

УДК 532.526.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДОТРЫВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЕРЕДНЕЙ КРОМКЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

РУБАН А. И.

Многочисленные эксперименты по обтеканию тонких крыловых профилей дозвуковым потоком газа (см. обзоры [1, 2]) показали, что течение около передней кромки профиля является безотрывным только при углах атаки, меньших некоторого критического значения, зависящего от формы профиля. Если же угол атаки достигает критического значения, то на верхней поверхности профиля образуется замкнутая зона рециркуляционного течения малой протяженности. При обычных условиях обтекания пограничный слой на передней кромке профиля остается ламинарным во всем предотрывном диапазоне углов атаки. Однако появление замкнутой зоны отрыва, как правило, сопровождается переходом ламинарного режима течения в турбулентный. Причем зарождение турбулентности наблюдается как раз в зоне отрыва потока.

Настоящая работа посвящена изучению устойчивости пограничного слоя на передней кромке тонкого профиля в потоке несжимаемой жидкости. Рассматривается случай, когда угол атаки профиля по отношению к набегающему потоку слабо отличается от его критического значения.

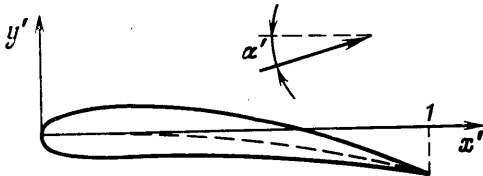
Гидродинамическая теория устойчивости состоит, как известно, в отыскании собственных функций уравнений Навье — Стокса для нестационарного движения жидкости, слабо возмущенного относительно своего стационарного состояния. В случае плоскопараллельных течений этими собственными функциями являются волны Толлмина — Шлихтинга, параметры которых определяются уравнением Орра — Зоммерфельда (см., например, [3]). В случае пограничного слоя волны Толлмина — Шлихтинга становятся собственными функциями задачи для возмущенного движения только при больших числах Рейнольдса, когда течение в пограничном слое асимптотически приближается к плоскопараллельному. Поэтому для пограничного слоя анализ полного уравнения Орра — Зоммерфельда может быть заменен построением асимптотической теории. И тот и другой подходы дают, строго говоря, описание лишь асимптотик верхней и нижней ветвей нейтральной кривой при больших числах Рейнольдса. В то же время асимптотический подход содержит большие возможности с точки зрения получения аналитических результатов, а также для распространения теории на случай нелинейных возмущений.

Настоящая работа ограничивается анализом асимптотики нижней ветви нейтральной кривой для пограничного слоя на передней кромке тонкого крылового профиля. Для течения Блазиуса эта задача была рассмотрена недавно сразу в трех работах [4–6]. Оказалось, что волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое существуют за счет взаимодействия внешнего потенциального потока с вязким пристеночным слоем. Причем на нижней ветви нейтральной кривой это взаимодействие осуществляется в точном соответствии с классической теорией свободного взаимодействия. Напомним, что теория свободного взаимодействия развивалась вначале с целью изучения отрыва стационарного потока от поверхности обтекаемого тела (см. обзоры [7–9]). Позже она была обобщена на случай нестационарных течений [10–12], что и создало основу для ее приложения к теории гидродинамической устойчивости.

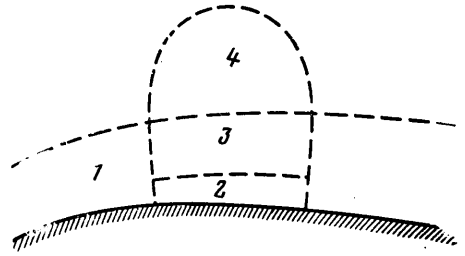
Процесс взаимодействия для пограничного слоя на передней кромке тонкого профиля при углах атаки, близких к критическому [13, 14], имеет существенные особенности. Поэтому устойчивость такого пограничного слоя должна анализироваться отдельно. С этой целью в настоящей работе прежде всего сформулирована асимптотическая задача для нестационарного течения со свободным взаимодействием на передней кромке профиля. Показано, что эта задача может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению для распределения толщины вытеснения пограничного слоя. В результате анализа этого уравнения получена асимптотика нижней ветви нейтральной кривой в линейной теории устойчивости. Установлено, что предположение о плоскопараллельности течения выполняется только для безотрывного

обтекания профиля, когда угол атаки меньше его критического значения на величину, по порядку большую, чем $\tau R^{-2/5}$ (R – число Рейнольдса, τ – характерная толщина профиля).

