

$\rightarrow 0$, дают следующие значения в этой точке для безразмерных величин: $m_1 = 0,317\rho_1/\rho_2$, $E_1/E_2 = 0,47$, $K_1/K_2 = 0,0858\rho_1/\rho_2$; в размерных единицах выражение для $\langle \rho R \rangle_1$ имеет вид

$$\langle \rho R \rangle_1 = 4,16 E_0 \rho_1 / \rho_2 (S_0 M_0)^{2/3}$$

Подчеркнем, что приведенные результаты получены в предположении, что решения, описывающие сжатие, принадлежат к указанному выше классу.

В заключение приведем пример точного решения, описывающего процесс сжатия, для которого исходным и конечным состоянием служит покоящееся вещество с постоянным распределением давления и плотности. Такие решения лежат в классе автомодельных с показателем автомодельности $\delta=1$ и $\kappa=0$ (см. [2] с заменой t на $-t$ и V на $-V$). Ось $V=0$ описывает состояние покоя, особой точке ($V=0$, $z=1$) соответствует характеристика, за которой следует волна сжатия, описываемая какой-либо кривой семейства, выходящего из узла ($V=0$, $z=1$) и проходящего через узел ($V=0$, $z=0$) до пересечения с параболой $z=(1-V)(1+1/2(\gamma-1)V)$, после чего отраженная от центра ударная волна переводит вещество опять на ось $V=0$, т. е. в состояние покоя с постоянными давлением и плотностью. Разным кривым семейства отвечают разные значения плотности за скачком, от исходного значения до бесконечного. Очевидно, что процесс сжатия можно повторять многократно, в пределе при бесконечном числе таких циклов за конечное время, вещество опять сжимается в точку.

Таким образом, заданной степени сжатия, одинаковой для всего вещества, можно достичь за произвольное число циклов сжатия. Расчеты, проведенные для $\gamma=5/3$, показывают, что интенсивность отраженного скачка мала, например значение скорости звука за скачком отличается от значения при адиабатическом сжатии до той же плотности не более чем на 2%, т. е. с хорошей точностью состояние вещества в конце каждого цикла описывается простыми формулами адиабатического сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа.— Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 735.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1981

УДК 533.6.011.72:533.7

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОАТОМНОМ ГАЗЕ ПРИ СТЕПЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

АРИСТОВ В. В., ЧЕРЕМИСИН Ф. Г.

Структура плоского скачка уплотнения представляет простейший пример неравновесного состояния газа. Течение здесь одномерное, эффекты взаимодействия газа с поверхностью твердого тела отсутствуют. Исследованию ударной волны посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ, и задача стала своеобразным тестом, на котором могут быть проверены различные методы решения уравнения Больцмана и приближенные кинетические теории.

Точные экспериментальные исследования [1, 2] были выполнены с использованием техники электронного луча. В этих работах получены профили плотности в одноатомных газах при числах Маха от 1,55 до 9 с точностью порядка 1%. Теоретические исследования в рамках кинетической теории берут начало от работ Тамма [3] и Мотт-Смита [4], использовавших бимодальные аппроксимации функции распределения, и работы [5], в которой решалось модельное уравнение Бхатнагара — Гросса — Крука. Обзор современных результатов по решению модельных кинетических уравнений содержится в [6]. Известны многочисленные расчеты методами прямого моделирования столкновительных процессов в газах, например [7, 8]. Численное решение уравнения Больцмана для газа, с не зависящим от скорости сечением столкновения, было предпринято в [9, 10]. В [11] уравнение Больцмана решается для максвелловского газа с потенциальной функцией $U=(\sigma/r)^4$. В настоящей работе структура ударной волны исследуется на основе консервативного метода расщепления (наиболее полно описанного в [12]), который позволяет повысить точность расчета, по сравнению с применявшимися ранее методами решения уравнения Больцмана. Приводятся численные результаты для молекулярной модели твердых

сфер и степенных потенциалов с показателем степени, соответствующим экспериментам из [1, 2].

