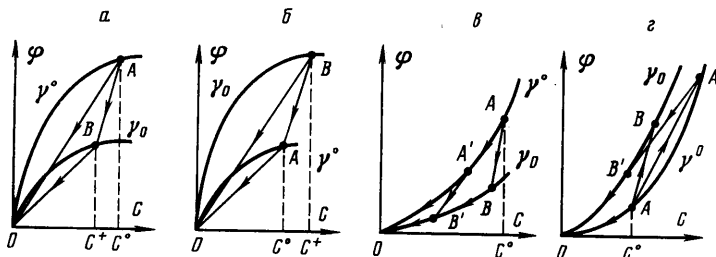
Заметим, что так же, как и в задаче о неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси [5], процедура построения автомодельного решения не гарантирует его единственности. Так, решения со структурой  $s, \gamma$ -перехода типа а), б) и в) могут существовать одновременно. Этот вопрос требует специального исследования.

**Случай 2.** Активная примесь не сорбируется пористой скелетом, как это имеет место при вытеснении нефти карбонизированной водой [3, 6, 7]. Тогда в формулах (1.11), (1.13) следует положить  $a_c = \delta a = 0$ , и поле характеристик второго семейства будет определяться исключительно видом функций  $\varphi(c, \gamma^0), \varphi(c, \gamma_0)$ .

Для выяснения возможных типов структуры решения полезным оказывается представление  $s, \gamma$ -перехода в плоскости переменных  $(c, \varphi)$ . При этом  $s$ -волны отображаются в участки кривых  $\varphi(c, \gamma^0)$  и  $\varphi(c, \gamma_0)$ ,  $s$ -скачки — в отрезки прямых, соединяющие точки кривой  $\varphi(c, \gamma^0)$  или  $\varphi(c, \gamma_0)$ ,  $c, \gamma$ -скачки — в отрезки прямых, соединяющие точки кривых  $\varphi(c, \gamma^0)$  и  $\varphi(c, \gamma_0)$ . Кроме того, в плоскости  $(c, \varphi)$  графически легко устанавливается соотношение между скоростью скачка  $\xi$ ; и характеристическими скоростями  $\xi_{2\pm}$ . Для этого достаточно сравнить угловой коэффициент  $\delta\varphi$  прямой, соответствующей скачку, со значениями производных  $\varphi_c'(c^\pm, \gamma^0)$  и (или)  $\varphi_c'(c^\pm, \gamma_0)$ . Первый определяет скорость скачка  $\xi = (F^\pm - \omega_\varphi) / (s^\pm - \omega_\varphi)$  как угловой коэффициент прямой в плоскости  $(s, F)$ , проходящей через точки  $(s^\pm, F^\pm)$  и  $(\omega, \omega)$ ; последние — значения характеристических скоростей  $\xi_{2\pm} = (F^\pm - \chi^\pm) / (s^\pm - \chi^\pm)$ ,  $\chi^\pm = \varphi_c' / (\varphi_c' \pm 1)$ . При этом в силу монотонности функции  $\xi(\delta\varphi)$  выпуклым участкам пути в

плоскости  $(s, F)$  будут соответствовать вогнутые участки  $s$ ,  $\gamma$ -перехода в плоскости  $(s, \varphi)$ .

Предположим, что функции  $\varphi(s, \gamma^0)$  и  $\varphi(s, \gamma_0)$  выпуклые по  $s$  и  $\gamma^0 > \gamma_0$ . Как было установлено выше, структура  $s, \gamma$ -перехода может быть трех типов, однако в плоскости  $(s, \varphi)$  варианты б) и в) неразличимы, так как  $\gamma$ -скачок при  $s^\pm = 0$  вырождается в точку. На фиг. 2а, б показаны два возможных типа  $s, \gamma$ -перехода:  $(A-B-0)$  и  $(A-0)$ . При  $\varphi_\gamma' \geq 0$  ( $\varphi_\gamma' \leq 0$ ) концентрация активной примеси перед  $s, \gamma$ -скачком  $A-B$  убывает (возрастает), в противном случае решение становится неоднозначным. Этот факт остается справедливым для функций  $\varphi(s, \gamma)$  произвольного вида, удовлетворяющих условиям  $\varphi_c' > 0$  и  $\varphi_\gamma' \geq 0$  ( $\varphi_\gamma' \leq 0$ ).



