

УДК 532.517.4:518.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

ПРИЙМАК В. Г., РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л.

Изучается двухмерное течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале при сверхкритическом числе Рейнольдса $Re=10^4$. Расчет течения на значительном отрезке времени приводит к установлению статистически стационарного режима течения и стабилизации его осредненных характеристик (профиль средней скорости, средний градиент давления, энергия пульсаций и т. д.). Проведенные расчеты показывают, что численное моделирование турбулентного течения несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье – Стокса приводит к качественно правильным характеристикам этого режима течения.

1. Вводимые замечания. Постановка задачи о течении вязкой жидкости в канале (или трубе) конечной длины достаточно неопределенна в первую очередь потому, что число условий на входе и выходе канала, которые могут контролироваться в реальном эксперименте, недостаточно для полной математической формулировки этой задачи. Поэтому математическое описание реальных экспериментов во многих случаях неоднозначно и исходит из некоторых дополнительных гипотез. Например, предполагается, что характеристики турбулентного (и, конечно, ламинарного) течения внутри канала вдали от входа и выхода не зависят от осевой координаты, если при этом фиксированы некоторые основные граничные условия, например расход жидкости или средний градиент давления. Эксперименты, по-видимому, подтверждают это предположение, однако оно не формулируется в виде необходимых для математической постановки краевых условий.

По этим причинам при теоретическом рассмотрении обычно ограничиваются идеальной задачей о течении жидкости в бесконечном канале и в качестве краевых условий требуют ограниченности параметров течения. В такой постановке рассматривается, в частности, линейная задача об устойчивости течения жидкости в канале.

Численное моделирование течения в канале бесконечной длины — не-реальная задача. Поэтому рассматривается другая задача в бесконечном канале — течение, определяемое начальным полем скорости жидкости, периодическим по длине канала. В этой задаче достаточно найти ее решение лишь в прямоугольнике Π : на участке канала длиной $2l$, где $2l$ — период начального поля скорости. Эту задачу можно численно моделировать на ЭВМ.

Вопрос о соответствии такой постановки задачи реальному эксперименту решается сравнением результатов. Можно надеяться, что совпадение будет удовлетворительным при достаточно большом l .

Другая сложность, специфическая для турбулентных течений, состоит в интерпретации результатов. Одно из основных положений статистической гидромеханики состоит в том, что характеристиками турбулентного течения, получаемыми из экспериментов или расчетов, должны быть средние по ансамблям течений со всевозможными начальными условиями. Подобный подход также почти неприемлем при практических расчетах на ЭВМ.

Значительный интерес представляет численная реализация истории течения на достаточно большом отрезке времени даже с одним начальным полем скоростей. Во-первых, даже одно течение уже представляет некоторое множество различных течений, так как поле скоростей этого течения в любой момент времени можно рассматривать как начальное. Поэтому даже одно турбулентное течение может оказаться «достаточно представительным». Во-вторых, некоторые осредненные характеристики течения, такие, как средние скорости, распределение энергии пульсаций по спектру и др., могут быть устойчивыми и могут не зависеть от начального поля скоростей.

Численное моделирование турбулентного течения требует расчета на значительном или даже очень большом отрезке времени. Это предъявляет особые требования к вычислительному алгоритму, к методам сравнения получаемых решений и к оценке их точности.

Первое требование, которое отсюда вытекает, есть требование устойчивости получаемых результатов, т. е. требование устойчивости нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей задачу. Так как методы априорного определения устойчивости или неустойчивости нелинейных разностных схем практически отсутствуют, то следует избегать применения вычислительных алгоритмов, которые накапливают неконтролируемые ошибки. В связи с этим в расчетах применялись лишь схемы, которые обладают «свойством нейтральности» [1]. Это свойство означает, что нелинейные члены разностных уравнений не вносят непосредственного вклада в производство полной энергии пульсаций и оно обеспечивает «нелинейную устойчивость» разностной схемы. Нейтральные разностные схемы построены также в [2, 3].