Заключительный раздел работы посвящен нелинейной теории устойчивости рассматриваемого течения. Дело в том, что условия потери устойчивости зависят от амплитуды возмущений (см. обзоры [15–17]). Причем возможны две ситуации: либо число Рейнольдса потери устойчивости возрастает с ростом амплитуды, либо убывает. В первом случае линейная теория дает необходимое и достаточное условие устойчивости потока, а во втором – только необходимое. Обычно при изучении этого вопроса ограничиваются рассмотрением малых амплитуд нейтральных колебаний. В этом случае для решения задачи может быть применен тот или иной асимптотический метод с амплитудой возмущений в качестве малого параметра. К числу таких исследований относятся работы [18, 19], в которых устойчивость потока анали-



Фиг. 1



Фиг. 2

зируется на основе метода двухмасштабных разложений (см., например, [20]). Отметим также метод Ляпунова – Шмидта, который был развит в связи с задачами нелинейной теории устойчивости в [21, 22].

При произвольной амплитуде возмущений задача о нейтральных колебаниях в принципе сводится к бесконечной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов ряда Фурье, выражающего автоколебательное движение жидкости. Решение этой системы уравнений представляет значительные трудности вычислительного характера. В связи с этим в работах [23, 24] ряд Фурье искусственно обрывается на первой гармонике. При этом нелинейность учитывается лишь посредством влияния напряжений Рейнольдса на средний профиль скорости.

В настоящей работе задачу о нейтральных колебаниях удается свести к системе алгебраических уравнений. Эта система решалась численно. Кроме того, получено ее аналитическое решение при малых амплитудах возмущений. В результате установлено, что на нижней ветви нейтральной кривой автоколебания отходят от стационарного решения в область докритических значений числа Рейнольдса.

1. Формулировка нестационарной задачи о свободном взаимодействии.

Рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого крылового профиля (фиг. 1). Предположим для определенности, что носик этого профиля имеет форму параболы

$$y' = \pm \tau \sqrt{2x'} + \dots, \quad x' \rightarrow +0$$

Здесь τ – характерная толщина профиля. Через x' , y' обозначена декартова система координат, начало которой совпадает с носиком профиля, а ось x' направлена по касательной к его средней линии; все расстояния отнесены к длине профиля l .

Анализ стационарного течения жидкости около такого профиля при больших числах Рейнольдса [13, 14] позволил установить, что если угол атаки профиля $\alpha' = \tau \alpha_0$ по отношению к набегающему потоку приближается к своему критическому значению $\alpha_0 = \alpha_0^*$ (для симметричного профиля $\alpha_0^* = 0,8174$), то на верхней поверхности профиля формируется область свободного взаимодействия. С точки зрения метода сращиваемых асимптотических разложений [20] область свободного взаимодействия делится на три характерные подобласти: вязкий пристеночный слой (область 2 на фиг. 2), основная часть пограничного слоя (область 3) и внешний по-

тенциальный поток (область 4). Причем внешний поток и вязкий пристеночный слой являются здесь взаимно обусловленными.

Рассмотрим теперь нестационарный аналог этой задачи. С этой целью выберем характерное время изменения гидродинамических функций таким, чтобы нестационарные члены уравнений Навье — Стокса стали порядка основных членов этих уравнений хотя бы в одной из областей течения. Ясно, что этой областью является вязкий пристеночный слой, где жидкость движется наиболее медленно.