Фиг. 2

Путь в плоскости  $(s, F)$  и соответствующее ему решение строятся точно так же, как в случае 1 (рассматриваемая ситуация является его частным вариантом). При построении скачка  $A-B$  четыре неизвестных  $s^+$ ,  $s^-$ ,  $c^+$ ,  $\xi_j$  находятся из системы уравнений

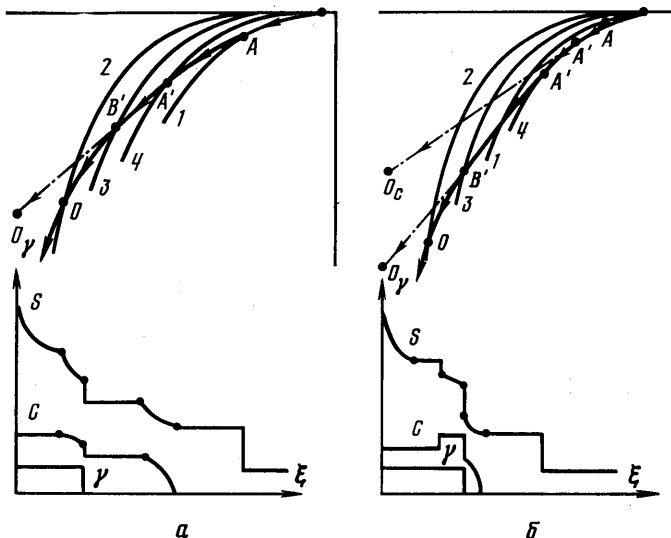
$$\xi_j = \begin{cases} F_s^-, & \xi_j < F_s'^+ \\ F_s'^+, & \xi_j > F_s'^- \end{cases} = \frac{F^+ - F^-}{s^+ - s^-} = \frac{F^- - \omega_\varphi}{s^- - \omega_\varphi} = \frac{F^- - \omega_\varphi}{s^- - \omega_b}$$

Если пассивная примесь также не сорбируется пористым скелетом, то построение скачка  $A-B$  упрощается, так как при этом наклон луча  $A-B$  в плоскости  $(s, \varphi)$  заранее известен:  $\delta\varphi = \delta\psi$ , и потому значение  $s^+$  не зависит от  $s^+$ ,  $s^-$  и  $\xi_j$ .

Аналогичным образом исследуется структура  $s, \gamma$ -перехода при вогнутых функциях  $\varphi(s, \gamma^0)$  и  $\varphi(s, \gamma_0)$ . Решения могут быть трех типов; два из них — это либо  $s, \gamma$ -скачок  $A-B$  с последующей  $s$ -волной  $B-0$ , либо  $s$ -волна  $A-0$  с последующим  $\gamma$ -скачком при  $s^\pm = 0$  (фиг. 2в, г); они отличаются от решений, построенных на фиг. 2а, б, лишь заменой  $s$ -скачков на  $s$ -волны. Кроме того, допустимо существование  $s, \gamma$ -перехода  $(A-A'-B'-0)$ , в котором сопряженному  $s, \gamma$ -скачку  $A'-B'$  с последующей  $s$ -волной  $B'-0$  предшествует  $s$ -волна  $A-A'$  при  $\varphi_\gamma' \geq 0$  (фиг. 2в) или  $s$ -скачок  $A-A'$  при  $\varphi_\gamma' \leq 0$  (фиг. 2г). В первом случае прямая, проходящая через точки  $A'$  и  $B'$ , касается кривой  $\varphi(s, \gamma^0)$ , во втором — кривой  $\varphi(s, \gamma_0)$ . Переход  $(A-A'-B'-0)$  является единственным исключением из указанного выше правила, когда концентрация активной примеси перед сопряженным  $s, \gamma$ -скачком убывает при  $\varphi_\gamma' \leq 0$ .