1. Постановка задачи. Рассматривается одноатомный газ без внутренних степеней свободы. Потенциал межатомного взаимодействия имеет вид

$$U = \left(\frac{\sigma}{r} \right)^\nu, \quad 4 \leq \nu \leq \infty \quad (1.1)$$

Расчеты проводились для значений $\nu=4$ (максвелловские молекулы), $\nu=10$ и $\nu=12$, а также для молекулярной модели газа из жестких упругих сфер, которая формально следует из (1.1) при $\nu=\infty$.

Структура плоской стационарной ударной волны находится методом установления как решение следующей неоднородной задачи Коши для уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} = I \quad (1.2)$$

$$f(0, x, \xi, \rho) = \begin{cases} f_{01}(\xi, \rho), & x \leq x_0 \\ f_{02}(\xi, \rho), & x > x_0 \end{cases}, \quad \rho^2 = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} \quad (1.3)$$

где $f=f(t, x, \xi, \rho)$ — функция распределения, t — время, x — физическая координата, ξ — вектор скорости в декартовых компонентах (ξ, η, ζ), $f_{01}(\xi, \rho)$ и $f_{02}(\xi, \rho)$ — равновесные максвелловские распределения с макропараметрами n_{01}, u_{01}, T_{01} и n_{02}, u_{02}, T_{02} соответственно, связанными условиями Ранкина — Гюгонио. Таким образом, структура стационарной ударной волны образуется в результате развития разрыва в начальных условиях. Интеграл столкновений Больцмана взят в форме

$$I(f) = \int_0^{b_m} b db \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f'f_1' - ff_1) g d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$$

Здесь $g=|\xi-\xi_1|$, b — прицельный параметр, φ — угловой параметр столкновения, f' и f_1' — функции распределения, зависящие от скоростей после столкновений. Интегрирование по b ограничено предельным расстоянием взаимодействия b_m , при котором угол отклонения δ пренебрежимо мал. Для значений $\nu=10$ и $\nu=12$ величина $b_m=1,5\sigma_{\text{eff}}$, а для $\nu=4$ бралось $b_m=3\sigma_{\text{eff}}$, где σ_{eff} — эффективное сечение взаимодействия, определяемое по вязкости из условия [13]

$$\frac{5}{16\sigma_{\text{eff}}^2} \left(\frac{kmT}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{5}{8} \left(\frac{kmT}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{2kT}{\nu\sigma^\nu} \right)^{2/\nu} / A_2(\nu+1) \Gamma\left(4 - \frac{2}{\nu}\right). \quad (1.4)$$

Здесь $\Gamma(y)$ — гамма-функция, величина $A_2(r)$ табулирована в [13, 14]. Определенное согласно (1.4) эффективное сечение соответствует вязкости газа из упругих сфер диаметром σ_{eff} . Характерными параметрами задачи являются n_{01}, T_{01} ; в качестве масштаба длины взята длина свободного пробега в набегающем потоке, определенная по эффективному сечению $\lambda=1/\sqrt{2}\pi n_{01}\sigma_{\text{eff}}^2$. Характерная скорость равна

$v_0=\sqrt{kT_{01}/m}$. Как известно, угол отклонения вектора относительной скорости при столкновениях частиц с потенциалом взаимодействия (1.1) является функцией переменной (см. [13])

$$y = b \left[\frac{1}{4} \frac{mg^2}{\nu\sigma^\nu} \right]^{1/\nu} \quad (1.5)$$

где m — масса молекулы.

