

мится к значению давления торможения при поперечном обтекании с $M_{\infty}^{\circ} = M_{\infty} \sin \alpha$, можно указать диапазоны углов атаки, в которых при $M_{\infty} = 6$, $\gamma = 1,4$ имеют место различные типы течения. При углах атаки $\alpha < 44^{\circ}40'$ течение во всем ударном слое у цилиндра сверхзвуковое. При $44^{\circ}40' < \alpha < 46^{\circ}15'$ будет реализовываться второй тип течения. При $46^{\circ}15' < \alpha < 48^{\circ}30'$ дозвуковая зона у цилиндра тянется по x до бесконечности. При $\alpha > 48^{\circ}30'$ две дозвуковые области сливаются в одну.

Авторы благодарят Г. Н. Андреева за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. М: Наука, 1970, ч. 1. 287 с; ч. 2. 379 с.
2. Лебедев М. Г., Савинов К. Г. Удар неравномерного сверхзвукового потока газа в плоскую преграду. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 3, с. 164–171.
3. Липницкий Ю. М., Михайлов Ю. Я., Савинов К. Г. Исследование пространственного сверхзвукового обтекания головной части затупленных тел методом установления. — Науч. тр. Ин-та мех. МГУ. 1972, № 19, с. 66–79.

Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1981

УДК 533.6.011.72

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ ГАЗА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

СВАЛОВ А. М.

Рассматривается задача об изэнтропическом сжатии газа сферической оболочкой конечной толщины, имеющей внешнюю границу с вакуумом. Полное решение задачи с различными начальными условиями, с различными уравнениями состояния для оболочки и сжимаемого вещества возможно лишь численно. Однако существует класс точных решений уравнений газовой динамики [1, 2] с линейным распределением скорости частиц по радиусу, в котором допускается существование контактных разрывов. Для этого необходимо, чтобы и оболочка и сжимаемая среда описывались одним и тем же уравнением состояния $p = (\gamma - 1) \rho E$ с одинаковым показателем адиабаты $\gamma = c_p / c_v$. Отметим, что таких разрывов в решении может быть как угодно много, т. е. этим классом решений можно описать сжатие вещества многослойными оболочками. Ограничимся здесь рассмотрением однослойной оболочки с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Непосредственной подстановкой в уравнения газовой динамики можно проверить, что им удовлетворяют следующие соотношения:

$$p = \frac{1}{S} \left(\frac{R^2 - \xi^2}{t^2 + T^2} \right)^{5/2}, \quad \rho = \frac{5}{S} \left(\frac{R^2 - \xi^2}{t^2 + T^2} \right)^{3/2}$$

$$v = \frac{t\xi}{T\sqrt{t^2 + T^2}}, \quad r = \frac{\sqrt{t^2 + T^2} \xi}{T}, \quad \eta = \frac{\xi}{R}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{S^{5/3}}{5^{5/3}} \quad (1)$$

Здесь p , ρ , v — давление, плотность и скорость газа, R , T , S — произвольные константы, причем S соответствует некоторой энтропийной функции, ξ — лагранжева координата.

Давление и плотность представляют в каждый момент времени монотонные функции с точкой перегиба $\eta = 0,5$, имеющие максимум при $\eta = 0$ и обращающиеся в 0 с нулевой касательной при $\eta = 1$. Все движение представляет собой слет конечной массы газа к центру с одновременной остановкой всех частиц при $t = 0$ и последующим разлетом. Масса M , кинетическая K и внутренняя E энергии, а также величина $\langle \rho R \rangle$ выражаются формулами

$$M = 4\pi \int_0^{r_0} \rho r^2 dr = \frac{20\pi}{T^3 S} \int_0^1 (1 - \eta^2)^{3/2} \eta^2 d\eta$$

$$E = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{p}{\gamma-1} r^2 dr = \frac{6\pi R^3}{T^3 S} \frac{1}{1+\tau^2} \int_0^1 (1-\eta^2)^{3/2} \eta^2 d\eta$$

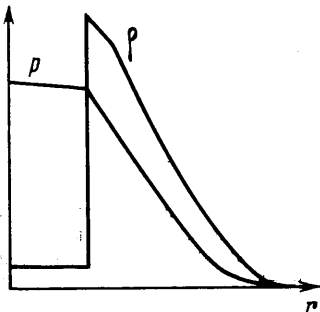
(2)

$$K = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{\rho v^2}{2} r^2 dr =$$

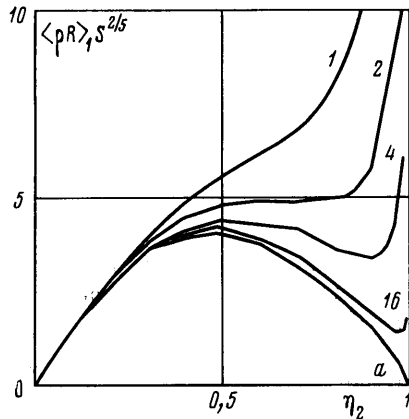
$$= -\frac{2\pi R^3}{T^3 S} \frac{\tau^2}{1+\tau^2} \left[(1-\eta^2)^{3/2} \eta^3 \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 \eta^2 (1-\eta^2)^{3/2} d\eta \right]$$

$$\langle \rho R \rangle = \int_0^{r_0} \rho dr = \frac{5R^4}{T^3 S} \frac{1}{1+\tau^2} \int_0^1 (1-\eta^2)^{3/2} d\eta$$