Проверка возможности построения решений, соответствующих  $s, \gamma$ -переходам  $(A-0)$  и  $(A-B-0)$ , осуществляется точно так же, как и при выпуклых функциях  $\varphi(s, \gamma^0)$  и  $\varphi(s, \gamma_0)$  с той лишь разницей, что условия касания  $s$ -лучей с кривыми  $F(s, c^\pm, \gamma^\pm)$  заменяются условиями «гладкого» сопряжения  $s$ - и  $s$ -волн (т. е. кривых  $F(s, c^\pm, \gamma^\pm)$  с образами интегральных

кривых первых двух уравнений (1.12)):  $F_s' = \xi_2$  [1, 7]. При этом вдоль  $s$ -волны  $\xi_2 < \xi_T$  в случае опережающего распространения пассивной примеси и  $\xi_2 > \xi_T$  в случае ее отставания, где  $\xi_T = (F - \omega_\Phi) / (s - \omega_b)$ . Нарушение обоих неравенств вдоль  $s$ -волн  $A-0$  и  $B-0$  означает, что реализуется структура  $s, \gamma$ -перехода типа  $(A-A'-B'-0)$ . Тогда при  $\varphi_T' \geq 0$  (фиг. 2а)  $s$ -волна  $A-A'$  сопрягается с  $s$ -волной  $B'-0$   $s, \gamma$ -скачком, и точка сопряжения  $A'$  в плоскости  $(s, F)$  находится из условия касания  $\gamma$ -луча с  $s$ -волной  $A-A'$ :  $\xi_2 = \xi_T$  (фиг. 3а, кривая 4 отвечает  $F(s, c^-, \gamma^0)$ ). При  $\varphi_T' \leq 0$  (фиг. 2б) процедура построения пути в плоскости  $(s, F)$  совпадает с изложенной выше для выпуклых функций  $\varphi(c, \gamma^0)$  и  $\varphi(c, \gamma_0)$ . Путь состоит



Фиг. 3

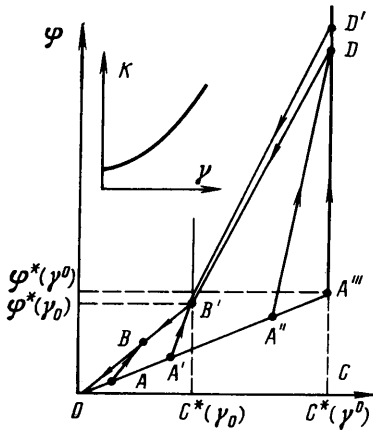
из следующей последовательности элементов (фиг. 3б, кривая 4 отвечает  $F(s, c^*, \gamma^0)$ ): отрезка кривой  $F(s, c^0, \gamma^0)$ , начинающегося из точки (1.4) ( $s$ -волны); отрезка прямой, соответствующего  $s$ -скачку  $[c] = c^* - c^0 > 0$ ,  $[s] < 0$ ; отрезка кривой  $F(s, c^*, \gamma^0)$  ( $s$ -волны); отрезка прямой, соответствующего  $s, \gamma$ -скачку  $[c] = c^+ - c^* < 0$ ; отрезка кривой, соответствующего  $s$ -волне, вдоль которой  $s$  изменяется от  $c^+$  до 0; и, наконец, отрезка прямой, соответствующего переднему фронту вытеснения чистой водой ( $s$ -скачка). Устойчивость и однозначность решения обеспечивается «гладким» сопряжением  $s$ -скачка  $A-A'$  и  $s, \gamma$ -скачка  $A'-B'$  с разделяющей их  $s$ -волной и  $s, \gamma$ -скачка  $A'-B'$  с  $s$ -волной  $B'-0$ .

Теперь легко представить себе, какова будет структура  $s, \gamma$ -перехода в плоскости  $(s, \varphi)$  при функции  $\varphi(c, \gamma)$  произвольного вида:  $\varphi_c' \geq 0$ ,  $\varphi_T' \geq 0$  ( $\varphi_T' \leq 0$ ). Решение с опережающим распространением фронта пассивной примеси имеет вид вогнутой оболочки функции  $\varphi(c, \gamma^0)$  на отрезке  $[0, c^0]$  [1]. При отставании фронта распространения пассивной примеси в перечисленных выше структурах решений (фиг. 2)  $s$ -переходы ( $s$ -скачки и  $s$ -волны при  $\gamma = \text{const}$ ), на которых концентрация  $s$  убывает (возрастает), заменяются вогнутыми (выпуклыми) оболочками функций  $\varphi(c, \gamma^0)$  или  $\varphi(c, \gamma_0)$  на отрезках  $c_* \leq c \leq c^*$ . Значения  $c_*$  и  $c^*$  сами могут быть неизвестны заранее и должны определяться в ходе построения решения.

