

УДК 532.52.031

**СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОТОКОМ  
ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ**

**ЖИТНИКОВ В. П., ТЕРЕНТЬЕВ А. Г.**

В связи с техническим применением различных надувных конструкций теоретическое изучение обтекания мягких цилиндрических оболочек приобретает практический интерес. К настоящему времени наиболее полно исследованы вопросы, относящиеся главным образом к задачам о парусе [1-3] и к безотрывному обтеканию замкнутой оболочки, ограничивающей область постоянного давления [4, 5]. По струйному обтеканию мягкого баллона получены лишь частные результаты, относящиеся к истечению из-под наклоненного щита, заканчивающегося мягкой оболочкой [6].

Ниже подробно изучается задача об обтекании по схеме Кирхгофа мягкой оболочки с одной и двумя закрепленными точками. Жидкость считается идеальной несжимаемой и невесомой. Показано численно, что при уменьшении давления в мягком баллоне возможны неоднородные течения и волнообразная деформация оболочки.

1. Пусть мягкая цилиндрическая оболочка закреплена в двух точках  $A$  и  $B$ . В точке  $C$  оболочки происходит отрыв потока. На фиг. 1,  $a$  показана нижняя половина течения. Вдоль свободной границы  $CD$  величина скорости постоянна и равна скорости потока на бесконечности ( $|v|=v_\infty = \text{const}$ ).

Степень наполнения оболочки характеризуется числом  $\mu = 2(P_0 - P_\infty) / \rho v_\infty^2$ , где  $P_0$  — давление внутри оболочки,  $P_\infty$  — давление жидкости на бесконечности,  $\rho$  — плотность жидкости. На смачиваемой поверхности оболочки  $AC$  должно выполняться условие Лапласа  $R^{-1} = (P_0 - P) / T$ , где  $R$  — радиус кривизны оболочки ( $R > 0$ , если оболочка выпукла в сторону жидкости),  $P$  — давление жидкости на оболочку,  $T$  — натяжение оболочки. Это условие целесообразно записать в дифференциальной форме

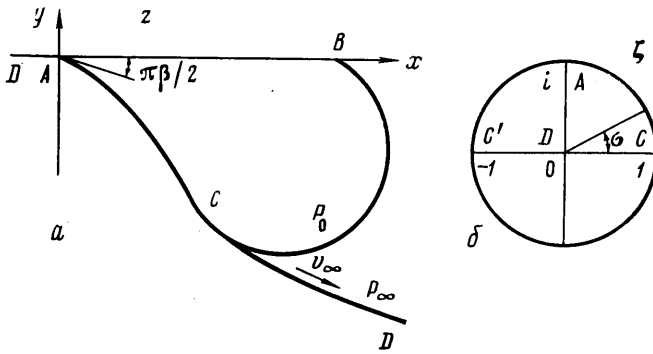
$$d\theta = \rho v_\infty^2 \left( \mu - 1 + \left( \frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right) \frac{dS}{2T} \quad (1.1)$$

где  $\theta$  — угол между вектором скорости и осью  $x$ ,  $S$  — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки  $A$ . Участок оболочки  $CB$  представляет дугу окружности радиуса  $R_0 = 2T / \mu \rho v_\infty^2$ . Обозначим через  $\alpha$  центральный угол дуги  $CB$ , через  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  — углы наклона касательной в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  оболочки. Тогда длина  $L$  всей оболочки  $ACB$  и расстояние  $l$  между точками закрепления  $AB$  будут равны

$$L = \int_{AC} dS + \alpha R_0, \quad l = \int_{AC} \cos \theta dS + R_0 [\sin(\theta_C + \alpha) - \sin \theta_C] \quad (1.2)$$

Здесь  $\theta(S)$  — угол наклона вектора скорости на поверхности  $CA$ . Ордината точки  $B$  равна нулю, поэтому

$$\int_{AC} \sin \theta dS - R_0 [\cos(\theta_C + \alpha) - \cos \theta_C] = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

2. Обтекание оболочки эквивалентно симметричному обтеканию некоторого клина с криволинейными щеками и с углом раствора при вершине  $\pi\beta = -2\theta_A$ , поэтому можно воспользоваться известными методами теории струй [7]. Здесь применим метод Леви — Чивита. Для этого отобразим область течения в физической плоскости  $z$  на внутренность единичного полукруга вспомогательной плоскости  $\zeta$  ( $|\zeta| \leq 1, \text{Im } \zeta \geq 0$ ). Соответствие точек видно из фиг. 1.

