

Закон движения поршня ($y=0$) определяется равенствами

$$r = ma_0^2 \int_0^{x'} \frac{\varepsilon - x}{p} dx, \quad t = ma_0 \int_0^{x'} \frac{dx}{p} \quad (4.1)$$

$$p^{(\gamma-1)/\gamma} = \gamma(\gamma-1) p_0^{(\gamma-1)/\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2-1}{12} \varepsilon^3 \right) \left[\frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \varepsilon - x \right)^2 + \varepsilon^3 \frac{\partial z_3(x, 0)}{\partial y} \right]$$

В частности, координаты (R, T) точки M в плоскости (r, t) , в которой скорость поршня обращается в нуль (и далее поршень движется в обратном направлении), определяются из (4.1) при $x' = \varepsilon$. После несложных преобразований находим, что

$$R = \frac{m\gamma\varepsilon^2}{2\rho_0} \left[1 - \frac{2\gamma}{3} \varepsilon + \frac{\gamma(3\gamma-1)}{8} \varepsilon^2 - \frac{\gamma}{160} (37\gamma^2 - 30\gamma - 3) \varepsilon^3 \right]$$

$$T = \frac{m\gamma\varepsilon}{\rho_0 a_0} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \varepsilon + \frac{\gamma(3\gamma-1)}{12} \varepsilon^2 - \frac{\gamma(\gamma-1)(5\gamma+1)}{32} \varepsilon^3 \right], \quad a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Нетрудно проверить, что функции R и T и их частные производные по параметрам ε и γ положительны в области $0 < \varepsilon < 3/10$, $1 < \gamma < 3$, что позволяет сделать определенные выводы о характере влияния этих параметров на закон движения поршня.

Анализ выражения (4.1) для давления на поршне показывает, что при $x \rightarrow 2/(\gamma-1) + \varepsilon$ давление стремится к нулю с точностью до членов порядка ε^3 включительно и предельная скорость поршня ($t \rightarrow \infty$) оказывается такой же, как и в случае движения поршня без начальной скорости [1], когда $\varepsilon = 0$. Действительно, согласно (1.4) и (1.8)

$$u = -a_0 \frac{\partial z(x, 0)}{\partial x} = a_0(\varepsilon - x) \rightarrow -\frac{2a_0}{\gamma-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
3. Устинов М. Д. Некоторые аналитические решения уравнений одномерного движения газа и их приложения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2, с. 90–103.

Минск

Поступила в редакцию
30.IV.1981

УДК 533.6.011.35

ДАЛЬНЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ ПРИ ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ НЕНЕСУЩЕГО ПРОФИЛЯ

СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д.

Построено новое аналитическое решение нелинейных околзвучковых уравнений, описывающее дальнейшее безвихревое поле течения (с двумя осями симметрии) при околзвучковом обтекании ненесущего профиля. При удалении от профиля нелинейное поле непрерывно переходит в поле линейной теории (случай обтекания диполя без циркуляции). Решение выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Плоское стационарное безвихревое течение идеального газа вдали от профиля при его обтекании однородным потоком (фиг. 1), текущим в направлении оси x , описывается системой Кармана – Фальковича в форме Спрейтера

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad v = (\gamma+1)M_\infty^2 \theta \quad (1)$$

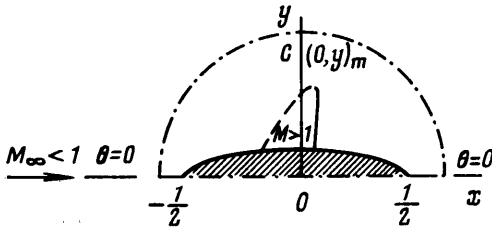
$$u = M^2 - 1 = u_\infty + (\gamma+1)M_\infty^2 \eta, \quad u_\infty = M_\infty^2 - 1$$

Здесь γ — отношение теплоемкостей, x, y — безразмерные декартовы координаты (масштаб — хорда), θ — угол наклона вектора скорости \mathbf{V} к оси x , $\eta = V/V_\infty - 1$, V_∞ и M_∞ — скорость и число Маха набегающего потока; $|\theta|, |\eta| \ll 1$. Если u_∞ значитель-

но больше η , то имеем уравнение линейной теории

$$u_\infty (u_L)_x = (v_L)_y, \quad (v_L)_x = (u_L)_y \quad (2)$$

На плоскости uv обе системы становятся линейными относительно функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$, при этом их решением являются также функции $x_N = Nx$, $y_N = Ny$, где N — линейный интегродифференциальный (по v) оператор с постоянными коэффициентами [1]. Возможности отыскания новых аналитических решений нелинейной системы (1) расширяются, если решение искать [2] в двухпараметрической форме (u, v, x, y зависят от параметров z и ζ). Если оператор $N = \partial/\partial v$, то по известному решению системы (1) построим новое u, v, x_1, y_1 :



Фиг. 1

$$u = u(z, \zeta), \quad v = v(z, \zeta)$$

$$x_1 = x_v = (u_\zeta x_z - u_z x_\zeta) \frac{1}{D},$$

$$D = v_z u_\zeta - v_\zeta u_z \quad (3)$$

$$y_1 = y_v = (u_\zeta y_z - u_z y_\zeta) \frac{1}{D}$$

Дальнее поле при обтекании несущего профиля однородным дозвуковым потоком ($M_\infty < 1$) описывается решением линейной системы (2) (обтекание диполя без циркуляции)

$$u_L = u_\infty + \frac{m(x^2 + u_\infty y^2)}{u_\infty r^4}, \quad m = \frac{1}{4k^2}, \quad v_L = -\frac{2mxy}{r^4}, \quad r^2 = x^2 + u_\infty y^2 \quad (4)$$