В качестве примера рассмотрим вытеснение нефти карбонизированной водой при повышенной минерализации пластовых вод ( $\gamma_0 > \gamma^0$ ), когда рас-



пределение углекислоты между водной и нефтяной фазами задано соотношениями:  $c = \varphi / K(\gamma)$  при  $\varphi < \varphi^*(\gamma) = K(\gamma)c^*(\gamma)$  и  $c = c^*(\gamma)$  при  $\varphi \geq \varphi^*(\gamma)$  (фиг. 4). Подобная аппроксимация зависимости равновесных концентраций при  $\gamma_0 = \gamma^0$  предложена в [8]; она отвечает ограниченной растворимости углекислоты в воде и неограниченной в нефти. Концентрации примесей для простоты будем считать малыми, соль нерастворимой в нефти, а изотерму десорбции солей линейной ( $\psi = 0$ ,  $b = b_0\gamma$ ). Здесь не учитывается эффект «набухания» нефти при растворении в ней  $\text{CO}_2$ , способствующий увеличению нефтеотдачи [3, 7].



Фиг. 4

В зависимости от положения в плоскости  $(c, \varphi)$  точки  $A$ , соответствующей концентрациям примесей в нагнетаемой жидкости  $c = c^0$ ,  $\gamma = \gamma^0$ , реализуются два типа структуры  $c, \gamma$ -перехода (тривиальный случай, показанный на фиг. 2г, не рассматривается). Решение  $(A-B-0)$  отвечает ситуации, когда условия предельной растворимости  $\text{CO}_2$  в воде в зоне контакта карбонизированной воды с солями не достигнуты. Распределения  $s$  и  $c$  в потоке при этом совпадают с приведенными на фиг. 1б. Структура  $(A''-D-B'-0)$  возникает при увеличении  $c^0$  после достижения точкой  $A$  критического положения  $A'$ . В этом случае «излишек» углекислоты отесняется из зоны с повышенной минерализацией, что приводит к дополнительно-

му  $c$ -скачку при  $\gamma = \text{const}$ . Решение аналогично построенному на фиг. 3б, лишь  $c$ -волна  $B'-0$  вырождается в  $c$ -скачок, которому предшествует участок постоянства  $s$  и  $c$ . Если  $c^0$  совпадает с растворимостью  $\text{CO}_2$  в воде при начальной минерализации  $c^*(\gamma^0)$  (точка  $A'''$ ), то положение скачка  $A'''-D'$  совпадает с границей пласта. При этом концентрация  $\text{CO}_2$  в воде остается неизменной, а концентрация в нефти при фиксированной концентрации  $\gamma_0$  определяется величиной сорбционной емкости пласта  $b_0$ .

*Случай 3.* Распределение активной примеси между фазами не зависит от содержания пассивной примеси и отношение концентраций активной примеси в фазах постоянно:  $\varphi(c, \gamma) = \varphi(c) = \varphi_0 c$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ . Структура  $c, \gamma$ -перехода исследуется в этом случае столь же элементарно. Выражения для характеристической скорости  $\xi_2$  и скорости  $c$ - или  $c, \gamma$ -скачка  $\xi_j$  принимают вид

$$\xi_2 = \frac{F - \chi}{s - \chi - a_c' / (\varphi_0 - 1)}, \quad \xi_j = \frac{F \pm \chi}{s^\pm - \chi - \delta a / (\varphi_0 - 1)}, \quad \chi = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 - 1}$$

и, следовательно,  $\xi_j < \xi_2$  ( $\xi_j > \xi_2$ ), если  $\delta a > a_c'$  ( $\delta a < a_c'$ ). Последнее справедливо и при  $\varphi_0 = 1$ , когда  $\xi_2 = (1 + a_c')^{-1}$  и  $\xi_j = (1 + \delta a)^{-1}$ .

Таким образом, типы возможной структуры  $c, \gamma$ -перехода определяются видом кривых  $a(c, \gamma^0)$  и  $a(c, \gamma_0)$ , и построение пути в плоскости  $(c, a)$  полностью совпадает с аналогичными построениями в плоскости  $(c, \varphi)$  при  $a = 0$ .

Процедура построения  $c, \gamma$ -перехода в плоскости  $(c, a)$  и пути в плоскости  $(s, F)$  упрощается, если отношение концентраций обеих примесей в воде и в нефти постоянны и совпадают (например,  $\psi(\gamma) / \gamma = \varphi_0 = 0$ ). В этом случае угловой коэффициент прямой, по которой может произойти переход с кривой  $a(c, \gamma^0)$  на кривую  $a(c, \gamma_0)$ , заранее известен:  $\delta a = \delta b b$ ,

поэтому концентрация активной примеси перед скачком легко находится графически в плоскости  $(c, a)$ .