При переходе к указанным выше характерным масштабам (1.5) принимает вид

$$y = A_\nu b^* g^{*1/\nu}, \quad b^* = b/\sigma_{\text{eff}}, \quad g^* = g/v_0$$

$$A_\nu = \left[\frac{A_2(\nu+1)\Gamma(4-2/\nu)}{2} \right]^{1/2} g^{*-1/\nu}$$

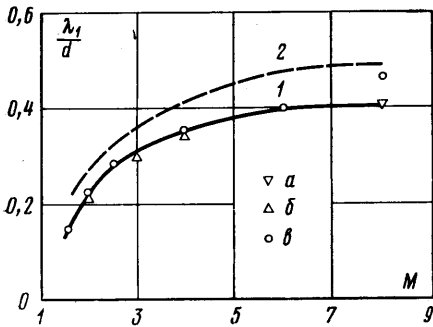
Была составлена специальная программа решения сингулярного интегрального уравнения из [13], определяющего угол отклонения $\delta=\delta(y)$. Рассчитанные для различных ν значения $\delta(y)$ табулировались. При вычислении интегралов столкновений

в процессе решения задачи соответствующие значения $\delta(y)$ находились интерполяцией в таблице. Для модели жестких сфер известно аналитическое выражение для δ .

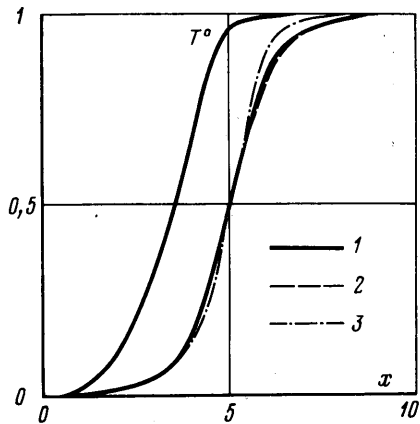
2. Анализ результатов решения. Численное решение задачи (1.2), (1.3) осуществлялось на равномерной сетке в пространстве скоростей ξ, ρ , содержащей 300–400 узлов и на неравномерной сетке по x , насчитывавшей 60 точек. Величины шага по скорости $\Delta\xi, \Delta\rho$ и координате Δx выбирались в зависимости от числа Маха и потенциала межатомного взаимодействия. Шаг по времени Δt определялся условием

x	n°	u°	T°	x	n°	u°	T°
0	0,003	0,989	0,02	5	0,571	0,206	0,932
0,75	0,01	0,97	0,06	5,25	0,643	0,162	0,954
1,5	0,024	0,931	0,12	5,5	0,709	0,126	0,97
2	0,04	0,889	0,191	5,75	0,768	0,097	0,98
2,25	0,053	0,859	0,239	6	0,818	0,075	0,987
2,5	0,068	0,822	0,296	6,25	0,859	0,057	0,992
2,75	0,087	0,778	0,362	6,5	0,893	0,044	0,995
3	0,112	0,726	0,435	6,75	0,919	0,034	0,997
3,25	0,144	0,666	0,515	7	0,939	0,027	0,998
3,5	0,183	0,599	0,595	7,25	0,955	0,021	0,999
3,75	0,231	0,528	0,674	7,5	0,966	0,017	1,00
4	0,287	0,456	0,746	7,75	0,974	0,014	1,00
4,25	0,351	0,385	0,809	8,5	0,986	0,008	1,00
4,5	0,422	0,318	0,86	9,25	0,99	0,004	1,00
4,75	0,496	0,258	0,901	9,625	0,992	0,002	1,00

Куранта, а размеры области по x – из условия, чтобы стационарный профиль ударной волны успевал установиться до прихода возмущения, отраженного от концов отрезка. Процесс установления контролировался как по стабилизации профилей плотности, скорости и температуры, так и по установлению постоянных в каждом узле потоков массы, импульса и энергии. Для достижения стационарного состояния требовалось от 6 до 12 времен свободного пробега в набегающем потоке.