Второе требование к численному алгоритму состоит в том, что наряду с устойчивостью он должен быть достаточно точным, чтобы правильно отражать линейную неустойчивость ламинарного течения при сверхкритических числах Рейнольдса. Эти вопросы рассматривались в [4–6]. Оказывается, что большинство разностных схем требует слишком мелких сеток и малого шага по времени, т. е. больших затрат времени ЭВМ. Более перспективным оказывается метод Галеркина (спектральный метод), который при удачном выборе базисных функций может быть достаточно точным, чтобы правильно отражать спектральные свойства течения Пуазейля, и одновременно достаточно экономным [6–7].

Характерной чертой турбулентного движения является пульсационный характер изменения во времени и пространстве локальных величин: скорости, давления. Пульсируют, как известно из практики, и спектральные разложения локальных величин, как коротковолновые, так и длинноволновые. Короткие волны затухают быстрее длинных вследствие действия вязкости, и их постоянное присутствие в турбулентном потоке вызвано нелинейным взаимодействием волн: они получают энергию от длинных волн, которые в свою очередь получают энергию из внешнего источника.

Интерес к волнам различных масштабов определяется спецификой задачи, спецификой применения получаемых результатов. В этой работе решается задача моделирования крупномасштабной турбулентности, т. е. волн наибольших характерных масштабов. Поскольку при значительных α все волны затухают в линейном приближении (α — волновое число волны в направлении оси канала x , ширина канала принята равной 2), то при рассмотрении крупномасштабной турбулентности следует учитывать как волны с $\alpha \ll 1$, так и с $\alpha \gg 1$. Минимальное волновое число $\alpha_0 = \pi/l$ соответствует самым длинным волнам в задаче с периодическими начальными условиями ($\lambda_0 = 2l$). Таким образом, при рассмотрении крупномасштабной турбулентности следует брать $l \gg \lambda$. Максимальное волновое число

$\alpha_m = M\alpha_0$ следует выбирать так, чтобы энергия, передаваемая турбулентным потоком коротковолновым колебаниям с волновыми числами $\alpha > \alpha_m$, была мала по сравнению с энергией крупномасштабных колебаний (учитываемых волн). Эти оценки определяют степень подробности описания параметров течения в направлении оси канала.

Что же касается подробности описания в направлении оси y , то она определяется требованием правильного отражения неустойчивости течения Пуазейля относительно возмущений с $\alpha \sim 1$ [6]. Для большинства разностных схем это требование приводит к мелким сеткам в направлении оси y — порядка 100 точек на всю ширину канала, а также к мелкому шагу τ по времени. Применение спектральных разложений в методе Галеркина снижает эту цифру; при удачном выборе базисных функций в направлении y достаточно 60—70 степеней свободы.

Из этих оценок следует, что для удовлетворительного моделирования крупномасштабной турбулентности в плоском канале необходима очень большая подробность описания течения. Поэтому особое значение приобретает возможность счета с крупным шагом τ по времени и по наиболее простым схемам.

Используется особая схема интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода Галеркина по времени, которая почти не вносит схемной вязкости и тем не менее устойчива при значительном шаге τ . Эта схема [1] базируется на методе суммарной аппроксимации. На каждом шаге система обыкновенных дифференциальных уравнений расщепляется на линейную систему и систему с квадратичной нелинейностью. Линейная система, аппроксимирующая задачу линейной теории устойчивости, с помощью метода Пикара [8] интегрируется точно. После этого интегрируется нелинейная система, причем так, что полная энергия пульсаций сохраняется. Этот процесс повторяется на каждом шаге по времени. В результате получаем модель, которая хорошо аппроксимирует основные свойства турбулентных течений.

Ранее нелинейное взаимодействие возмущений плоского течения Пуазейля как в докритической, так и в сверхкритической области рассматривалось (в предположении малости амплитуд возмущений) в [9, 10]. Были проведены расчеты, соответствующие двум постановкам задачи: с постоянным расходом и с заданным градиентом давления. Численное моделирование нелинейного развития возмущений в докритической области для задачи с фиксированным градиентом давления проводилось в [11]. Рассматривался короткий канал длиной $2l$ при ширине равной 2.

Задача о численном моделировании турбулентной конвекции на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса рассматривалась в [12—14].