Если  $a_{\gamma}' \leq 0$ , то в случае опережающего распространения фронта активной примеси ее концентрация в потоке изменяется монотонно при  $\gamma^{\circ} < \gamma_0$  и монотонно при  $\gamma^{\circ} > \gamma_0$ .

В качестве характерного примера рассмотрим вытеснение нефти раствором ПАВ, когда роль пассивной примеси играют соли, растворенные в пластовой воде и способствующие адсорбции ПАВ:  $a_{\gamma}' \geq 0$  (данные о предельной адсорбции, например неионогенного ПАВ ОП-10 в зависимости от концентрации солей  $MgCl_2$ ,  $CaCl_2$ ,  $NaCl$  в растворе, приведены в [9]). Считаем сорбцию ПАВ обратимой, изотерму сорбции ПАВ выпуклой ( $a_{cc}'' \leq 0$ ), изотерму десорбции солей линейной ( $b(\gamma) = b_0\gamma$ ). При повышенной минерализации пластовых вод ( $\gamma_0 > \gamma^{\circ}$ ) и достаточно большой сорбционной емкости пласта  $b_0$  структура  $c, \gamma$ -перехода в плоскости  $(c, a)$  будет иметь вид, показанный на фиг. 2б. Последняя построена в предположении, что  $\gamma_0 < \gamma^{\circ}$  и  $\phi_{\gamma}' \leq 0$ ; в данном случае  $\gamma_0 > \gamma^{\circ}$  и  $a_{\gamma}' \geq 0$ , поэтому концентрация  $c$  перед сопряженным  $c, \gamma$ -скачком возрастает. Так как при этом  $\psi(\gamma) = \phi(c) = 0$ , то угловой коэффициент прямой, соединяющей точки А и В, равен  $b_0$ . Таким образом, концентрация ПАВ в зоне с повышенной минерализацией пластовых вод должна возрасти, и, следовательно, распределения насыщенности и концентрации активной примеси в пласте будут иметь вид, сходный с указанным на фиг. 1б. Полученный результат на первый взгляд кажется неожиданным. Казалось бы, что увеличение предельной адсорбции должно привести к уменьшению концентрации ПАВ в потоке и снижению эффективности процесса вытеснения (здесь предполагается, что  $F_c' < 0$  во всем диапазоне изменения концентрации  $c$ ). Однако различие минерализации закачиваемой и пластовой вод в данном случае приводит к образованию в структуре фронта вытеснения зоны повышенного содержания сорбированного ПАВ, которое при отеснении солей начинает возвращаться в раствор ПАВ с начальной концентрацией  $c = c^{\circ}$ . В итоге должны несколько снизиться темпы роста текущей нефтеотдачи на ранней стадии и возрасти на более поздней стадии процесса вытеснения (фиг. 1б).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов). М., 1980. 63 с. (Ин-т проблем механики АН СССР, Препринт № 161).
2. Ентов В. М., Полищук А. М. О роли сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 68–76.
3. Бабалян Г. А., Тумасян А. Б., Пантелеев В. Г., Леви Б. И., Халимов Э. М. Применение карбонизированной воды для увеличения нефтеотдачи. М.: Недра, 1976. 143 с.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
5. Брагинская Г. С., Ентов В. М. О неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси. М., 1978. 60 с. (Ин-т проблем механики АН СССР, Препринт № 112).
6. de Nevers N. A calculation method for carbonated water flooding. — Soc. Petrol. Eng. J., 1964, v. 4, № 1, p. 9–20.
7. Зискин Е. А., Рыжик В. М. Автомодельные решения задачи двухфазного вытеснения нефти раствором активной примеси с учетом массообмена между фазами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 66–73.
8. Леви Б. И., Шахмаева А. Г. Гидродинамическая модель и некоторые результаты расчета процесса до отмыва нефти оторочками жидкой углекислоты. — Тр. Башк. научн.-исслед. и проектного ин-та нефт. пром-сти, 1976, вып. 47, с. 27–29.
9. Рудкевич Е. К., Кравченко И. И. Влияние некоторых электролитов на адсорбцию ОП-10 на кварцевом песке. — Тр. Башк. научн.-исслед. и проектного ин-та нефт. пром-сти, вып. 4. М.: Недра, 1970, с. 89–90.

Москва

Поступила в редакцию  
5.III.1981