Фиг. 1

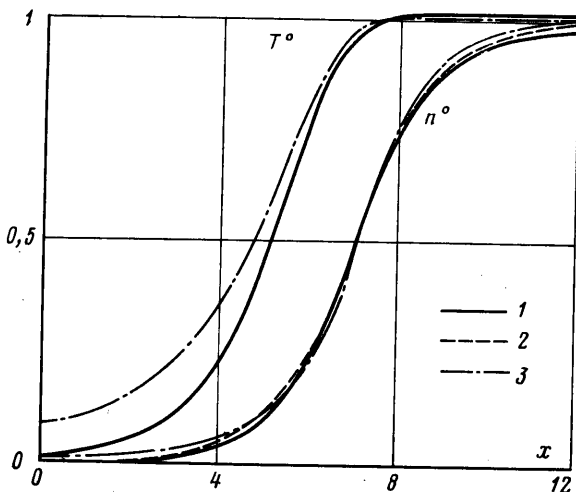


Фиг. 2

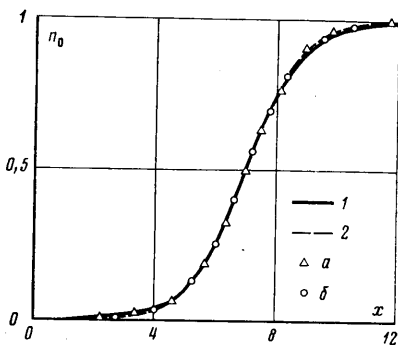
Точность метода и его сходимость по величинам $\Delta\xi, \Delta\rho$ и числу N случайных розыгрышей при вычислении интегралов столкновений была подробно изучена для числа Маха $M=3$ и молекулярной модели твердых сфер. Названные параметры счета менялись независимо в отношении 1:2:4. Наибольшее количество узлов в двумерном пространстве скоростей равнялось 378, наибольшее количество случайных розыгрышей – 50. Проводилась также оценка случайной ошибки путем использования различных серий случайных чисел. Было найдено, что статистическая ошибка составляет 0,5%. Максимальная погрешность выполнения каждого из трех законов сохранения порядка 1%. Такова же точность расчета профилей плотности, скорости и температуры. В таблице даны значения для приведенных величин: плотности

$n^{\circ} = (n - n_1) / (n_2 - n_1)$, скорости $u^{\circ} = (u - u_2) / (u_1 - u_2)$ и температуры $T^{\circ} = (T - T_1) / (T_2 - T_1)$ в зависимости от безразмерной координаты x . Величина шага Δx в центральной области ударной волны была равна 0,125. Данный расчет в рамках указанной точности может служить для сравнения профилей макропараметров в ударной волне.

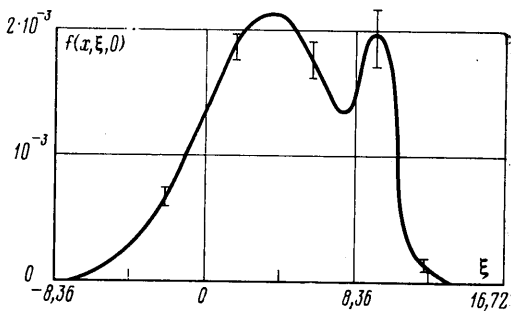
На фиг. 1 приведена в зависимости от числа M величина обратной толщины ударной волны λ_1/d , где $d = (n_2 - n_1) / (dn/dx)_{\max}$ — толщина ударной волны по Прандтлю. Кривая 1 представляет результаты настоящей работы, точками a изображены резуль-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

таты, полученные методом статистического моделирования в [7], точками b — результаты из [8], точками c — расчеты по уравнению Больцмана из [9], кривая 2 дает решение S -модельного уравнения [6]. Можно отметить близость наших результатов с решением уравнения Больцмана другим прямым методом [9] всюду, кроме $M=8$, а также с расчетами методами прямого моделирования.

На фиг. 2 при $M=8$ для газа из твердых сфер приведено сравнение профилей плотности: консервативный метод расщепления — кривая 1, результаты работы [7] — кривая 2, результаты [9] — кривая 3. Сравнение показывает хорошее совпадение наших результатов с решением методом Берда, в то время как результаты из [9, 11] отличаются в области вниз по потоку. Отметим, что при всех меньших числах Маха ($M=1,59; 2; 2,5; 4; 6$) наши решения и решения из [9, 11] близки по толщинам ударной волны и по профилям макропараметров. Расчет для максвелловских молекул при $M=2,5$ дал профили макровеличин, также близкие к полученным в [14].