Используя эту идею (для свободного взаимодействия классического типа такой подход был впервые продемонстрирован в [10—12]) и основываясь на результатах работы [14], запишем асимптотическое разложение решения уравнений Навье — Стокса для области 2 в виде

$$\psi = R^{-19/20} p_{00} y_*^3 + R^{-16/20} \Psi_1^*(x_*, y_*, t_*) + R^{-13/20} \Psi_2^*(x_*, y_*, t_*) + \dots \quad (1.1)$$

$$p = P_0 + R^{-1/5} p_{00} x_* + R^{-2/5} (k_1 P_1 + p_{01} x_*^2) + R^{-1/2} p_*(x_*, y_*, t_*) + \dots$$

$$t_* = R^{-1/20} t, \quad x_* = R^{1/5} (x - x_0), \quad y_* = R^{11/20} y$$

Здесь и в дальнейшем используются безразмерные переменные. Через ψ обозначена функция тока, отнесенная к скорости V_∞ набегающего на профиль потока и радиусу передней кромки профиля $r_0 = l\tau^2$. Давление p отнесено к удвоенному скоростному напору, время t отнесено к r_0/V_∞ , а все расстояния — к r_0 . Используется ортогональная система координат, ось x которой отсчитывается вдоль обтекаемой поверхности, а ось y — по нормали к ней.

Входящие в разложения (1.1) постоянные $x_0, k_1, p_{00}, p_{01}, P_0, P_1$ имеют тот же смысл, что и в [14].

Подставляя (1.1) в уравнения Навье — Стокса и устремляя число Рейнольдса $R = V_\infty r_0 / \nu$ к бесконечности, получим уравнения, которым удовлетворяют функции Ψ_1^* и Ψ_2^* . Первое из них не содержит нестационарных членов и в точности совпадает с соответствующим уравнением из [14]. На этом основании заключаем, что $\Psi_1^* = \frac{1}{2} A_1(x_*, t_*) y_*^2$, где $A_1(x_*, t_*)$ — произвольная функция. Известно только, что при $x_* \rightarrow -\infty$

$$A_1(x_*, t_*) = a_0(-x_*) + k_1 a_1(-x_*)^{-1} + \dots \quad (1.2)$$

Здесь a_0, a_1 — постоянные, численные значения которых приведены в работе [13]; через k_1 обозначена величина, связанная с вариацией угла атаки (относительно его критического значения α_0^*) соотношением $k_1 = \sqrt{2}(\alpha_0 - \alpha_0^*) R^{2/5} = O(1)$.

Чтобы определить функцию $A_1(x_*, t_*)$, необходимо рассмотреть задачу для Ψ_2^* :

$$\frac{1}{2} p_{00} y_*^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^*}{\partial x_* \partial y_*} - p_{00} y_* \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_*} = \frac{\partial^3 \Psi_2^*}{\partial y_*^3} - \frac{\partial p_*}{\partial x_*} -$$

$$- \frac{\partial A_1}{\partial t_*} y_* - \frac{1}{2} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_*} y_*^2, \quad \frac{\partial p_*}{\partial y_*} = 0$$

$$\Psi_2^* = \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial y_*} = 0, \quad y_* = 0 \quad (1.3)$$

$$\Psi_2^* = \frac{p_{00} a_0^2}{40 \cdot 320} y_*^9 + x_* \frac{a_0^2}{120} y_*^5 + \frac{1}{2} A_2(x_*, t_*) y_*^2 + \dots, \quad x_* \rightarrow -\infty, \quad y_* \rightarrow +\infty$$

Движение жидкости во всем поле течения, за исключением области 2, является квазистационарным. Поэтому решение уравнений Навье — Стокса

для всех областей, окружающих вязкий пристеночный слой, совпадает с полученными в [14] для стационарного случая. На этом основании заключаем, что градиент давления, который формируется во внешнем потенциальном потоке 4 и воздействует на вязкий слой 2, может быть записан в виде

$$\frac{\partial p_*}{\partial x_*} = -\frac{U_{00}^2}{\pi p_{00}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1''(s, t_*)}{s-x_*} ds \quad (1.4)$$

Штрихами здесь обозначено дифференцирование по переменной s ; постоянная U_{00} представляет собой величину скорости на внешней границе пограничного слоя в районе области взаимодействия.