Постоянная k зависит от M_∞ , γ и τ — от относительной толщины профиля. Так, если применить правило Прандтля — Глауэрта к решению обтекания круга несжимаемой жидкостью, то

$$k = [(\gamma + 1) M_\infty^2 \tau^2 (1 - M_\infty^2)]^{-1/2}$$

При трансзвуковом и околозвуковом обтекании профиля ($M_\infty \approx 1$) необходимо учесть нелинейность системы (1). Непосредственное построение аналога решения (4) для системы (1) затруднительно. Интегрируя x, y по v_L в (4), построим более простое решение системы (2)

$$u_L = u_\infty (1 + k^2 y^2) + k^2 x^2, \quad v_L = 2u_\infty k^2 xy \quad (5)$$

которое описывает локальное дозвуковое течение внутри сопла с двумя осями симметрии. Система (1) имеет аналогичное (5) решение [3]:

$$u = A(y) + B(y)x^2, \quad v = A'(y)x + B'(y) \frac{x^3}{3} \quad (6)$$

$$B(\zeta) = k^2 P(w), \quad w = k\zeta, \quad P(w) = P(w + \omega_2; 0, 4)$$

$$A(\zeta) = u_\infty R(w), \quad |w| < \omega_2 = 1,21432, \quad h = \frac{\omega_2}{k} \quad (7)$$

$$R(w) = \sqrt{P(w)} \cos \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} P'(w) \right], \quad (P')^2 = 4P^3 - 4$$

где $P(w)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса $P(w; g_2, g_3)$ с $g_2 = 0, g_3 = 4$. Функцию $P(s; 0, 4)$ легко привести к функции $P(t; 0, 1)$, которая изучена (эквиангармонический случай, [3, 4]). При малых значениях x, y решение (6) близко к решению (5) линейной теории.

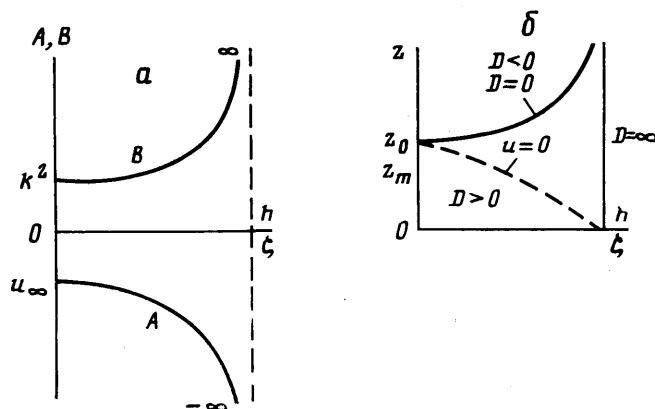
Искомое решение системы (1), описывающее дальнейшее околосзвуковое поле профиля, можно построить с помощью (3), полагая в (6) $x=z$, $y=\zeta$:

$$u=A(\zeta)+B(\zeta)z^2, \quad v=A'(\zeta)z+B'(\zeta)\frac{z^3}{3}$$

$$z=[A'(\zeta)+B'(\zeta)z^2]\frac{1}{D}, \quad y=-2B'(\zeta)\frac{z}{D} \quad (8)$$

$$D(z, \zeta)=(A')^2+2(A'B'-2AB^2)z^2-4k^6z^4$$

Соответствующее течение при $z=0$ или $\zeta=0$ имеет оси x и y осями симметрии; $z=\zeta=0$ соответствует бесконечности течения (однородный дозвуковой поток), при малых z, ζ решение (8) близко к решению (4) линейной теории. В дозвуковой области течения ($u < 0$) якобиан $D(z, \zeta) > 0$; $D(z, \zeta) = 0$ при $z = \zeta = 0$ и на некоторой кривой $z = \pm z_0(\zeta)$ в сверхзвуковой области (фиг. 2, б), при этом уравнение предельной линии есть $D_1 = xz_y \zeta - x \zeta_y z = 0$, достаточно далеко от профиля и вблизи оси x она отсутствует; дальнейшее поле без предельной линии — дозвуковое и качественно похоже на дальнейшее поле линейной теории, но имеет количественные отличия. Так, на оси y



Фиг. 2

функция u_L из (4) меньше функции u из (8) на 27,8% в точке $C(0, y_m)$, через которую проходит предельная линия; $y_m = 3/4k^{-1}(-u_\infty)^{-3/2}\sqrt{3}$. На плоскости $z\zeta$ точке C (фиг. 1) соответствуют значения параметров $\zeta=0$, $z=z_m=z_0/\sqrt{3}$.

При $M_\infty \rightarrow 1$ построенное дальнейшее поле вытесняется в бесконечность трансзвуковым полем течения. Заметим, что в [5] построено дальнейшее трансзвуковое поле при обтекании потоком несущего полутела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. N. Y.: Wiley, 1958. 164 p. (Рус. перев.: Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околосзвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.)
2. Севостьянов Г. Д. Примеры околосзвуковых течений идеального газа со скачком уплотнения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 1, с. 49–52.
3. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Pt 1. — Quart. Appl. Math., 1950, v. 7, № 4, p. 331–397. (Рус. перев. Томотика С., Тамада К. Двумерное смешанное течение сжимаемой идеальной жидкости. Ч. 1. — Механика. Сб. сокр. пер. и реф. иностр. период. лит., 1951, № 4, с. 31–43).
4. Janke E., Emde F., Losch F. Tafeln hoherer Funktionen. Stuttgart: Teubner, 1960. (Рус. перев.: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.)
5. Иванов В. А., Чернов И. А. К вопросу о возникновении ударной волны внутри местной сверхзвуковой зоны. — ПММ. 1979, т. 43, № 6, с. 1117–1118.