

На основании проведенных численных исследований можно сделать вывод, что из двух рассмотренных в статье классов сопел ГДЛ на CO_2 с точки зрения наименьших потерь колебательной энергии в резонаторной области более эффективными являются сопла, построенные на базе равномерной характеристики, которые при наличии острой кромки на выходе из сопловой решетки обеспечивают высокую степень однородности всех газодинамических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев С. А., Макаров В. Н. Многофакторная оптимизация газодинамического лазера на углекислом газе. I. Оптимизация коэффициента усиления.— Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 7, с. 1454–1458.
2. Макаров В. Н., Туник Ю. В. Определение оптимальных параметров сопла в газодинамическом лазере.— ПМТФ, 1978, № 5, с. 23–26.
3. Солоухин Р. И., Фокин Н. А. Изменение инверсии в потоке с газодинамическими возмущениями.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3, с. 596–599.
4. Левин В. А., Туник Ю. В. Движение релаксирующей смеси газов в двумерных плоских соплах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 118–125.
5. Кгаллерман М. Г., Мальков В. М., Рубан Н. А. Экспериментальное исследование течения в соплах газодинамических лазеров.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 178–182.
6. Бреев В. В., Минин С. Н., Пирумов У. Г., Шевченко В. Р. Течение смеси газов с релаксацией колебательной энергии в плоских и осесимметричных соплах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5, с. 125–131.
7. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавалы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 5, с. 10–22.
8. Киреев В. И. О моделировании газовых струй, истекающих из реальных сопел Лавалы.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2, с. 143–148.
9. Киреев В. И., Пирумов У. Г. О профилировании сопел модельных систем.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2, с. 187–189.
10. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977, 335 с.
11. Колмогоров В. Ф. Численное решение обратной задачи теории сопла Лавалы применительно к двумерным неравновесным течениям совершенного газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 136–142.
12. Hyde J. C., Hozack G. A., Osugi G. S. An investigation of velocity flowfields in chemical laser nozzles.— AIAA Pap., 1973, № 641, 7 p.
13. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками.— ПМТФ, 1967, № 2, с. 117–122.
14. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 351 с.
15. Киреев В. И., Пирумов У. Г. Расчет стационарных сверхзвуковых течений с неравновесными химическими реакциями.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 1, с. 182–190.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.1981

УДК 533.6.011:518.5

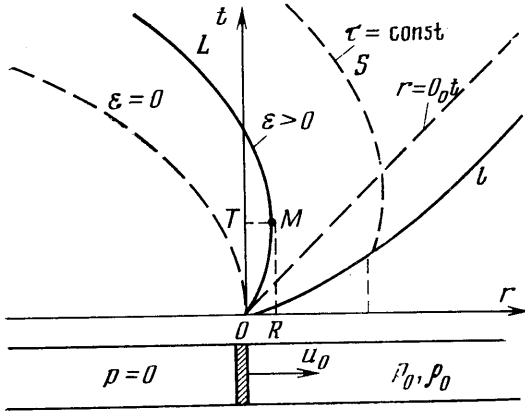
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ ПОСЛЕ КРАТКОВРЕМЕННОГО УДАРА

УСТИНОВ М. Д.

В статье получено приближенное решение задачи о движении поршня после кратковременного удара под действием давления газа в предположении, что параметр $\epsilon = u_0/a_0$, где u_0 — начальная скорость поршня, a_0 — скорость звука в покоящемся газе, является малым. В явном виде найдены с точностью до членов порядка ϵ^3 включительно функции, определяющие законы движения поршня и ударной волны, а также течение газа в возмущенной области.

1. Рассмотрим следующую задачу: в бесконечной цилиндрической трубе в области $r > 0$ (ось r параллельна образующей трубы), ограниченной поршнем массы m на единицу площади сечения, находится покоящийся газ, давление p_0 и плотность ρ_0 которого постоянны (форма сечения не имеет значения, поскольку ниже рассматривается одномерное течение идеального газа, в котором скорости частиц газа параллельны оси r и все параметры течения зависят лишь от r и времени t). В момент времени $t=0$ в результате удара поршень приобретает конечную скорость

$u_0 > 0$ и движется при $t > 0$ под действием давления газа (фигура, левее поршня — пустота). При $u_0 > 0$ поршень на некотором интервале $0 < t < T$ движется вправо, при $t = T$ его скорость обращается в нуль и далее поршень движется в отрицательном направлении оси r . Перед поршнем возникает ударная волна l , которая при $t \rightarrow \infty$ вырождается в звуковую волну. Требуется определить траекторию поршня L , закон движения ударной волны l и течение газа в области S между поршнем L и ударной волной l .