Третья строка в (1.3) выражает собой условие прилипания на обтекаемой поверхности, а краевые условия при $y_* \rightarrow +\infty$ и при $x_* \rightarrow -\infty$ следуют из сращения с решением в основной части пограничного слоя 3 и с решением для пограничного слоя 1 (фиг. 2) вверх по потоку от области свободного взаимодействия.

После замены переменных

$$\Psi_2^* = \Psi_2 + \frac{p_{00} a_0^2}{40320} y_*^9 + x_* \frac{a_0^2}{120} y_*^5 + \frac{1}{2} A_2 y_*^2 + \frac{1}{2 p_{00}} \times \\ \times (A_1^2 - a_0^2 x_*^2 - 2k_1 a_0 a_1) y_*$$

$$\Psi_2 = a_0^{11/10} U_{00}^{9/5} p_{00}^{-17/10} \Psi, \quad x_* = a_0^{-2/5} U_{00}^{4/5} p_{00}^{-1/5} X, \quad t_* = a_0^{-9/10} U_{00}^{-1/5} p_{00}^{3/10} T$$

$$y_* = a_0^{-1/10} U_{00}^{1/5} p_{00}^{-3/10} Y, \quad A_1 = a_0^{3/5} U_{00}^{4/5} p_{00}^{-1/5} A, \quad p_* = a_0 U_{00}^2 p_{00}^{-1} P$$

задача о взаимодействии (1.3), (1.4) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{\partial P}{\partial X} - Y \frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial P}{\partial X} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A''(s, T)}{s-X} ds$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = g(X, T), \quad Y = 0 \quad (1.5)$$

$$\Psi = O(1), \quad Y \rightarrow +\infty; \quad \Psi = o(1), \quad X \rightarrow -\infty$$

Здесь через $g(X, T)$ обозначена функция $g = -1/2(A^2 - X^2 - 2a)$, которая в соответствии с (1.2) стремится к нулю при $X \rightarrow -\infty$. Постоянная $a = k_1 a_1 p_{00}^{3/5} a_0^{-1/5} U_{00}^{-9/5}$ представляет собой параметр подобия для течений рассматриваемого класса.

Задачу о взаимодействии (1.5) решим с помощью преобразований Фурье.

Применяя преобразование Фурье к уравнению (1.5) для функции тока Ψ и к граничным условиям для этой функции при $Y=0$ и при $Y=\infty$, получим следующую задачу:

$$\frac{d^3 \Phi}{dY^3} - \frac{1}{2} i \alpha Y^2 \frac{d\Phi}{dY} + i \alpha Y \Phi = F(\alpha, T) + YR(\alpha, T) \\ \Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dY} = G, \quad Y = 0; \quad \Phi = O(1), \quad Y \rightarrow +\infty \quad (1.6)$$

$$\Phi(\alpha, Y, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(X, Y, T) e^{-i\alpha X} dX$$

Здесь F, R, G — фурье-образы функций $\partial P/\partial X, \partial A/\partial T, g(X, T)$ соответственно. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.6), удовлетворяющее граничным условиям при $Y=0$, может быть записано в виде

$$\Phi = CY^2 + G(\alpha, T) \Phi_2 + F(\alpha, T) \Phi_1^* + R(\alpha, T) \Phi_2^*$$

$$\Phi_2 = \frac{2\Gamma(5/4)}{\theta e^{i\pi/4}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(5/4)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{1/2} + \frac{\xi}{8} \int_0^{\xi} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{3/2} \left[\frac{J_{1/4}(\xi)}{(\xi/2)^{1/4}} - \frac{1}{\Gamma(5/4)} \right] d\xi \right\}$$

$$\Phi_1^* = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(3/4)}{2\theta^3 e^{i3/4\pi}} \frac{\xi}{8} \int_0^{\xi} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{7/4} H_{1/4}(\xi) d\xi$$

$$\Phi_2^* = \frac{\Gamma(3/4)}{4\theta^4} \int_0^{\xi} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{7/4} \left[J_{-1/4}(\xi) - \frac{1}{\Gamma(3/4)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-1/4} \right] d\xi$$