2. Постановка задачи и представление приближенного решения. Рассматривается двухмерное течение несжимаемой вязкой жидкости в канале, стенки которого — бесконечные плоские пластины ($y = \pm 1$). На стенках выполнено условие прилипания; расход жидкости через поперечное сечение канала фиксирован; вдоль канала ставятся условия периодичности с периодом $2l$. Течение Пуазейля с параболическим профилем скорости, удовлетворяющее указанным условиям, неустойчиво при больших числах Рейнольдса. В этой работе изучается эволюция во времени возмущений плоского течения Пуазейля методом непосредственного численного интегрирования нестационарных нелинейных уравнений Навье — Стокса.

Обсуждаемая задача сводится к определению в прямоугольнике Π : $|x| \leq l$, $|y| \leq 1$ на заданном отрезке времени функций $\psi(t, x, y)$ и $\omega(t, x, y)$. Для этих функций ставится следующая краевая задача:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + D(\omega, \psi) = L(\omega, \psi), \quad \omega = -\Delta \psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) \quad (2.1)$$

$$L(\omega, \psi) = \nu \Delta \omega - (1 - y^2) \omega_x + 2\psi_x, \quad D(\omega, \psi) = \omega_x \psi_y - \omega_y \psi_x \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \psi(t, x, \pm 1) = \psi_y(t, x, \pm 1) = 0, \quad \psi(t, x+2l, y) = \psi(t, x, y) \\ \psi(0, x, y) = \psi_0(x, y), \quad \psi_0(x+2l, y) = \psi_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\psi(t, x, y)$ и $\omega(t, x, y)$ — флуктуации функции тока и вихря, т. е. отклонения функции тока и вихря от их значений на течении Пуазейля. Поэтому вектор полной скорости $\{u, v\} = \{1 - y^2 + \psi_y, -\psi_x\}$, а вектор $\{u', v'\} = \{\psi_y, -\psi_x\}$ — флуктуация скорости.

Приближенное решение задачи (2.1)–(2.3) ищется в виде

$$\begin{aligned} \psi^{MN}(t, x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N [C_{mn}^{ss}(t) \psi_{mn}^{ss}(x, y) + C_{mn}^{sa}(t) \psi_{mn}^{sa}(x, y)] + \\ + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [C_{mn}^{as}(t) \psi_{mn}^{as}(x, y) + C_{mn}^{aa}(t) \psi_{mn}^{aa}(x, y)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_{mn}^{ss}(x, y) = \cos m\alpha_0 x \psi_n^s(y); \quad \psi_{mn}^{as}(x, y) = \sin m\alpha_0 x \psi_n^s(y) \\ \psi_n^s(y) = (-1)^{n-1} + \cos \pi n y \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{mn}^{sa}(x, y) = \cos m\alpha_0 x \psi_n^a(y); \quad \psi_{mn}^{aa}(x, y) = \sin m\alpha_0 x \psi_n^a(y) \\ \psi_n^a(y) = \sin \frac{\pi y}{2} + (-1)^{n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\alpha_0 = \pi/l.$$

Применяется метод Галеркина. Подставляем ψ^{MN} и $\omega^{MN} = -\Delta \psi^{MN}$ вместо ψ и ω в систему (2.1) и проецируем первое уравнение этой системы на базисные функции (2.5), (2.6). В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]) вида

$$\frac{dc}{dt} + D(C) = L(C); \quad C = \{C_{mn}^{ss}, C_{mn}^{sa}, C_{mn}^{as}, C_{mn}^{aa}\} \quad (2.7)$$

Здесь C — вектор, имеющий $2(2M+1)N$ компонент; $L(C) = AC$ — линейная функция вектора C , соответствующая члену $L(\omega, \psi)$, и $D(C)$ — квадратичная функция вектора C , соответствующая нелинейному члену $D(\omega, \psi)$.