Движение газа, который считается идеальным и совершенным, описывается в области S системой уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial p \rho^{-\gamma}}{\partial t} + u \frac{\partial p \rho^{-\gamma}}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u , p , ρ — соответственно скорость, давление и плотность газа, r — геометрическая координата, t — время и $\gamma = \text{const} > 1$ — отношение удельных теплоемкостей.

На движущейся перед поршнем ударной волне l выполняются соотношения, вытекающие из законов сохранения массы, импульса и энергии

$$\begin{aligned} u &= \frac{2U}{\gamma+1} - \frac{2\gamma p_0}{(\gamma+1)\rho_0 U}, & p &= \frac{2\rho_0 U^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_0 \\ \rho &= \frac{(\gamma+1)\rho_0^2 U^2}{2\gamma p_0 + (\gamma-1)\rho_0 U^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $U = U(t)$ — скорость движения ударной волны.

На поршне L , который движется под действием давления газа со скоростью $V(t)$, равной скорости газа, имеем

$$m \frac{dV}{dt} = -p, \quad V(0) = u_0 \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) позволяют ввести функции $\tau(r, t)$, $\xi(r, t)$ и $\eta(r, t)$, такие, что [2]

$$\begin{aligned} d\tau &= \rho dr - \rho u dt \equiv m dy, & d\xi &= \rho u dr - (p + \rho u^2) dt \equiv -m a_0 dz \\ d\eta &= u d\xi + \left(\int v - \frac{1}{2} u^2 \right) d\tau \equiv m a_0^2 dz, & p &= v^{\gamma/(\gamma-1)}, & f(\tau) &= \frac{p^{1/\gamma}}{(\gamma-1)\rho} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, a_0 — скорость звука в покоящемся газе.

Нетрудно проверить, что функция $z(x, y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \\ - \varphi(y) \left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \\ \varphi(y) = m f'(\tau) / f(\tau) \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем функция $\varphi(y)$ заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

На ударной волне имеем [3]

$$d\tau = \rho_0 U dt, \quad d\xi = -p_0 dt, \quad d\eta = p_0 U dt / (\gamma-1) \quad (1.6)$$

Если $y=y_0(x)$ — образ ударной волны в плоскости (x, y) , то из (1.2) и (1.6) вытекает, что функция $z(x, y)$ удовлетворяет на линии $y=y_0(x)$ условиям

$$y=y_0(x): \quad z = \frac{y_0(x)}{\gamma(\gamma-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\gamma^2 - (y_0')^2}{\gamma(\gamma+1)y_0'}, \quad U = \frac{a_0}{\gamma} y_0' \quad (1.7)$$

Граничное условие (1.3) на поршне, где $y=0$, интегрируется с учетом (1.4), поскольку на поршне скорость газа совпадает со скоростью поршня. Таким образом, (1.3) принимает вид

$$z = 1/2 x^2 - \varepsilon x, \quad \varepsilon = u_0/a_0 \quad (1.8)$$

2. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что функция $z(x, y)$, являющаяся решением нелинейного уравнения второго порядка гиперболического типа (1.5), должна удовлетворять не двум, а трем граничным условиям (1.7) и (1.8). Третье условие и позволяет определить неизвестную функцию $y_0(x)$, так что задача является вполне корректной; функция $\varphi(y)$ выражается через y_0' и y_0'' (см. ниже).

При нахождении решения уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям (1.7) и (1.8), будем предполагать, что $\varepsilon \ll 1$.

При $\varepsilon=0$ течение в области между поршнем и передним фронтом звуковой волны l_0 является простой волной [1]; уравнение фронта в плоскости (x, y) имеет вид $y=\gamma x$. Будем считать, что при $\varepsilon>0$

$$y_0(x) = \gamma [x + \varepsilon \varphi_1(x) + \varepsilon^2 \varphi_2(x) + \varepsilon^3 \varphi_3(x) + \dots] \quad (2.1)$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ подлежат определению.

Решение сформулированной выше задачи ищем в виде

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \varepsilon z_1(x, y) + \varepsilon^2 z_2(x, y) + \varepsilon^3 z_3(x, y) + \dots = z_*(x, y, \varepsilon) + \varepsilon^3 z_3(x, y) + \dots \quad (2.2)$$

Используя граничные условия (1.2) на ударной волне, можно показать, что на линии (2.1)

$$y=y_0(x): \quad \varphi(y) = \frac{16(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \varepsilon^3 \varphi_1'^2(x) \varphi_1''(x) + \dots \quad (2.3)$$

$$y=y_0(x): \quad u - \frac{2a}{\gamma-1} = -\frac{2a_0}{\gamma+1} \left[-\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \varepsilon^3 \varphi_1'^2(x) + \dots \right] \quad (2.4)$$

Равенство (2.3) означает, что если пренебречь членами порядка ε^3 , то течение газа перед поршнем является изоэнтропическим и, согласно (2.4), представляет простую волну.