Здесь C — произвольная комплексная постоянная, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $J_{1/4}$ и $J_{-1/4}$ — бesselевы функции первого рода порядка $1/4$ и $-1/4$ соответственно, $H_{1/4}$ — функция Струве порядка $1/4$, $\theta = (i\alpha/2)^{1/4}$, $\xi = i\alpha^2 Y^2/2$.

Используя известные асимптотики функций Бесселя и функции Струве при больших значениях аргумента, получим, что при $\xi \rightarrow \infty$

$$\Phi_2 = -\frac{\Gamma(5/4)}{2\pi^{1/2}\theta e^{i\pi/4}} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{5/4} \sin\left(\xi - \frac{3}{8}\pi\right) + \dots$$

$$\Phi_1^* = -\frac{\Gamma(3/4)}{8\theta^3 e^{i3/4\pi}} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{5/4} \cos\left(\xi - \frac{3}{8}\pi\right) + \dots$$

$$\Phi_2^* = \frac{\Gamma(3/4)}{2\pi^{1/2}i\alpha} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{5/4} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{8}\right) + \dots$$

Из этих соотношений следует, что функция Φ удовлетворяет граничному условию при $Y \rightarrow +\infty$ только тогда, когда

$$R(\alpha, T) = 2^{1/4} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} (i\alpha)^{3/4} G(\alpha, T) - \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/4}} (i\alpha)^{1/4} F(\alpha, T)$$

Применяя к этому соотношению обратное преобразование Фурье и используя выражение для градиента давления из (1.5), получим уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T} = -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial X} \int_{-\infty}^X \left[A^2(\xi, T) - \xi^2 - 2a - \lambda \int_{\xi}^{\infty} \frac{A''(s, T)}{(s-\xi)^{1/2}} ds \right] \frac{d\xi}{(X-\xi)^{1/2}} \quad (1.7)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma(5/4)}{2^{1/2}\pi}, \quad \lambda = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{1/2}\Gamma(5/4)}$$

которое представляет собой необходимое и достаточное условие существования решения задачи (1.5).

2. **Линейная теория устойчивости.** Представим решение уравнения (1.7) в виде

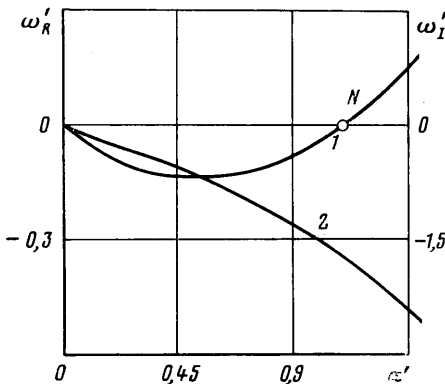
$$A(X, T) = A_0(X) + \varepsilon A_1(X, T) \quad (2.1)$$

$$A_0^2(X) - X^2 - 2a = \lambda \int_X^\infty \frac{A_0''(s)}{(s-X)^{1/2}} ds \quad (2.2)$$

Здесь $A_0(X)$ — решение стационарного уравнения (2.2), $A_1(X, T)$ — нестационарное возмущение, уравнение для которого может быть получено в результате подстановки (2.1) в (1.7) с последующим предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} = -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial X} \int_{-\infty}^X \left[2A_0(\xi) A_1(\xi, T) - \lambda \int_\xi^\infty \frac{A_1''(s, T)}{(s-\xi)^{1/2}} ds \right] \frac{d\xi}{(X-\xi)^{1/2}} \quad (2.3)$$