Комплексный потенциал [7]

$$w = \frac{a^2}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2 \quad (2.1)$$

где  $a$  — действительная постоянная.

На дуге окружности ( $\zeta = e^{i\sigma}$ )  $w = \varphi = a^2 \cos^2 \sigma$ . Отсюда производная  $d\varphi/d\sigma = -a^2 \sin 2\sigma$  и, следовательно, дифференциал функции  $S(\sigma)$

$$dS = -\frac{a^2}{v} \sin 2\sigma d\sigma \quad (2.2)$$

где  $v$  — величина скорости жидкости на дуге  $AC$ .

С учетом последнего равенства условие (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\lambda \left( (\mu-1) \frac{v_\infty}{v} + \frac{v}{v_\infty} \right) \cos \sigma \sin \sigma, \quad \lambda = \frac{\rho v_\infty a^2}{T} \quad (2.3)$$

Отсюда нетрудно установить поведение функции  $\theta(\sigma)$  вблизи критической точки  $A$  ( $\sigma = \pi/2$ ). Поскольку вблизи угловых точек скорость  $v \approx v_\infty |\sigma - \pi/2|^\beta$ , то из (2.3) следует

$$\frac{d\theta}{d\sigma} \approx -\lambda \left( \frac{\mu-1}{\gamma} \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right)^{1-\beta} + \gamma \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right)^{1+\beta} \right), \quad \sigma \rightarrow \frac{\pi}{2} \left( \sigma < \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.4)$$

После интегрирования и замены разности  $\pi/2 - \sigma$  на эквивалентную величину  $\cos \sigma$  имеем

$$\theta \approx \theta_A + \lambda \left( \frac{\mu-1}{(2-\beta)\gamma} \cos^{2-\beta} \sigma + \frac{\gamma}{2+\beta} \cos^{2+\beta} \sigma \right), \quad \beta = -\frac{2\theta_A}{\pi} \quad (2.5)$$

Здесь параметр  $\beta$  может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Поэтому в (2.4) и (2.5) сохранены оба слагаемых, хотя они являются малыми величинами разного порядка.

Переходя к определению функции Леви — Чивита  $\omega = i \ln(dw/v_\infty dz) = -\theta + i \ln(v/v_\infty)$ , представим ее в виде

$$\omega = \beta i \ln \frac{1 + \zeta i}{1 - \zeta i} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \zeta^{2m+1} + \omega_2 \quad (2.6)$$

где первые две функции совпадают с представлением Леви — Чивита (см. [7]).

Слагаемое  $\omega_2$ , которое отсутствует в методе Леви — Чивита, введено для того, чтобы учесть поведение производной  $d\theta/d\sigma$  вблизи точки  $\sigma = \pi/2$ . Оно должно также удовлетворять условиям:  $\operatorname{Re} \omega_2 = 0$  на  $DA$  и  $\operatorname{Im} \omega_2 = 0$  на  $CD$ . Легко проверить, что всем этим требованиям удовлетворяет функция

$$\omega_2 = \lambda \zeta \left[ B_1 \left( \frac{\zeta^2 + 1}{2} \right)^{2-\beta} + B_2 \left( \frac{\zeta^2 + 1}{2} \right)^{2+\beta} \right] \quad (2.7)$$

$$B_1 = -\frac{\mu - 1}{(2 - \beta) \gamma \sin(\pi\beta/2)}, \quad B_2 = \frac{\gamma}{(2 + \beta) \sin(\pi\beta/2)} \quad (2.8)$$

С учетом функций (2.6), (2.7) нетрудно найти угол наклона и величину вектора скорости на дуге  $AC$  и определить конфигурацию самой дуги  $AC$

$$\begin{aligned} \theta = \theta_A + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \cos(2m+1)\sigma + \\ + \lambda (B_1 \cos(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta}\sigma + B_2 \cos(3+\beta)\sigma \cos^{2+\beta}\sigma) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} v = v_\infty \left( \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right)^\beta \exp \left[ \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma + \right. \\ \left. + \lambda (B_1 \sin(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta}\sigma + B_2 \sin(3+\beta)\sigma \cos^{2+\beta}\sigma) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin 2\sigma \frac{d\sigma}{v}, \quad y = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin 2\sigma \frac{d\sigma}{v}, \quad \sigma \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.11)$$