Иначе говоря, функция $z_*(x, y, \varepsilon)$, введенная в (2.2), удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$u - \frac{2a}{\gamma-1} = -\frac{2a_0}{\gamma-1} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{\gamma+1} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{4\gamma}{\gamma+1} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{\gamma^2-1} \quad (2.5)$$

и граничному условию (1.8) на поршне.

Уравнение (2.5) имеет полный интеграл

$$z = Ax + \frac{A^2 - b}{a} y + B - \frac{2x}{\gamma+1}, \quad a = -\frac{4\gamma}{\gamma+1}, \quad b = \frac{8\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)^2} \quad (2.6)$$

Варьируя постоянные A и B , получим общий интеграл уравнения (2.5), содержащий произвольную функцию, которая определяется из условия (1.8). Таким образом, имеем

$$z_*(x, y, \varepsilon) = \frac{\gamma[(\gamma+1)(x-\varepsilon)+2]^2}{(\gamma+1)^2[(\gamma+1)y+2\gamma]} - \frac{2x}{\gamma+1} + \frac{2y}{\gamma^2-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1} - \varepsilon \right)^2 \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что условия (1.7) на линии (2.1) будут выполнены с точностью до членов порядка ε^2 включительно, если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, которые при $x=0$ должны обращаться в нуль, определяются равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2} x} - 1, \\ \varphi_2(x) &= -\frac{1}{8} (\gamma+1) \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2} x} + \frac{3(\gamma+1)}{8} - \frac{\gamma+1}{4\sqrt{1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)x}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Используя (2.2), (2.3), (2.7) и (2.8), находим из (1.5) линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных гиперболического типа, которому удовлетворяет функция $z_3(x, y)$. После преобразования к характеристическим переменным α и β это уравнение принимает вид

$$[2 - (\gamma - 1)\alpha] \frac{\partial^2 z_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{3\gamma - 1}{2} \frac{\partial z_3}{\partial \beta} =$$

$$= -\frac{\gamma^2}{8} \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma + 1)}} [2 - (\gamma - 1)\alpha]^{(7\gamma - 9)/4(\gamma - 1)} [(\gamma - 1)\beta]^{-(3\gamma - 5)/4(\gamma - 1)}$$

$$\alpha = \frac{(\gamma + 1)x + 2}{(\gamma + 1)y + 2\gamma}, \quad \beta = \left(\frac{2}{\gamma - 1} - \frac{(\gamma + 1)x + 2}{(\gamma + 1)y + 2\gamma} \right) \left(y + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right)^{-2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)} \quad (3.1)$$

Общее решение этого уравнения

$$z_3(\alpha, \beta) = F(\beta) [2 - (\gamma - 1)\alpha]^{(3\gamma - 1)/2(\gamma - 1)} + \Phi(\alpha) +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{\gamma - 7} \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^3}} [2 - (\gamma - 1)\alpha]^{(7\gamma - 9)/4(\gamma - 1)} [(\gamma - 1)\beta]^{(\gamma + 1)/4(\gamma - 1)} \quad (3.2)$$

где $\Phi(\alpha)$ и $F(\beta)$ — произвольные функции характеристических переменных α и β соответственно.

Первое из условий (1.7) и условие (1.8) на поршне, записанные с учетом (2.7) и (2.8), принимают вид

$$z_{3/OA} = \frac{\gamma + 1}{8} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}} \left[\frac{\gamma(\gamma - 1)\beta}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma + 1)/4(\gamma - 1)} \right\}, \quad (3.3)$$

$$z_{3/OB} = 0$$

Прямая OB , уравнение которой получается из выражений (3.1) для α и β при $y = 0$, является образом поршня в плоскости характеристических переменных (α, β) .

При подстановке в (2.2) вместо y его значения, определяемого равенством (2.8), удержим лишь члены порядка не выше ε^3 . Это означает, что в выражении для z_3 вместо y можно подставлять γx , т. е., согласно (3.1), $\alpha = 1/\gamma$ (линия OA) есть образ ударной волны в плоскости (α, β) , а точнее, ее нулевого приближения $y = \gamma x$.