Если считать невозмущенный поток плоскопараллельным ($A_0 = \text{const}$), тогда любое решение уравнения (2.3) можно представить в виде суперпозиции волн Толлмина — Шлихтинга:



$A_1(X, T) = A_1^0 e^{\omega T + i\alpha X}$. Здесь α и в дальнейшем волновое число α полагается действительной величиной большей нуля; ω — комплексная постоянная. Подставляя выражение для $A_1(X, T)$ в (2.3) и используя интегральное представление гамма-функции Эйлера, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = e^{-i\pi/4} \pi \Gamma(1/4) \frac{\gamma}{2} \alpha^{3/4} (2A_0 + e^{i\pi/4} \pi^{1/2} \lambda \alpha^{1/2}) \quad (2.4)$$

Фиг. 3

Графически это соотношение изображено на фиг. 3. Цифрой 1 здесь обозначена функция $\omega_R' = \text{Re } \omega / A_0^{3/2}$, цифрой 2 — функция $\omega_I' = \text{Im } \omega / A_0^{3/2}$; по оси абсцисс отложена величина $\alpha' = \alpha / A_0^{2/3}$. Нейтральным колебаниям соответствует точка N, в которой $\text{Re } \omega = 0$. Это происходит при

$$\alpha = \frac{2}{\pi^{1/2}} \left[\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^{2/3} A_0^{3/2}, \quad \text{Im } \omega = \frac{4}{\pi^{1/4}} \cos \frac{\pi}{8} \left[\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^{2/3} A_0^{3/2} \quad (2.5)$$

При меньших значениях α возмущения затухают с течением времени, а при больших — возрастают. Таким образом, представленная теория описывает нижнюю ветвь нейтральной кривой. Заметим, что гипотеза плоскопараллельности, принятая при ее построении, является справедливой, когда $a \rightarrow +\infty$ (в п. 3 она подтверждается на основе строгой асимптотической теории). Этот предельный переход соответствует отдалению потока от его отрывного состояния. Тогда асимптотическое решение уравнения (2.2) принимает вид

$$A_0 = \sqrt{X^2 + 2a} \quad (2.6)$$

Поэтому длина волны нейтральных колебаний $2\pi/\alpha$ неограниченно уменьшается с ростом параметра a , вместе с ней уменьшается и вариация функции $A_0(X)$ за период колебаний.

3. Нелинейная теория устойчивости. Ограничимся изучением нейтральных колебаний. Соответствующие решения уравнения (1.7) будем искать

с помощью метода двухмасштабных разложений, устремляя параметр подобия задачи a к бесконечности. Дело в том, что при $a \rightarrow +\infty$ в задаче появляются два характерных масштаба изменения гидродинамических функций. Первый из них связан с медленным процессом развития пограничного слоя вдоль обтекаемой поверхности. При малых амплитудах возмущений этот процесс описывается соотношением (2.6). Поэтому медленная переменная метода двухмасштабных разложений определяется как $X_0 = a^{-1/2} X$. Вторым масштаб задачи связан с собственно автоколебательным движением жидкости. Исходя из выражений (2.5), заключаем, что для описания этого движения следует использовать быстрые переменные $X_* = a^{1/2} X$, $T_* = a^{1/4} T$.

Нелинейная теория устойчивости состоит в данном случае в поиске таких решений уравнения (1.7), которые являются периодическими функциями быстрых переменных. Представим искомое решение с помощью разложения в ряд Фурье

$$A(X, T) = a^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(X_0) e^{ikh}, \quad \eta = \alpha X_* - \omega T_* \quad (3.1)$$

Волновое число α и частота колебаний ω являются действительными величинами, зависящими только от медленной переменной X_0 . Для определенности будем считать, что $\alpha > 0$. Поскольку решение ищется в классе действительных функций, необходимо потребовать, чтобы $A_{-k} = \bar{A}_k$ для всех натуральных значений k . Чертой здесь обозначена комплексно-сопряженная величина.