Из формул (2) следует, что полная энергия остается постоянной во все время движения, меняются лишь ее составляющие — задолго до остановки основная часть энергии приходится на кинетическую, в момент остановки вся энергия переходит во



Фиг. 1



Фиг. 2

внутреннюю. Как будет показано ниже, в решении (1) возможно существование контактных разрывов, для чего необходимо соответствующее согласование констант, входящих в решение. Если справа от разрыва плотность вещества значительно больше, чем в центральной части, то естественно рассматривать все течение как систему оболочка — газ. Формулы (2) с соответствующим изменением пределов интегрирования позволяют получить представление о распределении энергии между оболочкой и сжимаемой средой в каждый момент времени и исследовать (в рассматриваемом классе решений) зависимость величины $\langle \rho R \rangle$ сжимаемого вещества, имеющей большое значение в приложениях, от параметров схемы оболочка — сжимаемый газ.

Будем обозначать величины, относящиеся к сжимаемой среде, индексом 1, к оболочке — индексом 2. Условие, что контактный разрыв должен быть траекторией частиц справа и слева от него во все время движения, приводит к требованию $T_1 = T_2 = T$, $\eta_1 = \eta_2 R_2 / R_1$. Из условий на разрыве следуют формулы

$$\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \frac{(S_2/S_1)^{2/5}}{1 + [(S_2/S_1)^{2/5} - 1] \eta_2^2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{2/5}$$

Качественная картина распределения давления и плотности показана на фиг. 1. При фиксированном отношении ρ_2/ρ_1 на разрыве рост η_2 от 0 до 1 означает изменение отношений масс оболочки и сжимаемого газа, их энергий — начальной и конечной и т. д. (т. е. изменение η_2 влечет за собой изменение параметров схемы)

Введем безразмеривающие параметры по формулам

$$M_* = M_0, \quad L_* = (S_0 M_0)^{1/2} \left(\frac{M_0}{E_0} \right)^{1/2}$$

$$T_* = (S_0 M_0)^{1/2} \frac{M_0}{E_0}$$

Условия безразмеривания и согласования величин на разрыве приводят к следующей системе уравнений, из которой определяются интегральные величины и произвольные константы через один свободный параметр η_2 ($M_2=1$, $S_2=1$, $K_{2\infty}=1$):

$$T = 2\pi AB^{-1/2}, \quad R_2 = \sqrt{2\pi} A^{1/2} B^{-5/6}$$

$$R_1 = R_2 C^{1/2}$$

$$\eta_1 = \eta_2 C^{-1/2}, \quad m_1 = 20\pi S_1^{-1} C^3 B^{-1} D$$

$$\langle \rho R \rangle_1 = 5S_1^{-1} (2\pi)^{-1} B^{3/2} C^2 A^{-1} \int_0^{\eta_1} (1-\eta^2)^{3/2} d\eta$$

$$A = 3 \int_{\eta_2}^1 \eta^2 (1-\eta^2)^{5/2} d\eta + \eta_2^3 (1-\eta_2^2)^{5/2} \quad (3)$$

$$B = 20\pi \int_{\eta_2}^1 (1-\eta^2)^{3/2} \eta^2 d\eta, \quad C = S_1^{2/5} + \eta_2^2 (1-S_1^{2/5})$$

$$D = \int_0^{\eta_1} (1-\eta^2)^{3/2} \eta^2 d\eta$$

Здесь m_1 — масса сжимаемого газа, в интеграле $\langle \rho R \rangle_1$ за верхний предел интегрирования взят радиус контактного разрыва r_0 .

В системе (3) все искомые величины в конечном счете выражаются элементарными функциями аргумента η_2 , но их анализ ввиду сложности получающихся выражений удобнее провести численно. При больших значениях S_1 для любого $\eta_2 \neq 1$ справедливы асимптотические формулы, в точке $\eta_2=1$ становится неопределенным выражение $S_1(1-\eta_2^2)^{5/2}$, поэтому расчетные кривые в этой точке отходят от асимптотических.

Асимптотические кривые (а) описываются формулами

$$m_1 S_1^{2/5} = \frac{20\pi}{3B} (1-\eta_2^2)^{3/2} \eta_2^3, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\eta_2^3 (1-\eta_2^2)^{5/2}}{3 \int_{\eta_2}^1 \eta^2 (1-\eta^2)^{5/2} d\eta}$$

$$\frac{K_1}{K_2} S_1^{2/5} = \frac{\eta_2^5 (1-\eta_2^2)^{3/2}}{A}, \quad \langle \rho R \rangle_1 S_1^{2/5} = \frac{5(1-\eta_2^2)^{3/2} \eta_2 B}{2\pi A}$$