Используя соотношение (2.10), вычислим параметр  $\gamma$ :

$$\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{v}{v_\infty \cos^\beta \sigma} = 2^{-\beta} \exp \left( \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_{2m+1} \right) \quad (2.12)$$

В точке отрыва при  $\sigma = 0$  должны выполняться условие (2.3) и условие конечности кривизны струи (условие Бриллюэна)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 c_{2m+1} + \lambda \{ B_1 [2-\beta + (3-\beta)^2] + B_2 [2+\beta + (3+\beta)^2] \} = \lambda \mu \quad (2.13)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m+1} + \lambda [B_1 (3-\beta) + B_2 (3+\beta)] - \beta = 0 \quad (2.14)$$

В критической точке ( $\sigma=\pi/2$ ) условие (2.3) приводит к равенству

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) (-1)^m c_{2m+1} = 0 \quad (2.15)$$

С помощью интеграла Бернулли  $P-P_{\infty}=\rho(v_{\infty}^2-v^2)/2$  нетрудно найти распределение давления и вычислить результирующую силу давлений  $X+iY$  на гибкий контур  $AC$ . В частности, сопротивление всей оболочки может быть получено по формуле Леви — Чивита [7]

$$X = \frac{\pi \rho v_{\infty} a^2}{4} \left[ -2\beta + c_1 + \lambda \left( \frac{B_1}{2^{2-\beta}} + \frac{B_2}{2^{2+\beta}} \right) \right] \quad (2.16)$$

3. Числовые расчеты были проведены с сохранением первых  $N$  членов в сумме (2.6). При двух закрепленных точках  $A$  и  $B$  наряду с параметром  $\mu$  задавалось отношение  $L/l$ . В случае одной закрепленной точки  $A$  вместо отношения  $L/l$  использовалось равенство  $\theta_B=\pi/2$ . Условие (2.3) удовлетворялось в отдельных точках дуги  $AC$

$$\left( \sigma_m = \frac{1}{2} \pi m / (N-1), m=1, 2, \dots, N-2 \right).$$

Получаемая при этом система нелинейных уравнений (совместно с уравнениями (1.2), (1.3) и (2.13)–(2.15)) решалась относительно параметров  $\alpha, \lambda, \beta, c_{2m+1}$  ( $m=0, 1, \dots, N-1$ ),  $a^2$  с помощью метода Ньютона с минимизацией на каждой итерации штрафной функции, равной сумме квадратов невязок по всем уравнениям. Все геометрические и гидродинамические величины: радиус  $R_0$ , натяжение  $T$ , координаты точки отрыва ( $x_c, y_c$ ), угол  $\theta_A$ , давление  $P$  и др. могут быть выражены через эти параметры.

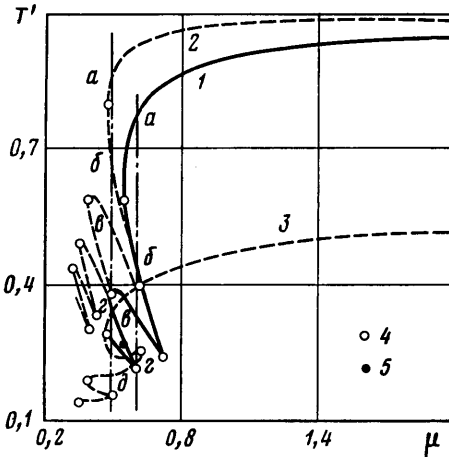
С целью выяснения влияния количества сохраняемых членов на искомые динамические и геометрические параметры был просчитан ряд примеров при  $N=6, 11, 16$  и  $21$ . Ниже представлены значения угла наклона  $\theta_A$ , коэффициента сопротивления  $c_X$ , максимальной относительной погрешности величины натяжения по всем точкам оболочки  $\Delta T_{\max}/T$  для  $\mu=2, L/l=3$ . Последние три столбца рассчитаны при  $\omega_2=0$ , при этом условие Лапласа в точке  $A$  не выполняется и  $\Delta T_{\max}/T$  не имеет смысла:

$c_X=2X/\rho v_{\infty}^2 l$ , абсциссы точки отрыва  $C(x_c/l)$ , максимальной относительной погрешности величины натяжения по всем точкам оболочки  $\Delta T_{\max}/T$  для  $\mu=2, L/l=3$ . Последние три столбца рассчитаны при  $\omega_2=0$ , при этом условие Лапласа в точке  $A$  не выполняется и  $\Delta T_{\max}/T$  не имеет смысла:

$N$	$-\theta_A$	$c_X$	$x_c/l$	$\Delta T_{\max}/T$	$-\theta_A$	$c_X$	$x_c/l$
6	1,824	0,6522	0,1817	0,1	1,677	0,6527	0,1912
11	1,834	0,6521	0,1810	0,05	1,747	0,6522	0,1844
16	1,836	0,6521	0,1809	0,035	1,772	0,6521	0,1826
21	1,836	0,6521	0,1809	0,025	1,786	0,6521	0,1820

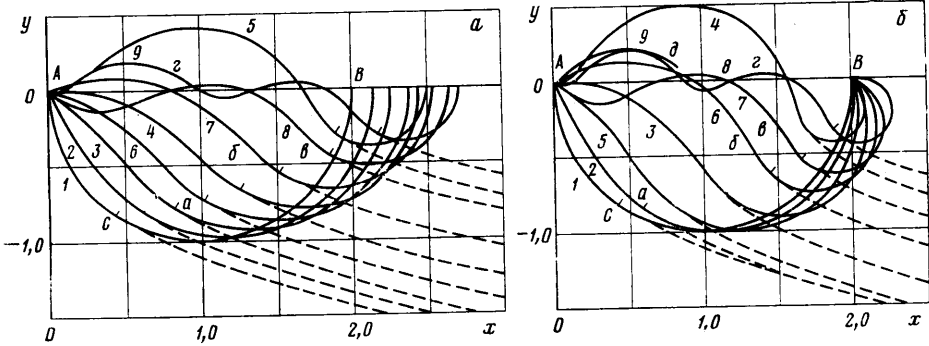
Расчеты показывают, что предложенный здесь метод представления функции Леви — Чивита значительно улучшает сходимость ряда и сокращает объем вычислений.

Результаты числовых расчетов представлены на фиг. 2–5. На фиг. 2 показана зависимость от числа  $\mu$  безразмерного коэффициента натяжения  $T'=T/T_0$ , где  $T_0=(P_0-P_{\infty})R_1$  — натяжение оболочки в покоящейся жидкости;  $R_1$  — радиус дуги окружности длины  $L$ , опирающейся на хорду  $l$ , который определяется из уравнения  $l=2R_1 \sin(L/2R_1)$ . Кривая 1 получена для оболочки с двумя закрепленными точками при  $L/l=\pi/2$ , кривая 2 — для оболочки с одной закрепленной точкой. В последнем случае отноше-

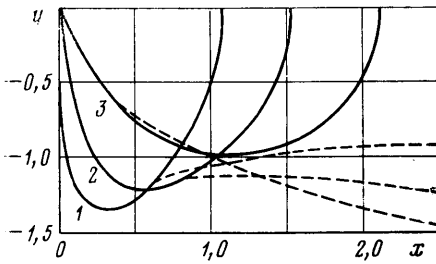


Фиг. 2

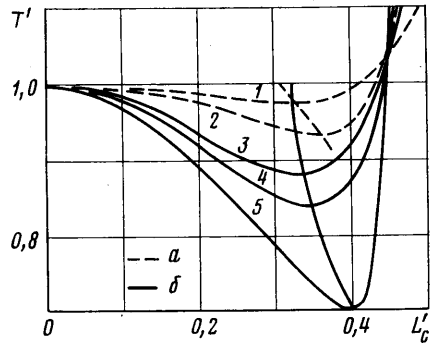
ние  $L/l$  зависит от числа  $\mu$ . Зависимость  $L/l-1$  характеризуется кривой 3. Из рассмотрения кривых видно, что в интервале ( $1 \leq \mu \leq \infty$ ) число  $\mu$  влияет на основные характеристики незначительно, однако с уменьшением числа  $\mu$  его влияние становится весьма существенным. Нарушается монотонность, кривые имеют вертикальные касательные и пересекаются в нескольких точках с горизонтальными и вертикальными прямыми. Например, точки пересечения кривых 1 и 2 с прямыми  $\mu=0,6$  и  $0,5$ , показанные



