

УДК 532.517.4

**ДВУХМАСШТАБНАЯ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ И СТРУЙ**

**АКАТНОВ Н. И.**

Для характеристики турбулентности пограничных слоев в энергонесущем интервале волновых чисел иногда используют несколько масштабов турбулентности (например, [1, 2]). В частности, таким путем можно расширить универсальность полумэмпирической модели турбулентности [2]. В [3-6] построена и использована модель турбулентности с одним уравнением (баланса энергии турбулентности) и установлено, что круг задач, решаемых при универсальном наборе значений эмпирических коэффициентов, значительно увеличивается, если использовать не один, а два масштаба турбулентности. В настоящей работе показано, что введение второго масштаба позволяет учесть взаимодействие сдвиговых слоев в потоках с двумя сдвиговыми слоями (например, канал, струя), а также учесть влияние турбулентности внешнего потока на пограничный слой. Взаимодействие сдвиговых слоев учитывается в теориях, содержащих уравнение переноса турбулентного напряжения трения  $\tau_t$  (например, [7]), в которых суть взаимодействия сводится к диффузии  $\tau_t$  из слоя в слой.

В данной работе принят преобладающим объемный эффект взаимодействия, который состоит в различии взаимодействия крупномасштабных вихрей со сдвиговым деформационным движением в потоках с одним и двумя сдвиговыми слоями, а также при наличии турбулентности во внешнем потоке.

1. Используется система уравнений турбулентного пограничного слоя в виде

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j \tau_t) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^j u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^j v) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{dk}{dt} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \mu \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} [y^j \langle v' (p' + \rho k') \rangle] + \tau_t \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \epsilon_t \quad (1.3)$$

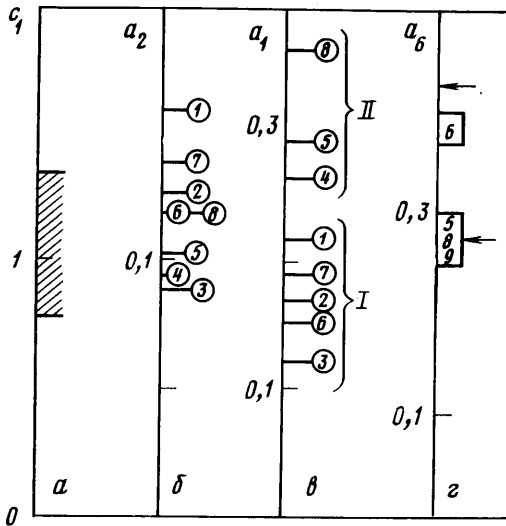
Ось  $x$  ортогональной системы координат направлена вдоль преимущественного направления движения среды;  $j=0$  для плоского течения и  $j=1$  для осесимметричного;  $u, v$  — проекции средней скорости на оси  $x$  и  $y$ ;  $\tau_t = -\langle \rho u' v' \rangle$  — касательное напряжение турбулентного трения;  $k = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$  — среднекинетическая энергия пульсационного движения единицы массы жидкости;  $\epsilon_t$  — диссипативная функция;  $\mu$  — динамический коэффициент молекулярной вязкости;  $p, \rho$  — среднее давление и плотность.

2. Чтобы замкнуть систему (1.1)–(1.3), необходимо связать величины  $\tau_t, \epsilon_t$  и диффузионный член с параметрами осредненного и пульсационного движений. Назовем «простым» сдвиговым слоем область течения, в которой производная  $du/dy$  сохраняет знак, и будем характеризовать турбулентность в этом слое величиной  $k$  и вначале одним масштабом, например  $L_1$ . Тогда из соображений размерности получим

$$|\tau_t| / \rho k = a = \text{const} \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) широко используется в различных теориях. Опыт показывает, однако, что величина  $a$  в (2.1) не является постоянной и часто используемое значение  $a=0,3$  — лишь некоторое среднее значение для многих опытных данных. В ряде работ учитывалась зависимость коэффициента  $a$  от параметров движения среды, но вид зависимости устанавливался в основном из условий наилучшего согласования расчета с опытом.

На фиг. 1,  $z$  цифрами отмечены значения  $a$  в сдвиговых слоях некоторых свободнотурбулентных течений, найденные в точках, где имеет место максимальная генерация турбулентности, что обозначено индексом  $G$ .



Фиг. 1

Отношение (2.1) в слое смешения по опытным данным [8, 9] отмечено цифрой 6, в плоской струе [10], в круглой струе [11] и в плоском следе [12] соответственно цифрами 5, 9, 8. На фиг. 1,  $z$  видно, что отношение (2.1) в слое смешения больше, чем в струях и в следе.