Условия (3.3) позволяют определить функции F и Φ , входящие в общее решение (3.2). Окончательно имеем следующее выражение для функции z_3 после перехода к переменным x и y :

$$z_3(x, y) = \frac{\gamma + 1}{8} \left[1 + \frac{8}{\gamma - 7} (1 - h^{(\gamma - 7)/4(\gamma - 1)}) \right] h^{(7\gamma - 1)/4(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{1}{\gamma + 1/2\gamma(\gamma + 1)y} \right) \quad (3.4)$$

$$h = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(\gamma + 1)x + 2}{(\gamma + 1)y + 2\gamma} \right)$$

Второе из условий (1.7) позволяет найти функцию $\Phi_3(x)$:

$$\Phi_3(x) = \frac{(\gamma + 1)(29\gamma - 35)}{64} \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2}x - \frac{(\gamma + 1)(31\gamma - 33)}{32}}$$

$$- \frac{(\gamma + 1)(29 - 35\gamma)}{64\sqrt{1 + 1/2(\gamma + 1)x}} - \frac{(\gamma + 1)^2}{32\sqrt{(1 + 1/2(\gamma + 1)x)^3}} \quad (3.5)$$

4. Формулы (2.7), (2.8), (3.4) и (3.5) дают решение поставленной задачи. Соотношения (1.4) позволяют найти в параметрическом виде газодинамические параметры в области S . Вдоль траекторий частиц газа, для которых $y = y_* = \text{const}$, переменная x возрастает от значения x_* , соответствующего y_* , до некоторого значения x^* , для которого давление p обращается в нуль, т. е. согласно (1.4)

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Закон движения поршня ($y=0$) определяется равенствами

$$r = ma_0^2 \int_0^{x'} \frac{\varepsilon - x}{p} dx, \quad t = ma_0 \int_0^{x'} \frac{dx}{p} \quad (4.1)$$

$$p^{(\gamma-1)/\gamma} = \gamma(\gamma-1) p_0^{(\gamma-1)/\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2-1}{12} \varepsilon^3 \right) \left[\frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \varepsilon - x \right)^2 + \varepsilon^3 \frac{\partial z_3(x, 0)}{\partial y} \right]$$

В частности, координаты (R, T) точки M в плоскости (r, t) , в которой скорость поршня обращается в нуль (и далее поршень движется в обратном направлении), определяются из (4.1) при $x' = \varepsilon$. После несложных преобразований находим, что

$$R = \frac{m\gamma\varepsilon^2}{2\rho_0} \left[1 - \frac{2\gamma}{3} \varepsilon + \frac{\gamma(3\gamma-1)}{8} \varepsilon^2 - \frac{\gamma}{160} (37\gamma^2 - 30\gamma - 3) \varepsilon^3 \right]$$

$$T = \frac{m\gamma\varepsilon}{\rho_0 a_0} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \varepsilon + \frac{\gamma(3\gamma-1)}{12} \varepsilon^2 - \frac{\gamma(\gamma-1)(5\gamma+1)}{32} \varepsilon^3 \right], \quad a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Нетрудно проверить, что функции R и T и их частные производные по параметрам ε и γ положительны в области $0 < \varepsilon < 3/10$, $1 < \gamma < 3$, что позволяет сделать определенные выводы о характере влияния этих параметров на закон движения поршня.

Анализ выражения (4.1) для давления на поршне показывает, что при $x \rightarrow 2/(\gamma-1) + \varepsilon$ давление стремится к нулю с точностью до членов порядка ε^3 включительно и предельная скорость поршня ($t \rightarrow \infty$) оказывается такой же, как и в случае движения поршня без начальной скорости [1], когда $\varepsilon = 0$. Действительно, согласно (1.4) и (1.8)

$$u = -a_0 \frac{\partial z(x, 0)}{\partial x} = a_0(\varepsilon - x) \rightarrow -\frac{2a_0}{\gamma-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
3. Устинов М. Д. Некоторые аналитические решения уравнений одномерного движения газа и их приложения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2, с. 90–103.

Минск

Поступила в редакцию
30.IV.1981

УДК 533.6.011.35

ДАЛЬНЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ ПРИ ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ НЕНЕСУЩЕГО ПРОФИЛЯ

СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д.

Построено новое аналитическое решение нелинейных околзвучковых уравнений, описывающее дальнейшее безвихревое поле течения (с двумя осями симметрии) при околзвучковом обтекании несущего профиля. При удалении от профиля нелинейное поле непрерывно переходит в поле линейной теории (случай обтекания диполя без циркуляции). Решение выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Плоское стационарное безвихревое течение идеального газа вдали от профиля при его обтекании однородным потоком (фиг. 1), текущим в направлении оси x , описывается системой Кармана – Фальковича в форме Спрейтера

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad v = (\gamma+1)M_\infty^2 \theta \quad (1)$$

$$u = M^2 - 1 = u_\infty + (\gamma+1)M_\infty^2 \eta, \quad u_\infty = M_\infty^2 - 1$$

Здесь γ — отношение теплоемкостей, x, y — безразмерные декартовы координаты (масштаб — хорда), θ — угол наклона вектора скорости \mathbf{V} к оси x , $\eta = V/V_\infty - 1$, V_∞ и M_∞ — скорость и число Маха набегающего потока; $|\theta|, |\eta| \ll 1$. Если u_∞ значитель-