На каждом шаге по времени определение значения C^{j+1} вектора C осуществляется в два этапа. На первом этапе на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ точно решается задача Коши для линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} = AC_1; \quad C_1(t_j) = C^j \\ C_1^{j+1} = C_1(t_{j+1}) = e^{A\tau} C^j, \quad \tau = t_{j+1} - t_j \end{aligned}$$

На втором этапе на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ приближенно решается задача Коши для нелинейной системы

$$\frac{dC}{dt} = -D(C); \quad C(t_j) = C_1^{j+1} \quad (2.8)$$

Применялись две схемы интегрирования по времени нелинейной задачи (2.8): явная схема первого порядка точности и неявная схема второго порядка точности. Формулы и более подробные объяснения для этих схем приведены в [1]. Здесь отметим, что обе эти схемы являются энергетически нейтральными, т. е. обладают свойством сохранять полную энергию пульсаций

$$\begin{aligned} E(t) = \iint_{\Pi} \psi^{MN}(t, x, y) \omega^{MN}(t, x, y) dx dy = \\ = \iint_{\Pi} \frac{u'^2 + v'^2}{2} dx dy = E^{MN}(C) \end{aligned}$$

на втором этапе (решения нелинейной задачи (2.8)). Обе эти схемы решения задачи (2.8) приводят к выполнению соотношения $E^{MN}(C^{j+1}) = E^{MN}(C_1^{j+1})$. Это свойство полностью отвечает характеру нелинейных взаимодействий в задаче (2.1)–(2.3) и, в частности, гарантирует ограниченность приближенных решений системы (2.7) на любом конечном отрезке времени.

3. Исходные данные и результаты расчета. Для полного определения модели необходимо задать следующие основные параметры: число Рейнольдса $Re=1/\nu$; период начальных условий и решения — $2l$; числа M и N , определяющие подробность описания течения по осям x и y соответственно; шаг по времени τ . Кроме того, задается начальная функция $\psi_0(x, y)$ или, что то же, начальные значения $(2M+1)2N$ коэффициентов $C_{mn}^{ss}, C_{mn}^{as}, C_{mn}^{sa}, C_{mn}^{aa}$.

Помимо этих основных задаются также дополнительные параметры, которые определяются основными параметрами и деталями численной модели, программой расчета на ЭВМ и т. п. На их выборе останавливаться не будем.

Расчет производился при $Re=10^4$, что связано с хорошей изученностью задачи линейной теории устойчивости при этом числе Рейнольдса. Период $2l=2\pi/\alpha_0 \approx 42$ ($\alpha_0=0,15$) и число $M=15$ выбраны так, что выполняются следующие условия.

Среди учитываемых моделью (2.4) гармоник $e^{im\alpha_0 x}$ ($m=0, 1, \dots, 15$) две гармоники ($m=6, 7$) принадлежат интервалу неустойчивости течения Пуазейля при $Re=10^4$.

Учитываемые гармоники $m=0, 1, \dots, 15$ содержат длинные волны при $m < 6$, а также и более короткие при $m > 7$. Максимальное волновое число $\alpha_m=2,25$ находится в области сравнительно быстрого затухания возмущений по линейной теории. Надо, однако, заметить, что в дальнейшем следует провести расчеты и с большим числом гармоник M .

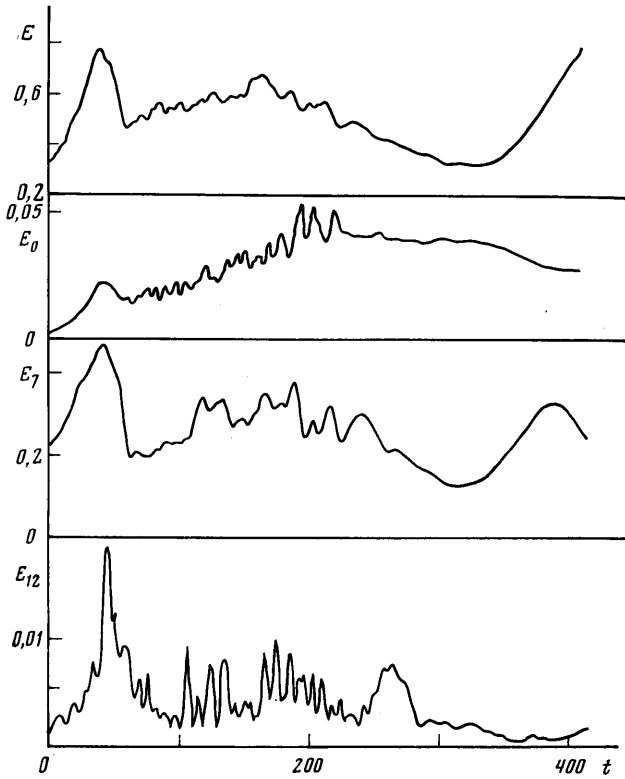
Число $N=40$ гарантирует хорошую точность описания моделью (2.4) линейного этапа развития возмущений. Размерность модели (число степеней свободы) $2N(2M+1)=2480$.