Отношение (2.1), вычисленное поперек пограничного слоя по опытным данным [13], оказывается на 20–25% больше того же отношения для канала [14]. Отметим, что (2.1), вычисленное в точке  $G$  внешнего сдвигового слоя пристенной струи по данным [15] (в предположении  $\langle w'^2 \rangle \sim \langle v'^2 \rangle$ , из-за отсут-

ствия измерений  $\langle w'^2 \rangle$ ), оказывается примерно таким же, как в слое смешения.

Слой смешения и пристенный пограничный слой являются «простыми» сдвиговыми слоями, а течения в струе, следе и канале состоят из двух сдвиговых слоев и изменение отношения (2.1), видное на фиг. 1,  $z$ , следует приписать взаимодействию сдвиговых слоев. Мелкомасштабная турбулентность тонкой пристенной области полуограниченной струи, видимо, не оказывает существенного влияния на внешний сдвиговый слой, поэтому его характеристики оказываются близкими к течениям с одним сдвиговым слоем.

В потоках с поперечным сдвигом, близких к равновесию, энергия пульсаций порождается в пределах сдвиговой области, поэтому основной размер энергонесущих вихрей определяется толщиной сдвиговой области. Но наиболее крупные вихри имеют размеры, определяемые полной толщиной всей области движения, поэтому в потоках с двумя сдвиговыми слоями самые крупные вихри подвергаются одновременному влиянию обеих сдвиговых деформаций. Известно, что вихри, подвергающиеся быстрой деформации, дают вклад в корреляцию  $\langle u'v' \rangle$  не сразу, а спустя некоторое время, необходимое, чтобы вихри приобрели структуру, обеспечивающую вклад в  $\langle u'v' \rangle$  [16], притом время релаксации увеличивается с размерами вихрей. Можно предположить, что наиболее крупные вихри, имеющие место в потоках с двумя сдвиговыми слоями, подвергаясь действию двух противоположных деформаций, не могут приобрести структуру, обеспечивающую их вклад в  $\langle u'v' \rangle$ , поэтому основной вклад дают вихри.

масштабы которых не превышают размеров сдвиговой области. Измерения показывают [17], что крупномасштабные структуры в плоском следе, содержащие до 15–20% энергии пульсации, имеют отношение  $\langle u'v' \rangle / \langle u'^2 \rangle$ , среднее по соответствующим им волновым числам, во много раз меньше, чем среднее по всем волновым числам. На основании сказанного сформулируем гипотезу: вклад в корреляцию  $\langle u'v' \rangle$  в сдвиговом слое дают вихри с некоторым «оптимальным» масштабом  $L_1$ , пропорциональным толщине сдвигового слоя. Более крупные вихри вклада в корреляцию не дают, пока не разрушатся до «оптимального» масштаба.

Важные соотношения можно получить, исходя из требований размерности и принципа соответствия. Обозначим через  $L_2$  длину, пропорциональную интегральному масштабу турбулентности, и будем характеризовать турбулентность величинами  $k$ ,  $L_1$  и  $L_2$ . Из соображений размерности можем записать

$$\frac{\tau_i}{\rho k} = f_1 \left( \frac{L_1}{L_2} \right), \quad \frac{\varepsilon_i L_2}{k \sqrt{k}} = f_2 \left( \frac{L_1}{L_2} \right) \quad (2.2)$$

Потребуем выполнения двух условий. Во-первых, для равновесного течения, когда имеют место лишь порождение и диссипация турбулентности (например, вблизи твердой стенки), формулы (2.2) в совокупности с уравнением (1.3) должны давать формулу Прандтля, т. е.  $\tau_i = \rho L_1^2 (\partial u / \partial y)^2$ . Во-вторых, диссипация  $\varepsilon_i$  должна выражаться формулой Колмогорова в виде  $\varepsilon_i = k^2 \sqrt{k} / L_2$ . Этим двум условиям можно удовлетворить, положив

$$\tau_i / \rho k = f_1 = (L_1 / L_2)^{1/3}, \quad \varepsilon_i L_2 / k \sqrt{k} = f_2 = 1 \quad (2.3)$$

К аналогичной, но физически более содержательной формуле для  $\tau_i$  придем, уточнив определения масштабов и используя сформулированную выше гипотезу.

3. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — соответственно максимальная и минимальная скорости на границах данного «простого» сдвигового слоя, а  $y_1$  и  $y_2$  — соответствующие им координаты. Кроме того, введем координаты  $y_1'$  и  $y_2'$  точек, в которых  $u_1' = u_1 - 0,01(u_1 - u_2)$  и  $u_2' = u_2 + 0,01(u_1 - u_2)$ . Толщиной данного сдвигового слоя назовем  $\delta_s = y_1' - y_2'$ . Полную толщину зоны смешения обозначим  $\delta_2$ . Если течение состоит из одного слоя сдвига, то  $\delta_2 = \delta_s$ , если из нескольких, то  $\delta_2 = \sum \delta_{si}$ , где  $i$  — номер слоя. Например, в слое смешения  $\delta_2 = \delta_s$ , а в плоской струе  $\delta_2 = 2\delta_s$ . Внутри каждого слоя сдвига определим функцию  $q$  такую, что она близка к единице в области  $u_2' < u < u_1'$  и равна нулю на границах слоя сдвига. Назовем функцию весовой и определим выражением

$$q = \frac{t^3}{t^3 + t_0^3}, \quad t = \frac{(u_1 - u)(u - u_2)}{(u_1 - u_2)^2}, \quad t_0 = 0,0843 \quad (3.1)$$

В свободных пограничных слоях  $u_3 = u_2$ . В пристеночных потоках будем брать  $u_3$  у стенки, но выше вязкого подслоя. Условно в пристенных потоках примем  $u_3 = u(y_{0,05})$ , где  $y_{0,05} = 0,05\delta_s$  и, кроме того,  $q = 0$  при  $0 \leq y \leq y_{0,05}$ . Толщину наибольших сдвиговых деформаций  $\delta_1$  (в области развитой турбулентности) определим формулой

$$\delta_1 = \left| \int_{u_1}^{u_2} q dy \right| \quad (3.2)$$

В работе [18] был введен средний по толщине интегральный масштаб

$$L_{11}(y) = \int_0^{\eta_m} |R_{11}(y+\eta)| d\eta, \quad \langle L_{11} \rangle = \int_{v_1}^{v_2} L_{11}(y) \frac{dy}{\delta_s} \quad (3.3)$$

Здесь  $R_{11}(y+\eta)$  — поперечная корреляционная функция пульсаций  $u'(y)$  и  $u'(y+\eta)$ ;  $\eta_m$  — наибольшее расстояние, на котором  $R_{11}=0$ . На фиг. 1, б, в цифрами показаны отношения  $\langle L_{11} \rangle / \delta_1 = a_1$  и  $\langle L_{11} \rangle / \delta_2 = a_2$ , найденные в основном по результатам, приведенным в работе [18], а также взятые из других работ, на которые далее сделаны ссылки. Цифры обозначают: 1 — пограничный слой на пластине; 2 — пограничный слой в точке минимума давления и 3 — вблизи точки отрыва; 4 — течение в плоском канале; 5 — плоская струя [10]; 6 — слой смешения; 7 — полуограниченная струя; 8 — плоский след за круглым цилиндром. В полуограниченной струе  $\langle L_{11} \rangle / \delta_1$  взято для внешнего сдвигового слоя, толщина которого  $\sim 0,9\delta_2$ . Данные для одного течения, взятые из разных экспериментов, осреднились.

На фиг. 1 видно, что разброс величины  $a_2$  для разных потоков меньше, чем  $a_1$ , поэтому для оценки интегрального масштаба далее будем пользоваться толщиной  $\delta_2$ , т.е.  $\langle L_{11} \rangle = a_{2m}\delta_2$ . Среднее значение коэффициента  $a_2$ , обозначенное  $a_{2m}$ , может быть оценено по данным на фиг. 1, б.

На фиг. 1, а кривой штриховкой обозначена область разброса опытных значений величины  $\lambda_f \epsilon_t / k \sqrt{k} = c_1$  в однородной турбулентности за решеткой для разных решеток и чисел Рейнольдса, где  $\lambda_f$  — интегральный масштаб турбулентности [19]. Эти данные показывают, что в однородной турбулентности диссипацию можно выразить формулой Колмогорова  $\epsilon_t = c_1 k \sqrt{k} / \lambda_f$ , поскольку  $c_1$  не зависит от числа Рейнольдса при больших значениях последнего. С учетом (2.3) примем  $\epsilon_t = ck \sqrt{k} / l_2$ .

В свободнотурбулентных потоках и во внешних областях пристенных течений, где можно считать  $l_2 = l_{2a} = l_{2a}(x)$ , с учетом  $\langle L_{11} \rangle = a_{2m}\delta_2$  положим  $l_{2a} = \delta_2$ .

