МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1982

УДК 538.4

О СПЕКТРЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ПЛАЗМЫ ПРИ ДЖОУЛЕВОМ РАЗОГРЕВЕ

РУТКЕВИЧ И. М.

Реакция низкотемпературной плазмы на локализованное внешнее воздействие может выражаться в «мгновенной» генерации газодинамических возмущений во всей области, занятой проводящим газом. Аналитические примеры такого поведения, обусловленного дальнодействующим характером возмущений электрического поля, построены в [1, 2]. В сверхзвуковых течениях следствием эффектов дальнодействия должно быть возникновение спектра газодинамических возмущений при нулевых граничных условиях на входе в канал. На это указывают результаты численных исследований линейной устойчивости [3, 4] и конечно-амплитудных возмущений [5] в сверхзвуковых МГД-каналах.

В предлагаемой работе проводится анализ спектра возмущений для сверхзвукового течения плазмы, нагреваемой током от внешнего источника. В этом случае возникновение спектра связано исключительно с влиянием внешней цепи. Показано, что при протекании тока вдоль канала и достаточно резком возрастании электропроводности с температурой на стационарной вольт-амперной характеристике (ВАХ) возникает участок убывания напряжения с ростом плотности тока. Для возмущений, меняющихся со временем по закону $\exp\lambda t$, при фиксированных газодинамических параметрах на входе в канал установлено существование счетного множества собственных значений λ.

Дан пример возникновения колебательной неустойчивости акустического типа. Установлено, что для течений, расположенных на падающей ветви ВАХ, возможна апериодическая неустойчивость перегревного типа. Получено выражение для инкремента нарастающей стоячей волны, возникающей в сверхзвуковом потоке благодаря наличию внешней электрической цепи. Обсуждается возможность управления медленными апериодическими возмущениями посредством балластной нагрузки и реактивных элементов цепи.

1. Основное состояние и его свойства. Рассмотрим стационарное сверхзвуковое течение проводящего газа с электропроводностью $\sigma(T, p)$ в цилиндрическом канале постоянного сечения F с непроводящей боковой стенкой. В концевых сечениях канала $x=0$ и $x=l$ расположены осесимметричные электроды. Вдоль канала протекает электрический ток, который создается внешним источником с э.д.с. ε. Последовательно с сопротивлением плазмы в цепь источника включена балластная омическая нагрузка R. Будем допускать также наличие реактивных элементов в этой цепи. При изменении тока по закону $\exp\lambda t$ линейную внешнюю цепь можно охарактеризовать импедансом $Z(\lambda)$, удовлетворяющим условию $R=Z(0)$. При $l\gg(F/\pi)^{1/2}$ плотность тока вне относительно коротких концевых зон можно считать постоянной. Ее величина j определяется формулой

$$j=\varepsilon \Big/ \left(RF+\int\limits_0^l \sigma^{-1}\,dx\right) \qquad (1.1)$$

В пренебрежении трением и теплообменом со стенкой распределения газодинамических параметров по длине описываются следующей системой уравнений (обозначения общепринятые):

$$\rho u = g = \mathrm{const}, \qquad p + gu = p_m = \mathrm{const}$$
$$p = c_V(\gamma-1)\rho T, \qquad g\frac{d}{dx}\left(c_pT + \frac{u^2}{2}\right) = \frac{j^2}{\sigma} \equiv Q \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что при задании величин g, p_m и скорости на входе в канал $u(0)=u_0$ все газодинамические параметры можно выразить через распределение скорости $u(x)$

$$\rho = \frac{g}{u}, \quad p = p_m - gu, \quad T = \frac{u_0 u}{c_V(\gamma-1)}\left(\frac{p_m}{gu_0} - \frac{u}{u_0}\right) \tag{1.3}$$

Течение на входе будет сверхзвуковым при $M_0^2 = \gamma^{-1}(p_m/gu_0 - 1)^{-1} > 1$. С учетом (1.3) уравнение энергии приводится к виду

$$(\gamma+1)(\gamma-1)^{-1}g(u_* - u)\,du/dx = j^2/\sigma(u) \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma(u) = \sigma(T(u),\ p(u))$, а $u_* = u_0(\gamma + M_0^{-2})(\gamma+1)^{-1}$ — скорость в критическом сечении, где $M=1$.