Подставляя (3.1) в (1.7) и устремляя параметр подобия задачи a к бесконечности, получим (в качестве коэффициентов перед степенями функции e^{in}) следующую систему алгебраических уравнений для коэффициентов ряда Фурье:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m A_{-m} = X_0^2 + 2 \quad (3.2)$$

$$\left[k\omega - \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/4}} e^{i\pi/8} (k\alpha)^{3/4} \right] A_k = 2^{-3/4} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} e^{-i\pi/8} (k\alpha)^{1/4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m A_{k-m}, \quad k \geq 1$$

Процедура метода двухмасштабных разложений, использованная при ее получении, включает в себя выбор подходящей переменной интегрирования в уравнении (1.7). Для нулевой гармоники эта переменная была представлена через X_0 , а для остальных гармоник — через X_* .

Преобразование переменных

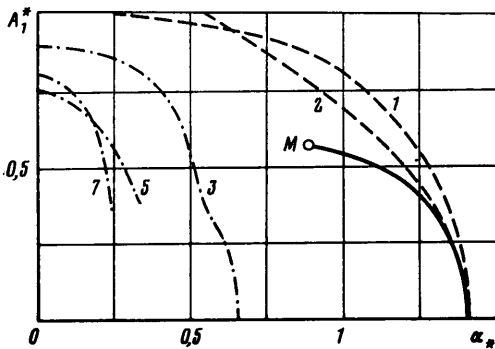
$$A_k = (1 + X_0^2/2)^{1/2} A_k^*, \quad \alpha = (1 + X_0^2/2)^{1/2} \alpha_*, \quad \omega = (1 + X_0^2/2)^{1/4} \omega_*$$

выражает собой зависимость решения от X_0 и позволяет представить систему (3.2) в виде

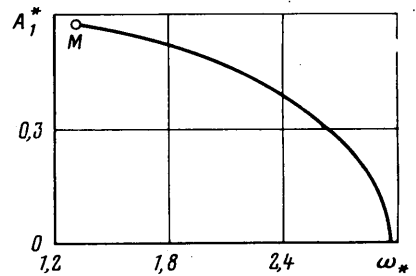
$$(A_0^*)^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m^* \overline{A_m^*} = 2$$

$$\begin{aligned} & \left(rk^{1/4} \frac{\omega_*}{\alpha_*^{3/4}} + qk^{1/2} \alpha_*^{1/2} \right) A_k^* - 2A_0^* A_k^* - 2A_{2k}^* \overline{A_k^*} = \\ & = 2 \sum_{m=k+1}^{\infty} A_{k+m}^* \overline{A_m^*} + \delta_k \sum_{m=1}^{k-1} (A_{k-m}^* A_m^* + 2A_{k+m}^* \overline{A_m^*}), \quad k \geq 1. \quad (3.3) \\ & r = 2^{3/4} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} e^{i\pi/8}, \quad q = -\frac{\pi^{1/2} \Gamma(3/4)}{2^{1/2} \Gamma(5/4)} e^{i\pi/4}, \quad \delta_k = \begin{cases} 0, & k=1 \\ 1, & k \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Эта система уравнений является инвариантной относительно группы преобразований $A_k^* \rightarrow A_k^* e^{ik\varphi}$ (φ — произвольная действительная постоянная), соответствующей изменению фазы нейтральных колебаний. Будем поэтому считать амплитуду первой гармоники A_1^* действительной.