Отношение  $\langle L_{11} \rangle / \delta_1 = a_1$  образует на фиг. 1, в две отчетливо выраженные группы — для течений с одним (I) и двумя сдвиговыми слоями (II). Примем, что в потоке с одним сдвиговым слоем средний масштаб турбулентности имеет ту оптимальную величину, обладая которой, вихри, согласно гипотезе п. 2, дают максимальный вклад в корреляцию  $\langle u'v' \rangle$ . Обозначим этот масштаб  $\langle L_{11} \rangle_r$  и выразим его формулой  $\langle L_{11} \rangle_r = a_{1m}\delta_1$ . Среднее значение коэффициента  $a_1$ , обозначенное  $a_{1m}$ , может быть оценено по данным на фиг. 1, в.

На фиг. 1, в видно, что в потоке с двумя сдвиговыми слоями  $\langle L_{11} \rangle > \langle L_{11} \rangle_r$ , а значит, в потоке содержатся крупные вихри, которые, согласно гипотезе п. 2, не дают вклада в  $\langle u'v' \rangle$ . Поскольку полная энергия пульсаций  $k$ , а средний масштаб  $\langle L_{11} \rangle$ , то поток энергии в область диссипации равен

$$\epsilon_t = c_1 k \sqrt{k} / \langle L_{11} \rangle \quad (3.4)$$

Если число Рейнольдса велико, то практически вся энергия пульсаций, переходя от малых волновых чисел к большим, проходит через диапазон волновых чисел  $\kappa_r \sim 1 / \langle L_{11} \rangle_r$ . Обозначим долю энергии пульсаций, соответствующую масштабу  $\langle L_{11} \rangle_r$ , через  $k_r$  и поток энергии — через диапазон  $\kappa_r$ , по соображениям размерности, выразим формулой

$$\epsilon_t = c_1 k_r \sqrt{k_r} / \langle L_{11} \rangle_r \quad (3.5)$$

Приравнивая (3.4) к (3.5) и учитывая, что  $\langle L_{11} \rangle = a_{2m} \delta_2$ ,  $\langle L_{11} \rangle_r = a_{1m} \delta_1$ , получим

$$k_r = \left( \frac{a_{1m}}{a_{2m}} \right)^{2/3} \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{2/3} k = \gamma'' \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{2/3} k \quad (3.6)$$

Величина  $k_r$  — энергия вихрей, обеспечивающих корреляцию, поэтому примем

$$\frac{\tau_i}{\rho} = -\langle u'v' \rangle = \gamma' k_r \frac{\partial u}{\partial y} \bigg/ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \gamma \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{2/3} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \bigg/ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) k \quad (3.7)$$

Отношение  $(a_{1m}/a_{2m})^{2/3} = \text{const}$  включено в коэффициент  $\gamma$ . Очевидно, что (3.7) аналогично (2.3). На фиг. 1,  $z$  стрелками обозначены величины  $\gamma(\delta_1/\delta_2)^{2/3}$  для слоя смещения (верхняя) и для струй и следа (нижняя) при  $\gamma = 0,56$ . Видно, что формула (3.7) согласуется с опытом. Отметим также, что показатель степени  $2/3$  в (3.6) может быть непосредственно связан с законом « $-5/3$ » Колмогорова.

Формула (3.7) не удобна для практических целей, поэтому преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{\tau_i}{\rho} = \gamma \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{2/3} \sqrt{k} \left( \sqrt{k} \bigg/ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial y} = l_1 \sqrt{k} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_i = l_1 \sqrt{k} \quad (3.8)$$

Отношение  $\sqrt{k}/|\partial u/\partial y|$  соответствует пути смещения Прандтля. Путь смещения может считаться постоянным в данном сечении струй, слоя смещения или во внешней области пристенных течений, и для этих случаев устанавливается его среднее значение

$$l_{1a} = \gamma \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{2/3} \left| \int_{v_1}^{v_2} \left( q \sqrt{k} \bigg/ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) \frac{dy}{\delta_1} \right| \quad (3.9)$$

В пристенной области масштабы  $l_1$  и  $l_2$  считаются линейно возрастающими с расстоянием от стенки и плавно сопрягающимися с постоянными их значениями во внешней области при помощи формул

$$l_1 = l_{1a} [\text{th}(\xi_1 s / l_{1a})^2]^{1/2}, \quad l_2 = l_{2a} [\text{th}(\xi_2 s / l_{2a})^2]^{1/2} \quad (3.10)$$