На фиг. 3 для потенциала $U = (\sigma/r)^{12}$ $M=8$ дано сравнение результатов (кривая 1) с экспериментом в аргоне [1] (кривая 2) и расчетом по S -модели [6] (кривая 3). Расчетные и экспериментальные данные близки. Сравнение с S -моделью по-

казывает, что профиль плотности и толщина ударной волны описывается ею довольно хорошо и лучше, чем профиль температуры. Имеются также отличия на «хвостах» макропараметров вверх по потоку, обусловленные тем, что частота столкновений в S -модели не зависит от молекулярной скорости.

На фиг. 4 для $M=3,8$ приведено сравнение расчетов для потенциала $U=(\sigma/r)^{10}$ (кривая 1) с экспериментом в аргоне из [2] (кривая 2), а также с приведенными в этой же работе расчетами по методу Берда (точки a) и с решениями по методу Мотт-Смита (точки b). Видно близкое совпадение графиков плотности по всем трем расчетам с экспериментом. Как отмечено в [2], в рассматриваемом случае экспериментальные данные лучше согласуются с расчетами по методу прямого моделирования для потенциала $U=(\sigma/r)^{10}$, чем для $U=(\sigma/r)^{12}$. Это подтверждается и нашим расчетом. Отметим, что для $M=3,8$ и 8 по сравнению с экспериментальными данными наше решение несколько медленнее выходит на предельное значение вниз по потоку, что можно, по-видимому, объяснить недостаточной величиной расчетной области по x , связанной с ограниченностью оперативной памяти ЭВМ. Ошибка в выполнении локальных законов сохранения меньше в центре ударной волны и несколько выше в области вниз по потоку.

На фиг. 5 представлен график функции распределения $f(x, \xi, 0)$ в центре ударной волны при числе Маха $M=8$ для модели твердых сфер. Отчетливо видна ее бимодальная структура, вызванная взаимным проникновением молекулярных потоков с различными термодинамическими параметрами.

Таким образом, предложенный в [12] численный метод решения уравнения Больцмана позволяет рассчитать структуру ударной волны в газе с точностью порядка точности физического эксперимента. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что неравновесное состояние одноатомного газа в ударной волне хорошо описывается степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt B. Electron beam density measurements in shock waves in argon.— J. Fluid Mech., 1969, v. 39, № 2, p. 361–373.
2. Alsmeyer H. Messung der Struktur von Verdichtungsstößen in Argon und Stickstoff.— Diss. Karlsruhe, 1974. 75 S.
3. Тамм И. Е. О ширине ударных волн большой интенсивности.— Тр. Физ. ин-та им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1965, т. 29, с. 239–249.
4. Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave.— Phys. Rev., 1951, v. 82, № 6, p. 885–892.
5. Liepman H. W., Narasimha R., Chahine M. T. Structure of a plane shock layer.— Phys. Fluids, 1962, v. 5, № 11, p. 1313–1324.
6. Жук В. И., Рыков В. А., Шахов Е. М. Кинетические модели и задача о структуре ударной волны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 135–141.
7. Bird G. A. Aspects of the structure of strong shock waves.— Phys. Fluids, 1970, v. 13, № 5, p. 1172–1177.
8. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. 2. Вычислительные аспекты метода.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 6, с. 1553–1567.
9. Hicks B. L., Yen S. M., Reilly B. J. The internal structure of shock waves.— J. Fluid Mech., 1972, v. 53, № 1, p. 85–111.
10. Черемисин Ф. Г. Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных движений газа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 3, с. 654–665.
11. Yen S.-M. Shock-wave structure and intermolecular collision laws.— J. Fluid Mech., 1974, v. 65, № 1, p. 127–144.
12. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 1, с. 191–207.
13. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 510 с.
14. Ферцингер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.