Фиг. 4



Фиг. 5

Если A_1^* задано, тогда система уравнений (3.3) определяет амплитуды всех остальных гармоник, включая и нулевую, а также волновое число α_* и частоту нейтральных колебаний ω_* . В частности, при $A_1^* \rightarrow 0$

$$\alpha_* = 1,407 - 0,856(A_1^*)^2, \quad \omega_* = 2,970 - 3,532(A_1^*)^2 \quad (3.4)$$

$$A_0^* = \sqrt{2} - (A_1^*)^2 / \sqrt{2}, \quad A_2^* = -(0,150 - i0,179)(A_1^*)^2$$

Численное решение системы (3.3) осуществлялось с помощью итерационного процесса, включающего в себя линеаризацию системы по методу Ньютона с последующим применением процедуры Гаусса. Расчет проводился для последовательно возрастающих значений A_1^* . Минимальный шаг составлял 0,001. В качестве нулевого приближения выбиралось решение рассматриваемой системы при меньшем значении A_1^* . Первое из них базировалось на соотношениях (3.4). Число учитываемых гармоник N определялось потребной точностью расчета и доходило до 15.

Зависимость волнового числа α_* от амплитуды возмущений A_1^* , полученная в результате этих расчетов, изображена на фиг. 4 сплошной линией. Для сравнения здесь приведены результаты вычислений по моногармонической модели (штриховая линия 1) и с помощью асимптотической теории (штриховая линия 2). Первая из них получена из системы (3.3) при $N=1$, вторая является графическим изображением формулы (3.4). Частота нейтральных колебаний в зависимости от амплитуды возмущений A_1^* представлена на фиг. 5.

Отметим, что для всех $N > 7$ итерационный процесс, используемый при

решении системы (3.3), перестает сходиться, если только $A_1^* > 0,570$. При чем граница сходимости не зависит от числа учитываемых гармоник. При $3 \leq N \leq 7$ переход через эту границу сопровождался перестроением решения и выходом на вторую ветвь, обозначенную на фиг. 4 цифрами 3; 5 и 7 в зависимости от числа учитываемых гармоник. При больших значениях N вторую ветвь построить не удалось.

Эти обстоятельства, по-видимому, свидетельствуют об отсутствии решения системы уравнений (3.3) при $A_1^* > 0,570$. В граничной точке M волновое число и частота нейтральных колебаний принимают свои минимальные значения: $\alpha_* = 0,880$, $\omega_* = 1,313$.

В заключение отметим, что рост амплитуды возмущений приводит к смещению нейтральных колебаний в докритическую область, где, согласно линейной теории (фиг. 3), течение является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thwaites B.* Incompressible aerodynamics. Oxford: Clarendon Press, 1960. 636 p.
2. *Tani I.* Low-speed flows involving bubble separations.— In: Progr. Aeronaut. Sci. Oxford: Pergamon Press, 1964, v. 5, p. 70–103.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
4. *Smith F. T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1979, v. 366, № 1724, p. 91–109.
5. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1980. т. 253, № 6, с. 1326–1329.
6. *Милайлов В. В.* Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5.
7. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529, 124 с.
8. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Adv. Appl. Mech., v. 14, N. Y. e. a., 1974, p. 145–239.
9. *Рубан А. И., Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, 1979, т. 2, вып. 4, с. 57–95.
10. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, № 3, p. 465–485.
11. *Brown S. N., Daniels P. G.* On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate.— J. Fluid Mech., 1975, v. 67, № 4, p. 743–761.
12. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007–1023.
13. *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 42–52.
14. *Рубан А. И.* Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 42–51.
15. *Stuart J. T.* Nonlinear stability theory.— In: Ann. Rev. Fluid Mech., v. 3. California: Palo Alto, 1971, p. 347–370.
16. *Stewartson K.* Some aspects of non-linear stability theory.— Fluid Dynam. Trans., 1974, v. 7, pt 1, p. 101–127.
17. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
18. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows.— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, № 3, p. 353–370.
19. *Smith F. T.* Nonlinear stability of boundary layers for disturbances of various sizes.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1979, v. 368, № 1735, p. 573–589.
20. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
21. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638–655.
22. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, отвечающих от течения Пуазейля в плоском канале.— Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, с. 791–794.
23. *Meksyn D., Stuart J. T.* Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1951, v. 208, № 1095, p. 517–526.
24. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Модельные автоколебания и турбулентность.— В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, 1974, с. 17–25.