Здесь  $s=y$  и  $s=\infty$  — расстояние от стенки в пристенных потоках и в свободных пограничных слоях. Диффузионный член в уравнении (1.3) выразим градиентной формулой

$$-\langle v'(p' + \rho k') \rangle = \rho v_i \frac{\partial k}{\partial y}$$

Для плоских свободнотурбулентных и пристенных потоков эмпирические коэффициенты имеют одинаковые значения и равны

$$\gamma = 0,56, \quad c = 2,55, \quad \xi_1 = 0,21, \quad \xi_2 = 8 \quad (3.11)$$

При расчете пристенных потоков для плавного перехода в область вязкого подслоя введем следующие выражения для  $v_i$  и  $\varepsilon_i$ :

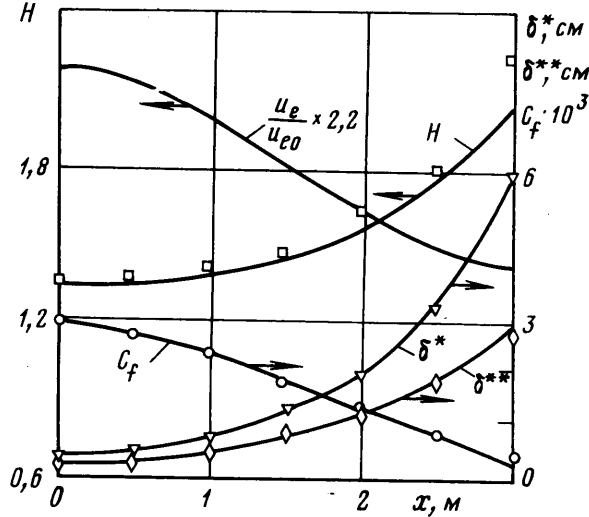
$$v_i = v_i^d = f l_1 \sqrt{k}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^d = c f \frac{k \sqrt{k}}{l_2} + 2(1-f) \nu \left( \frac{d \sqrt{k}}{dy} \right)^2 \quad (3.12)$$

Функция  $f$  является модификацией функции Ван-Дрифта и равна

$$f = (1-F)^2 \left[ 1 + \frac{0,8F^2}{(F^2 + 0,125)} \right], \quad F = \exp \left( -\frac{y\nu^*}{\nu A} \right)$$

$$A = \frac{26}{\sqrt{1-24p^*}}, \quad p^* = -\frac{dp}{dx} \frac{v}{\rho v_*^3}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

На фиг. 2 в качестве примера приведены результаты численного расчета пограничного слоя с положительным градиентом давления, соответствующего опытным данным работы [20]. В хорошем согласовании с опытом находятся расчеты слоя смешения, плоской струи, течений в канале и в трубе.



Фиг. 2

Расчеты круглой струи требуют модификации эмпирических коэффициентов. Согласно гипотезе Поупа [21], растяжение осей вихревых колец, несущих основную долю энергии пульсаций в круглой струе, приводит к убыстрению передачи энергии в область больших волновых чисел и уменьшению масштабов энергонесущих вихрей. На основе гипотезы Поупа можно ввести поправки в эмпирические коэффициенты

$$\gamma = \gamma_0(1 - \Delta), \quad c = c_0(1 + \Delta), \quad \Delta = c_2 |v \delta_2 / r \sqrt{k}|_G \quad (3.13)$$

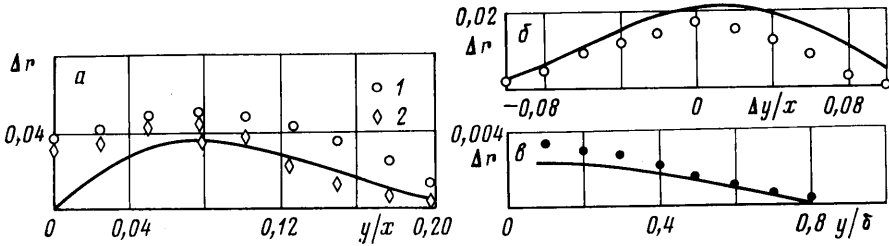
Здесь  $\gamma_0 = 0,56$ ,  $c_0 = 2,55$ ,  $c_2 = 0,45$ ,  $v$  — радиальная проекция скорости,  $r$  — радиальная координата. При использовании (3.13) профили скорости и энергии турбулентности в круглой струе хорошо согласуются с опытом при тех же определениях масштабов, что и в плоском случае.