Примечательно, что асимптотическое выражение для отношения внутренних энергий E_2/E_1 в момент максимального сжатия от значения S_1 не зависит. Выражение $K_1 S_1^{2/5}/K_2$ определяет отношение кинетических энергий в момент времени, бесконечно удаленный от времени останова. На фиг. 2 показаны кривые $\langle \rho R \rangle_1 S_1^{2/5}$ с асимптотической кривой (а) (цифры над кривыми соответствуют целому числу i из равенства $S_i^{2/5} = (\rho_2/\rho_1)_i = 2^{i-1}$). Тот факт, что расчетные кривые при $\eta_2 \rightarrow 1$ стремятся к бесконечности, тривиален, так как при $\eta_2 \rightarrow 1$ толщина оболочки стремится к 0, а поскольку ее масса равна 1, то это означает, что масса сжимаемой среды неограниченно возрастает и, следовательно, возрастает $\langle \rho R \rangle_1$. Наиболее важен тот результат, что все кривые имеют максимум в некоторой внутренней точке, для асимптотической кривой этой точке соответствует $\eta_2=0,46$. Отсюда следует, что существует оптимальное соотношение масс оболочки и сжимаемого вещества, обеспечивающее максимальное значение $\langle \rho R \rangle_1$. Асимптотические формулы, которые верны при $\rho_1/\rho_2 \rightarrow$

$\rightarrow 0$, дают следующие значения в этой точке для безразмерных величин: $m_1 = 0,317\rho_1/\rho_2$, $E_1/E_2 = 0,47$, $K_1/K_2 = 0,0858\rho_1/\rho_2$; в размерных единицах выражение для $\langle \rho R \rangle_1$ имеет вид

$$\langle \rho R \rangle_1 = 4,16 E_0 \rho_1 / \rho_2 (S_0 M_0)^{2/3}$$

Подчеркнем, что приведенные результаты получены в предположении, что решения, описывающие сжатие, принадлежат к указанному выше классу.

В заключение приведем пример точного решения, описывающего процесс сжатия, для которого исходным и конечным состоянием служит покоящееся вещество с постоянным распределением давления и плотности. Такие решения лежат в классе автомодельных с показателем автомодельности $\delta=1$ и $\kappa=0$ (см. [2] с заменой t на $-t$ и V на $-V$). Ось $V=0$ описывает состояние покоя, особой точке ($V=0$, $z=1$) соответствует характеристика, за которой следует волна сжатия, описываемая какой-либо кривой семейства, выходящего из узла ($V=0$, $z=1$) и проходящего через узел ($V=0$, $z=0$) до пересечения с параболой $z=(1-V)(1+1/2(\gamma-1)V)$, после чего отраженная от центра ударная волна переводит вещество опять на ось $V=0$, т. е. в состояние покоя с постоянными давлением и плотностью. Разным кривым семейства отвечают разные значения плотности за скачком, от исходного значения до бесконечного. Очевидно, что процесс сжатия можно повторять многократно, в пределе при бесконечном числе таких циклов за конечное время, вещество опять сжимается в точку.

Таким образом, заданной степени сжатия, одинаковой для всего вещества, можно достичь за произвольное число циклов сжатия. Расчеты, проведенные для $\gamma=5/3$, показывают, что интенсивность отраженного скачка мала, например значение скорости звука за скачком отличается от значения при адиабатическом сжатии до той же плотности не более чем на 2%, т. е. с хорошей точностью состояние вещества в конце каждого цикла описывается простыми формулами адиабатического сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. — Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 735.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1981

УДК 533.6.011.72:533.7

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОАТОМНОМ ГАЗЕ ПРИ СТЕПЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

АРИСТОВ В. В., ЧЕРЕМИСИН Ф. Г.

Структура плоского скачка уплотнения представляет простейший пример неравновесного состояния газа. Течение здесь одномерное, эффекты взаимодействия газа с поверхностью твердого тела отсутствуют. Исследованию ударной волны посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ, и задача стала своеобразным тестом, на котором могут быть проверены различные методы решения уравнения Больцмана и приближенные кинетические теории.

Точные экспериментальные исследования [1, 2] были выполнены с использованием техники электронного луча. В этих работах получены профили плотности в одноатомных газах при числах Маха от 1,55 до 9 с точностью порядка 1%. Теоретические исследования в рамках кинетической теории берут начало от работ Тамма [3] и Мотт-Смита [4], использовавших бимодальные аппроксимации функции распределения, и работы [5], в которой решалось модельное уравнение Бхатнагара — Гросса — Крука. Обзор современных результатов по решению модельных кинетических уравнений содержится в [6]. Известны многочисленные расчеты методами прямого моделирования столкновительных процессов в газах, например [7, 8]. Численное решение уравнения Больцмана для газа, с не зависящим от скорости сечением столкновения, было предпринято в [9, 10]. В [11] уравнение Больцмана решается для максвелловского газа с потенциальной функцией $U=(\sigma/r)^4$. В настоящей работе структура ударной волны исследуется на основе консервативного метода расщепления (наиболее полно описанного в [12]), который позволяет повысить точность расчета, по сравнению с применявшимися ранее методами решения уравнения Больцмана. Приводятся численные результаты для молекулярной модели твердых