Шаг по времени τ определялся экспериментально, так как он зависит от характера нелинейных взаимодействий (линейные взаимодействия учитываются точно при любом шаге τ). В основном расчете принят шаг $\tau=0,1$.

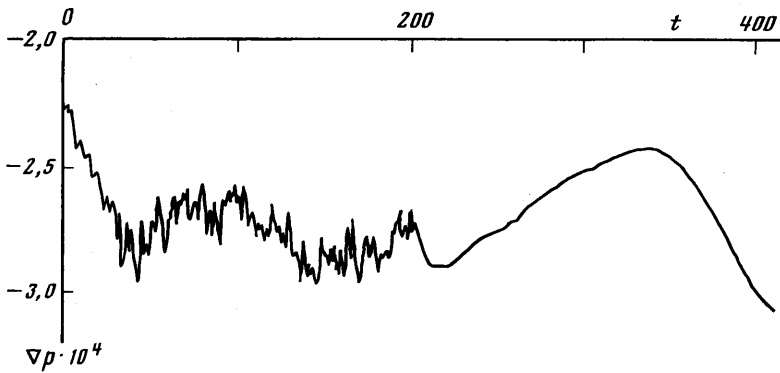
Задание начального условия основывалось на гипотезе, что статистические характеристики турбулентного течения не зависят или слабо зависят от начальных условий. Эта гипотеза подтверждается в более простых одномерных моделях, имитирующих ряд свойств двухмерной модели [15], а также настоящими расчетами. Поэтому при выборе начального условия преследовалась цель по возможности сократить длинную стадию почти линейного развития возмущений. С этой целью выбирались простые начальные условия с преобладанием в них неустойчивых мод (соответствующих $m=6$ и $m=7$), причем интенсивность пульсаций составляла 0,2%.

На фиг. 1–4 приведены некоторые основные характеристики, отражающие историю течения на интервале времени длительностью $\Delta T=411$ (расчет проводился для $\Delta T \approx 550$). Описываемые результаты отвечают существенно нелинейной стадии развития возмущений; начальная стадия почти линейного развития возмущений не приводится.

Для времен $0 \leq t \leq 203$ расчет проводился по явной нейтральной схеме учета нелинейных взаимодействий, а для $203 < t \leq 411$ — по неявной нейтральной схеме. Некоторое излишнее «дрожание» параметров течения (см., например, фиг. 2) является характерным для явных схем при большом шаге τ . Не имея возможности экспериментировать с различными τ



Фиг. 1



Фиг. 2

и одновременно желая продвинуться как можно дальше по времени, последующий ($t > 203$) расчет проводился по неявной схеме. Приводимые на фиг. 1–4 данные свидетельствуют, что основные интегральные характеристики течения и при $t > 203$ остаются примерно теми же.

На фиг. 1 показана зависимость полной энергии пульсаций

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} [(u')^2 + (v')^2] dx dy$$

от времени. Эта осредненная характеристика потока не выходит на постоянный уровень за рассматриваемый промежуток времени, а колеблется

около уровня $E \sim 0,6$, так что можно говорить о выходе на некоторый статистически стационарный режим. Для сравнения приведем значение энергии движения течения Пуазейля $E_0 = 22,34$. Таким образом, энергия пульсаций составляет около 3% от энергии основного течения. Там же представлены энергии отдельных гармоник $E_m(t)$ $m=0, 7, 12$, где

$$E_m = \frac{\rho_m l}{2} \sum_{n=1}^N [(C_{mn}^{ss})^2 + (C_{mn}^{sa})^2 + (C_{mn}^{as})^2 + (C_{mn}^{aa})^2]$$

$$\rho_0 = 2; \rho_m = 1, m = 1, 2, \dots, M$$

Эти величины пульсируют еще больше, чем $E(t)$. Очевидно, что эти крупномасштабные колебания имеют определяющее значение для характеристик турбулентного потока на более мелких масштабах.