4. Расчеты дальнего автомодельного плоского следа при значениях коэффициентов (3.11) имеют меньшую толщину следа. Уменьшение турбулентного числа  $Re_t = (u_1 - u_2) \delta_1 / \nu_t$  в следе по сравнению с плоской струей в ряде работ последнего времени объясняется релаксационными свойствами турбулентности. Тензор турбулентных напряжений представим следующим образом:

$$R_{ij} = -\langle \rho u_i' u_j' \rangle = - \left[ \frac{2}{3} \rho k + \frac{1}{3} tr(\mathbf{r}) \right] \delta_{ij} + r_{ij} \quad (4.1)$$

Уравнение для тензора  $\mathbf{r}$  примем в виде

$$\mathbf{r} + \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \lambda b_1 [(\mathbf{r}\mathbf{W}) + (\mathbf{r}\mathbf{W})^T] + \lambda b_2 [(\mathbf{r}\mathbf{D}) + (\mathbf{D}\mathbf{r})] = 2\rho\nu_t \mathbf{D} \quad (4.2)$$



Фиг. 3

Здесь  $\lambda$  – время релаксации,  $W$  – тензор вращения,  $D$  – тензор скоростей деформации. Если  $b_1=1$ , а  $b_2=\pm 1$ , то левая часть уравнения (4.2) соответствует левой стороне уравнения вязкоупругой среды, подчиняющейся принципу объективного поведения материала [22]. Турбулентность этому принципу не подчиняется, но уравнение (4.2) можно использовать как подходящую и сравнительно простую зависимость  $\gamma$  от  $W$  и  $D$ , подобрав соответствующие значения коэффициентов  $b_1$  и  $b_2$ . Для течения с предысторией постоянной деформации, когда  $V=e_1u_1$ ,  $u_2=u_3=0$ ,  $D_{12}=(du_1/dx_2)/2=\text{const}$ ,  $W_{12}=-W_{21}=(du_1/dx_2)/2=\text{const}$ , уравнение (4.2) при  $b_1=-1$  дает

$$r_{12} = -\rho \langle u'v' \rangle = \tau_t = \frac{\rho v_t}{[1 + \lambda^2 (du_1/dx_2)^2 (1 - b_2^2)]} \frac{du_1}{dx_2}$$

$$\langle \rho u_1'^2 \rangle - \langle \rho u_2'^2 \rangle = r_{22} - r_{11} = 2\lambda \left( \frac{du_1}{dx_2} \right) \tau_t \quad (4.3)$$

Примем, что в пограничных слоях, струях, где изменения профилей скорости сравнительно медленны, выполняются соотношения (4.3). Введем эффективный сдвиг  $\alpha_e = \lambda |du_1/dx_2|$ , который минимален в дальнем следе и имеет большие значения в струях и пограничных слоях [16]. Обобщая идею о близости течения в свдвиговых слоях следа к однородному сдвигу, высказанную в [12], введем коэффициент неоднородности сдвигового слоя  $m$  и примем эмпирическую связь  $\alpha_e = \alpha_{e0}(m)$ , а именно

$$m = \left[ \sqrt{l_1^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \delta_1^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2} / \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right]_c, \quad \alpha_e = \alpha_{e0} \text{th}(50m^2)$$

Величина  $m \approx 0$  для дальнего следа (соответственно  $\alpha_e = 0$ ) и имеет значения  $0,17 < m < 0,25$  для слоя смешения, пограничного слоя, трубы, канала и струй (соответственно  $\alpha_e \approx \alpha_{e0}$ ). Таким образом, выражение в квадратной скобке в знаменателе первой формулы (4.3) позволяет внести необходимую поправку в коэффициент турбулентной вязкости в случае дальнего плоского следа. Это выражение может быть включено в определение эмпирического коэффициента  $\gamma$  в (3.9), т. е.

$$\gamma = \gamma_1 / [1 + \alpha_e^2 (1 - b_2^2)]$$

Хорошее согласование расчета с опытом для всех указанных выше течений, включая дальний плоский след, получается при