Так как $Q>0$, то из (1.3) и (1.4) следует, что в канале сверхзвуковой поток тормозится, а величины T, p и ρ возрастают вниз по потоку. Качественные свойства течения в канале плазмотрона рассматривались в [6], где плотность тока j считалась известной. При заданной величине j течение определено однозначно, так как зависимость $x(u,\ j)$ монотонна по u

$$x(u,j) = (\gamma+1)g(\gamma-1)^{-1}j^{-2}\int\limits_u^{u_0} \sigma(u)(u-u_*)\,du \tag{1.5}$$

Будем рассматривать только непрерывные сверхзвуковые течения, считая $l < l_* = x(u_*,\ j)$. В отличие от рассмотрения [6] величина j не предполагается здесь известной, а должна находиться в процессе решения задачи. При этом возникает вопрос о единственности сверхзвукового течения при задании газодинамических параметров g, p_m, u_0 и параметров цепи ε, R. Для ответа на этот вопрос достаточно построить ВАХ

$$V(j) = j\int\limits_0^l \sigma^{-1}(u(x,j))\,dx \tag{1.6}$$

где V — падение напряжения на длине канала, и определить число точек пересечения ВАХ с нагрузочной прямой

$$V = \varepsilon - RFj \tag{1.7}$$

Появление на ВАХ падающей ветви с $dV/dj<0$ обеспечивает неединственность течения в односторонней окрестности линии бифуркации Г на плоскости параметров ε, R. Линия Г определяется как множество точек $P = (\varepsilon_c,\ R_c)$, таких, что при $P \in \Gamma$ нагрузочная характеристика (1.7) касается ВАХ (1.6), т. е.

$$R = R_c = -F^{-1}dV/dj, \qquad \varepsilon_c = V + R_cFj \tag{1.8}$$

Дифференцируя (1.6) по j и используя формулу (1.5), из (1.8) получим

$$R_c(j) = \frac{(\gamma+1)g}{(\gamma-1)j^2F}\left[\int\limits_{u_1}^{u_0}(u-u_*)\,du - 2\int\limits_{u_1}^{u_0}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u_1)}(u-u_*)\,du\right] \tag{1.9}$$

Здесь $u_1=u_1(j)$ — значение скорости при $x=l$. Величина $\varepsilon_c(j)$ определяется из формул (1.8), (1.9). Линия бифуркации существует, если правая часть в (1.9) положительна.

При сверхзвуковом течении термической плазмы, характеризуемой резко возрастающей зависимостью $\sigma(T)_p$ и слабо меняющейся зависимостью $\sigma(p)_T$, будет иметь место резкое убывание $\sigma(u)$. Сформулируем достаточное условие, обеспечивающее положительность правой части (1.9) при убывающей $\sigma(u)$. Запишем второй интеграл в правой части (1.9) в виде

$$\int_{u_1}^{u_0}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u_1)}(u-u_*)\,du=(u_0-u_*)\int_{u_1}^{u_0}r(u)s(u)\,du,\qquad r=\frac{\sigma(u)}{\sigma(u_1)},\qquad s=\frac{u-u_*}{u_0-u_*}$$

Применяя к интегралу от произведения rs неравенство Стеффенсена [7], можно показать, что правая часть в (1.9) будет положительной при выполнении неравенства

$$\frac{1}{w}\int_{u_1}^{u_1+w}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u_1)}\,du<\frac{1}{2},\qquad w=\frac{(u_0+u_1-2u_*)(u_0-u_1)}{2(u_0-u_*)}\tag{1.10}$$

Неравенству (1.10) можно удовлетворить, если $\sigma(u)$ убывает достаточно резко, а длина канала достаточно велика (но меньше длины l_* запирания сверхзвукового потока).

Механизм образования падающего участка на ВАХ в рассматриваемом течении аналогичен тому, который имеет место в неподвижном разряде, стабилизированном плоскими электродами [8]. Отличие настоящей ситуации от рассмотренной в [8] состоит в ином способе отвода джоулева тепла (перенос макроскопическим движением среды, а не теплопроводностью).

2. Существование спектра и свойства высокочастотных собственных колебаний. Возможность существования одномерных собственных возмущений вида $\delta f=f'(x)\exp\lambda t$, удовлетворяющим нулевым граничным условиям при $x=0$, связана с появлением пространственно однородного возмущения плотности тока δj. При фиксированной э.д.с. величина δj определяется формулой

$$\delta j=j\int_0^l(\sigma_T\delta T+\sigma_p\delta p)\sigma^{-2}\,dx\Big/\Big[Z(\lambda)F+\int_0^l\sigma^{-1}\,dx\Big]\tag{2.1}$$

$$\sigma_T=(\partial\sigma/\partial T)_p,\qquad \sigma_p=(\partial\sigma/\partial p)_T$$

Собственные функции и собственные значения должны быть найдены из следующей спектральной задачи:

$$\lambda\rho'+dg'/dx=0,\qquad \lambda\rho u'+dp'/dx+gdu'/dx+g'du/dx=0\tag{2.2}$$

$$\lambda\rho(c_VT'+uu')+gd(c_pT'+uu')/dx+c_V(\gamma-1)Tdg'/dx+Qg'/g=Q',$$

$$u'(0)=0,\qquad g'(0)=0,\qquad T'(0)=0$$

Для Q' имеет место формула

$$Q'=Q\left\{-\frac{\sigma_TT'+\sigma_pp'}{\sigma}+2\int_0^l\frac{\sigma_TT'+\sigma_pp'}{\sigma^2}\,dx\Big/\Big[Z(\lambda)F+\int_0^l\sigma^{-1}\,dx\Big]\right\}\tag{2.3}$$