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

на фиг. 2, обозначены буквами  $a-d$ . Этим точкам соответствуют различные конфигурации оболочки (на фиг. 3 соответствующие конфигурации обозначены дополнительно теми же буквами). На фиг. 3,  $a$  показана конфигурация оболочки с одной неподвижной точкой ( $\theta_B = \pi/2$ ), на фиг. 3,  $b$  — с двумя неподвижными точками для  $L/l = \pi/2$ . Кривые 1-5 на фиг. 3,  $a$  соответствуют  $\mu = \infty, 1, 0,6, 0,476$  и  $0,626$ ; кривые 1-4 на фиг. 3,  $b$  —  $\mu = \infty, 1, 0,546$  и  $0,722$ . Последние две конфигурации на обеих фигурах характерны тем, что для них точка закрепления  $A$  не является критической ( $\theta_A = 0$ ). На фиг. 2 точки с  $\theta_A = 0$  обозначены 4, точке 5 отвечает  $\theta_B = \pi$ .

Представленные расчеты позволяют сделать вывод о том, что стационарные течения возможны лишь при числах  $\mu$ , больших некоторого значения  $\mu_0$  (для оболочки с одной закрепленной точкой  $\mu_0 \approx 0,7$ , для оболочки с двумя закрепленными точками критическое число  $\mu_0$  зависит от отношения  $L/l$ ). С уменьшением числа  $\mu$ , по-видимому, происходит потеря устойчивости стационарного течения и процесс становится нестационарным. Данный теоретический вывод ждет экспериментального подтверждения.

До сих пор рассматривался плавный отрыв струи, т. е. выполнялось условие Бриллюэна (2.14). Вместо этого условия можно, однако, задавать точку отрыва  $C$  или угол  $\theta_c$ . На фиг. 4 показана конфигурация оболочки и форма свободной границы с одной закрепленной точкой при заданном числе  $\mu=1$  и разных точках отрыва  $L_c' = L_c/L$  ( $L_c$  — длина дуги  $AC$ ,  $L$  — длина оболочки  $AB$ ). Кривые 1, 2 и 3 соответствуют  $L_c' = 0,67; 0,55; 0,27$ . Расчеты показывают, что при  $L_c < L_0$  ( $L_0$  — длина дуги  $AC$  при выполнении условия (2.14)) свободные струи пересекают поверхность оболочки (кривая 1), т. е. однолистное течение возможно лишь при  $L_c \geq L_0$ . С увеличением отношения  $L_c/L$  на поверхности оболочки возникает разрежение, что приводит к вытягиванию оболочки в направлении, перпендикулярном потоку. При  $L_c > 0,7L$  свободная линия пересекает ось  $x$ , т. е. течение опять становится неодностным. Зависимость коэффициента натяжения  $T'$  оболочки от  $L_c'$  (фиг. 5) имеет минимум при  $L_c = L_0(\mu)$  как для одной (кривые 1 и 2), так и для двух закрепленных точек (кривые 3–5). Кривые 1 и 2 соответствуют  $\mu=1$  и 0,6; кривые 3, 4 и 5 —  $\mu=1, 0,8$  и 0,6;  $L/l=2$ . Как показывают численные исследования, при  $L_c = L_0$  экстремальные значения принимают и другие интегральные характеристики (например, коэффициент сопротивления). Аналогичные выводы были сделаны ранее Терентьевым А. Г. и Гладковой Н. А. при исследовании обтекания кругового цилиндра (см. [7], с. 128).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
2. Digan J. P. A free-streamline model of the two-dimensional sail.— J. Fluid Mech., 1970, v. 42, № 3, p. 433–446.
3. Киселев О. М., Федяев В. Л. О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения.— Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Казанск. ун-т, 1974, вып. 11, с. 73–82.
4. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости.— Уч. зап. Моск. ун-та, 1951, вып. 152, с. 61–75.
5. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 13–23.
6. Галина И. Л. Истечение струи из канала с гибким ограждением.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 91–98.
7. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

Уфа, Чебоксары

Поступила в редакцию  
19.V.1981