$$\gamma_1 = 0,65, \quad \alpha_{e0} = 0,8, \quad b_2 = 0,866$$

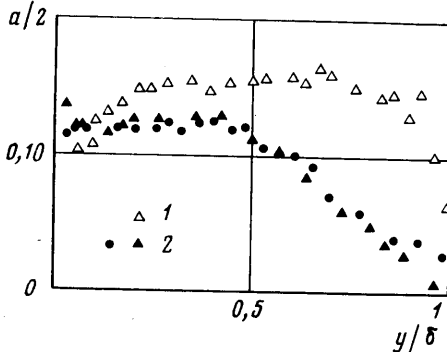
Угол  $\phi$  между главной осью тензора  $R$  и осью  $x_1$  оказывается равным  $-45^\circ$  для плоского следа и  $-25^\circ$  для струи, слоя смешения и пограничного слоя, что соответствует опытным данным [23]. На фиг. 3 сплошными линиями построена величина  $\Delta r = (\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle) / u_{\text{max}}^2$ , вычисленная по (4.3). На фиг. 3, а отмечены опытные данные для плоской струи: обозначения 1 и 2 соответствуют данным работ [10, 24]; на фиг. 3, б – для слоя смешения [8] ( $\Delta y = y - y_{0,5}$ , где  $y_{0,5} = y$  в точке  $u = 0,5u_{\text{max}}$ ); на фиг. 3, в – для пограничного слоя [13].

5. На фиг. 4 приведены опытные данные [25], где обозначения 1 и 2 соответствуют степеням турбулентности внешнего потока  $Tu=0$  и 6%, которые показывают, что в пристенном пограничном слое отношение  $|\langle u'v' \rangle| / k = a$  уменьшается при наличии турбулентности во внешнем потоке. Согласно теории, развитой в работах [16, 26], причиной уменьшения отношения является медленная релаксация внешней турбулентности, попадающей в сдвиговую область.

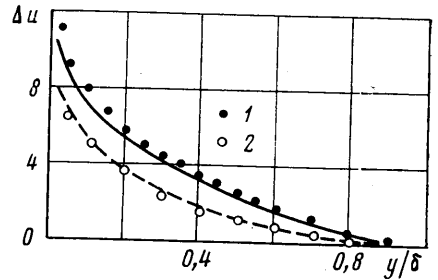
Рассмотрим влияние внешней турбулентности на пограничный слой на пластине. Гипотезу п. 2 сформулируем следующим образом: если размер вихря внешней турбулентности равен «оптимальному» размеру вихрей  $\langle L_{11} \rangle_T$  в пограничном слое, то время его релаксации равно нулю, а если больше – то бесконечности. Вырождение энергии пульсаций во внешнем потоке будем описывать уравнением

$$u_e \frac{dk^\circ}{dx} = - \frac{ck^\circ \sqrt{k^\circ}}{l^\circ} \quad (5.1)$$

Здесь  $l^\circ$  – масштаб внешней турбулентности, который может быть найден по распределению  $k^\circ = k^\circ(x)$ . Полную энергию турбулентности  $k^\circ$  представим в виде  $k^\circ = k_i^\circ + k_g^\circ$ , где  $k_i^\circ$  – энергия вихрей с масштабом  $\sim \delta_2$  пограничного слоя, которые участвуют в образовании касательного напряжения трения, поскольку время их релаксации, согласно гипотезе, равно нулю, а  $k_g^\circ$  – энергия более крупных вихрей



Фиг. 4



Фиг. 5

с масштабом  $\sim l_g^\circ$ , дающих вклад в напряжение трения лишь после их разрушения до размеров  $\sim \delta_2$ . По аналогии с (3.6) примем

$$k_i^\circ = k^\circ (\delta_2 / l^\circ)^{2/3}, \quad k_g^\circ = k^\circ [1 - (\delta_2 / l^\circ)^{2/3}] \quad (5.2)$$

Из уравнения для  $k_g^\circ$ , составленного аналогично (5.1), можно найти  $l_g^\circ$ . Во внешней области пограничного слоя преобладают вихри с масштабом  $\sim \delta_2$  и их энергия обозначается через  $k_i$ . Пульсации с масштабом  $\sim l_g^\circ$  индуцируются внешним потоком и обозначаются  $k_g$ . Уравнения для  $k_i$  и  $k_g$  примем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dk_g}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_{ii}) \frac{\partial k_g}{\partial y} \right] - \frac{ck_g \sqrt{k_g}}{l_g} \\ \frac{dk_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_{ii}) \frac{\partial k_i}{\partial y} \right] + v_{ii} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{ck_g \sqrt{k_g}}{l_g} - \frac{ck_i \sqrt{k_i}}{l_i} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Масштаб  $l_g$  выразим формулой, аналогичной (3.10),  $v_{ii} = v_{ii}(k_i)$ . Значения эмпирических коэффициентов остаются теми же. Граничные условия  $k_i = k_g = 0$ ,  $y = 0$ .  $k_g = k_g^\circ$ ,  $k_i = k_i^\circ$ ,  $y = \infty$ .