На фиг. 2 показано изменение во времени среднего по пространству градиента давления

$$\nabla p(t) = \frac{1}{4l} \iint_{\Pi} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy$$

Расчет подтверждает опытные данные о возрастании сопротивления в турбулентном потоке. Увеличение градиента давления достигает 40% от градиента давления течения Пуазейля

$$\nabla p_0 = -2/\text{Re} = -0,0002$$

Для локальной величины $f(x, y, t)$ вводим два вида осреднения: среднюю по x величину $\langle f(y, t) \rangle_x$ и среднюю по t на отрезке длительностью Δt величину $\langle f(t, x, y) \rangle_{\Delta t}$:

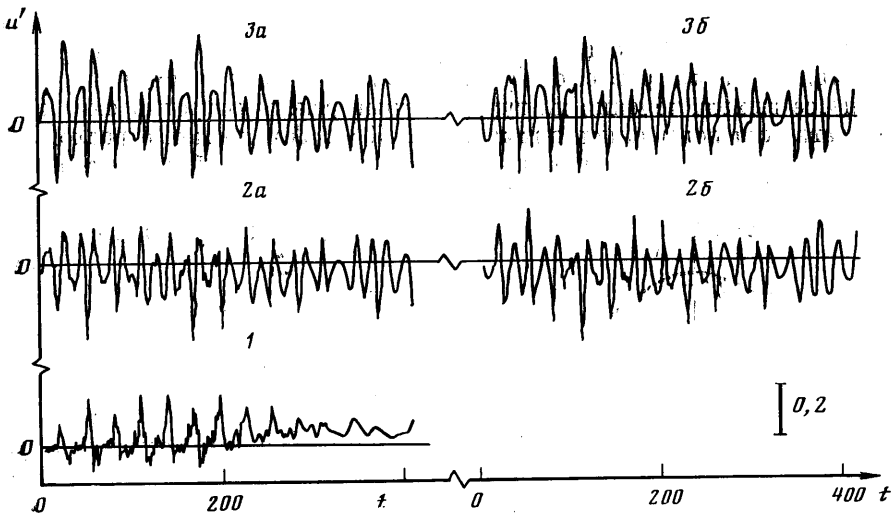
$$\langle f(y, t) \rangle_x = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x, y, t) dx,$$

$$\langle f(t, x, y) \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(x, y, \tau) d\tau$$

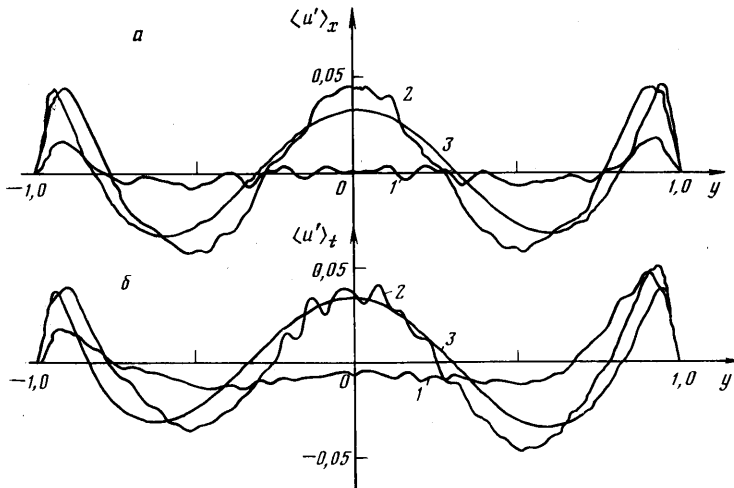
На фиг. 3 показано поведение во времени продольной составляющей $u'(x=5, y, t)$ пульсационной скорости для значений $y=0; \pm 0,5; \pm 57/64$ (кривые 1, 2а, б, 3а, б).