На фиг. 5 цифрами 1 и 2 обозначены опытные величины дефектов скорости  $\Delta u = (u_e - u) / v_*$  в пограничном слое на пластине при  $x = 0,7$  м при степенях турбулентности в данном сечении внешнего потока соответственно  $Tu \approx 0$  и  $4,7\%$ , взятые из [27]. Сплошной и штриховой линиями нанесены соответствующие распределения  $\Delta u$ , полученные путем численного интегрирования (5.3) для тех же условий. В хорошем согласии с опытом находятся также коэффициент сопротивления  $c_f$  и распределение энергии пульсаций.

Модель, построенная в п. 1–3, обобщена на случай неизотермических струйных течений и в работах [28, 29] применена для решения некоторых прикладных задач.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Кадер Б. А., Яглом А. М. Турбулентность в области применения «закона степени  $1/2$ » замедляющегося пограничного слоя.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 6.
2. Launder B. E., Schiestel R. Application d'un modèle de turbulence à échelles multiples au calcul d'écoulements li turbulents.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1979, v. 288, № 8, p. B127–B130.
3. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6, с. 75–79.
4. Акатнов Н. И., Тульверт В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 3, с. 25–33.
5. Акатнов Н. И. Влияние внешней турбулентности на развитие турбулентной струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 24–29.
6. Акатнов Н. И. Влияние турбулентности внешнего потока на турбулентный пограничный слой на пластине.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 26–31.
7. Моурел, Торда. Расчет свободного турбулентного смешения методом взаимодействия.— Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 4, с. 150–160.
8. Патель. Экспериментальное исследование плоской зоны смешения.— Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 11, № 1, с. 79–84.
9. Champagne F. H., Pao Y. H., Wignanski I. J. On the two-dimensional mixing region.— J. Fluid Mech., 1976, v. 74, № 2, p. 209–250.
10. Gutmark E., Wygnanski I. The planar turbulent jet.— J. Fluid Mech., 1976, v. 73, № 3, p. 465–495.
11. Wygnanski I., Fiedler H. E. Some measurements in the self-preserving jet.— J. Fluid Mech., 1969, v. 38, № 3, p. 577–612.
12. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959, с. 169, 237.
13. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient.— NASA Rept., 1955, № 1247, 19 p.
14. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968, с. 98–150.
15. Kruka V., Eskinazis S. The wall-jet in a moving stream.— J. Fluid Mech., 1964, v. 20, № 4, p. 555–579.
16. Townsend A. A. Entrainment and structure of turbulent flow.— J. Fluid Mech., 1970, v. 41, № 1, p. 13–46.
17. Townsend A. A. Flow patterns of large eddies in a wake and in a boundary layer.— J. Fluid Mech., 1979, v. 95, № 3, p. 515–537.
18. Акатнов Н. И. О линейных масштабах турбулентности в полуэмпирической теории.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 55–57.
19. Бэгчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955, с. 108.
20. Shubauer G., Spangenberg W. Computation of turbulent boundary layer — 1968. Proc. AFOSR – IFR Stanford Conference, 1969, v. 2, p. 427, Flow B (4500).
21. Поуп С. Б. Объяснение аномальной разницы в распространении осесимметричной и плоской турбулентных струй.— Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 3, с. 109–111.
22. Астарита Д., Марруччи Д. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978, с. 231.
23. Сабельников В. А. О направлении главных осей тензора напряжений Рейнольдса в турбулентных течениях с поперечным сдвигом.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2.
24. Heskestad G. Not-wire measurements in a plane turbulent jet.— Trans. Asme, J. Appl. Mech., 1965, v. 32, № 4, p. 721.
25. Arnal D., Cousteix J., Michel R. Couche limite se developpant avec gradient de pression positif dans un écoulement extérieur turbulents.— Rech. aerosp., 1976, № 1.
26. Jeandel D., Brison J. F., Mathieu J. Modelling methods in physical and spectral space.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, № 2, p. 169–182.
27. Charnay G., Mathieu J., Comte-Bellot G. Response of a turbulent boundary layer to random fluctuation in the external stream.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, № 9.
28. Акатнов Н. И., Лавров А. В. О влиянии пульсаций температуры и концентрации на физико-химические процессы в высокотемпературной турбулентной газовой струе.— Теплофиз. высоких температур, 1978, т. 16, № 5, с. 1005–1011.
29. Акатнов Н. И., Лавров А. В. Турбулентное смешение релаксирующих газов в сверхзвуковом сопле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 156–159.

Ленинград

Поступила в редакцию  
24.IV.1981