Уровень пульсаций нарастает при приближении к стенкам канала. Так, если в центре канала ($y=0, \pm 6/64$) уровень пульсаций, отнесенный к параболе Пуазейля $(1-y^2)$, составляет 20–25%, то уже при $y=\pm 0,5$ его величина достигает 40%, а вблизи стенок ($y=\pm 57/64$) ~130%. Такой уровень пульсаций следует признать значительным. На фиг. 4, а приведены графики средней пульсационной скорости $\langle u'(y, t) \rangle_x$ для нескольких моментов времени $t=0, 200, 400$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). На них хорошо виден максимум пульсаций вблизи стенок, хорошая симметрия, максимум градиента скорости на стенках. На отрезке времени $0 < t < 200$ происходит установление профиля средней пульсационной скорости.

На фиг. 4, б представлены результаты осреднения по времени x -компоненты скорости пульсаций $\langle u'(t, x, y) \rangle_{\Delta t}$ для нескольких моментов времени $t=0, 132, 357$ (кривые 1, 2, 3) и $\Delta t=44$ (значение $x=5$ — фиксировано). Отметим, что $\Delta t=44$ примерно соответствует времени переноса жидкости в центре канала на расстояние $2l \approx 42$.



Фиг. 3



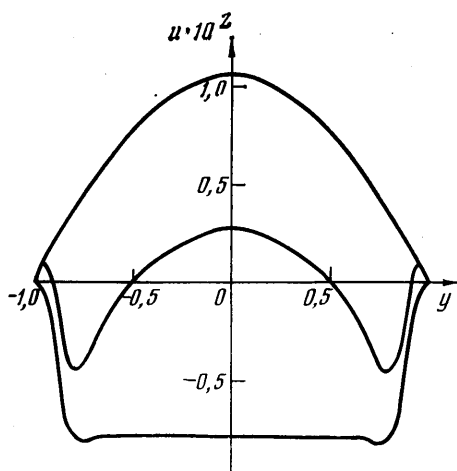
Фиг. 4

Сравнивая между собой фиг. 4, а и б, видим, что при выходе течения на статистически стационарный режим при $t > 100$ осреднение пульсационной скорости $u'(x, y, t)$ по однородной координате x качественно и неплохо количественно совпадает с осреднением по времени. Отметим, что при $t > 100$ устанавливается и сам профиль средней скорости.

Как осреднение по однородной координате x , так и осреднение по времени указывают на увеличение полной средней скорости течения $\langle u(y, t) \rangle_x = (1 - y^2) + \langle u'(y, t) \rangle_x$ в узкой области в середине канала. Осредненный профиль $\langle u'(y, t) \rangle_x$ — трехгорбый, т. е. имеет три положительных максимума (два у стенок и один в центре).

Может показаться, что это противоречит устоявшемуся мнению о том, что средняя скорость при турбулизации течения уплощается и, в частности, уменьшается в центре. Однако трехгорбый профиль средней скорости пульсаций объясняется, по-видимому, различием постановки внешних условий в экспериментах и в расчете. Как уже отмечалось, возможны две

простейшие постановки задачи: 1) изучение турбулентного течения с фиксированным расходом жидкости и 2) когда фиксирован средний градиент давления. В рассматриваемом расчете фиксировался расход жидкости. В процессе выхода течения на турбулентный режим сопротивление и градиент давления повысились примерно на 40%. Тем не менее расход фиксирован и средняя пульсационная скорость $\langle u'(y, t) \rangle_x$ обладает свойством



Фиг. 5

$$I = \int_{-1}^1 \langle u'(y, t) \rangle_x dy = 0$$

Если, наоборот, фиксирован градиент давления, соответствующий сверхкритическому числу Рейнольдса, то в результате турбулизации течения расход жидкости уменьшится, поэтому средняя пульсационная скорость $\langle u'(y, t) \rangle_x$ уменьшает расход, т. е. $I < 0$. Таким образом, налицо существенное расхождение профилей средней пульсационной скорости в этих двух разных постановках задачи.

Поэтому расчет турбулентного течения при заданном числе Re и постоянном расходе соответствует турбулентному течению с большим

числом Рейнольдса, если фиксирован градиент давления.

Начальный профиль ламинарного течения (число Рейнольдса) еще не определяет характера турбулентного течения; должны быть заданы основные определяющие течение внешние условия, например расход или градиент давления. Турбулентные течения при фиксированном расходе или фиксированном градиенте не могут характеризоваться одним общим числом Рейнольдса, вычисленным по параметрам ламинарного течения. При одном и том же начальном профиле ламинарного течения турбулентное течение с фиксированным градиентом давления отвечает меньшему числу Рейнольдса по сравнению с турбулентным течением с фиксированным расходом.

Возможен даже приближенный пересчет результатов одной из этих задач в другую. Так, в проведенном расчете градиент давления повысился примерно на 40%. Тем самым можно считать параметры турбулентного течения отвечающими большему в 1,4 раза градиенту давления в задаче с фиксированным градиентом и, следовательно, другому профилю ламинарного течения $u_0 = 1,4(1 - y^2)$. Таким образом, результаты рассматриваемого расчета пересчитываются на задачу с фиксированным градиентом. В частности, профиль осредненной пульсационной скорости будет вычисляться по формуле

$$\langle u_{2p}' \rangle_x(y, t) = -0,4(1 - y^2) + \langle u_p' \rangle_x(y, t)$$

где $\langle u_{2p}' \rangle_x$ — средний профиль пульсационной скорости в задаче с фиксированным градиентом, а $\langle u_p' \rangle_x$ — в задаче с фиксированным расходом. Эта связь $\langle u_{2p}' \rangle_x$ и $\langle u_p' \rangle_x$ была бы точной, если бы в турбулентном течении при фиксированном расходе величина среднего градиента давления $\nabla p(t)$ устанавливалась постоянной. Однако эта величина изменяется во времени, хотя и не очень сильно.

Заметим также, что трехгорбый профиль $\langle u_p \rangle_x$ уже встречался в [9], где аналитически и численно изучались малые возмущения плоского течения Пуазейля в этих двух постановках. Для малых отклонений пересчет одной задачи в другую дает практически точные результаты. На фиг. 5 приведены взятые из работы [9] профили $\langle u_{2p} \rangle_x$ — кривая 1, $\langle u_p \rangle_x$ — трехгорбая кривая 2 и их разность — кривая 3, почти правильная парабола.

В заключение приносим глубокую благодарность Ю. Л. Левитану, Б. Д. Моисеенко, В. К. Сидоровой и И. Н. Симакину, сотрудничество с которыми помогло нам выполнить эту работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Приймак В. Г., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Методы численного моделирования турбулентного течения жидкости в канале.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 3, с. 737–747.
2. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Pt. 1.— J. Comput. Phys., 1966, v. 1, № 1, p. 119–143.
3. Моисеенко Б. Д., Фрязинов И. В. Полностью нейтральная разностная схема для уравнений Навье — Стокса.— В кн.: Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами. М., 1980, с. 186–209.
4. Рождественский Б. Л. О применимости разностных методов решения уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 2, с. 308–311.
5. Моисеенко Б. Д., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Спектральные характеристики разностных схем и условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6, с. 1499–1515.
6. Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Спектры плоского течения Пуазейля и проблема решения уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 1, с. 252–258.
7. Рождественский Б. Л. Проблема численного моделирования неустойчивых движений несжимаемой вязкости жидкости.— В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977, с. 271–279.
8. Рождественский Б. Л. Метод Пикара — как метод численного решения задач математической физики.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 5. № 2, Новосибирск, 1974, с. 96–107.
9. Шкадов В. Я. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельном течении.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 49–57.
10. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1973. 191 с. (Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, № 25).
11. Orszag S. A., Kells L. C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow.— J. Fluid Mech., 1980, v. 96, № 1, p. 159–205.
12. Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. Исследование структуры переходного и турбулентного режимов конвекции в вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 66–75.
13. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное моделирование турбулентного режима конвекции в вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 8–15.
14. Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Шмидт В. М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 3, с. 545–548.
15. Приймак В. Г., Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Численное моделирование одномерной турбулентности. Ин-т прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР. Препринт, 1979, № 168. 28 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1981