Учитывая (2.3) и соотношения

$$\rho'/\rho=g'/g-u'/u,\qquad p'/p=T'/T+g'/g-u'/u\tag{2.4}$$

придем к задаче для системы интегродифференциальных уравнений относительно собственных функций u', g' и T'. Эта задача является специальным случаем спектральной задачи для общей системы уравнений следующего вида:

$$A(x)\frac{d\mathbf{f}}{dx}+(\lambda I+B(x))\mathbf{f}=G(x,\lambda)\int\limits_0^l H(\xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi,\qquad \mathbf{f}(0)=0 \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{f}$ — неизвестная вектор-функция, B, G и H — произвольные матрицы, I — единичная матрица. Все собственные значения матрицы A (характеристические скорости $c_i(x)$) положительны в области $0\leqslant x\leqslant l$. (В частности, система (2.5) возникает для одномерных собственных возмущений в сверхзвуковых магнитогазодинамических течениях с учетом внешней цепи.)

Пусть P — матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{g}_i(x,\lambda)$, образующие фундаментальную систему решений укороченной системы (2.5) (с нулевой правой частью). Тогда решение поставленной задачи можно искать в виде: $\mathbf{f}=P\mathbf{C}(x,\lambda)$. При этом относительно $\mathbf{C}$ возникает следующая задача:

$$AP\frac{d\mathbf{C}}{dx}=G\int\limits_0^l HP\mathbf{C}\,dx,\qquad \mathbf{C}(0)=0 \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует соотношение:

$$\mathbf{C}(x,\lambda)=\int\limits_0^x P^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)G(\xi,\lambda)d\xi\int\limits_0^l HP\mathbf{C}\,dx \tag{2.7}$$

Умножая (2.7) на матрицу $H(x)P(x,\lambda)$ слева и интегрируя получившееся равенство в пределах $(0, l)$, придем к соотношению

$$(I-\Psi(\lambda))\int\limits_0^l HP\mathbf{C}\,dx=0 \tag{2.8}$$

$$\Psi(\lambda)=\int\limits_0^l H(x)P(x,\lambda)\int\limits_0^l P^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)G(\xi,\lambda)d\xi\,dx$$

При $\mathbf{C}(x)\neq 0$ из (2.7) следует, что интеграл от вектора $HP\mathbf{C}$ отличен от нуля. Тогда из (2.8) следует уравнение на собственные значения:

$$D(\lambda)=\det\|I-\Psi(\lambda)\|=0 \tag{2.9}$$

Для достаточно гладких матриц $A(x)$ и $B(x)$ фундаментальные решения укороченной системы можно выбрать так, чтобы они были целыми аналитическими функциями от λ (см., например, [9]). Тогда матрицы P и P^{-1} будут аналитичны по λ. Если матрица G является целой или мероморфной по λ, то и матрица Ψ обладает аналогичным свойством. В этом случае корни функции $D(\lambda)$ не имеют конечной предельной точки в комплексной плоскости, т. е. собственные значения спектральной задачи (2.5) образуют не более счетного множества точек (дискретный спектр). В отсутствие в системе (2.5) дальнодействующих интегральных членов имеет место равенство $\Psi\equiv 0$ и спектр отсутствует. Отметим отличие этого вывода от результатов [1, 10–12] анализа возмущений в проводящих средах. В этих работах рассматривались спектральные задачи для интегродифференциальных уравнений, в которых интегральная часть оператора задавалась внешней электрической цепью. Однако спектр мог существовать и в отсутствие интегральных членов благодаря отражению волн от границ.

При достаточно больших $|\lambda|$ фундаментальные решения укороченной системы уравнений можно получить в виде асимптотических ВКБ-разложений [9]. Будем считать матрицу A диагональной, т. е. $A_{ij}=c_i(x)\delta_{ij}$, что соответствует записи исходных уравнений в инвариантах Римана. Тогда при больших $|\lambda|$ векторы $\mathbf{g}_i(x,\lambda)$ можно представить в виде асимптотических рядов

$$\mathbf{g}_i(x,\lambda)=\exp[-\lambda\varphi_i(x)]\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^{-r}\mathbf{g}_i^{(r)}(x),\qquad \varphi_i(x)=\int_0^x c_i^{-1}(\xi)\,d\xi \tag{2.10}$$

Если все c_i различны, то компоненты $g_{ij}^{(0)}$ векторов $\mathbf{g}_i^{(0)}$, определяющих главную часть разложения (2.10), имеют вид

$$g_{ij}^{(0)}=\exp\left(-\int_0^x c_i^{-1}(\xi)B_{ii}(\xi)\,d\xi\right)\delta_{ij} \tag{2.11}$$

Используя (2.10), можно найти асимптотический вид $D(\lambda)$.

Возвращаясь к спектральной задаче (2.2) и переходя к вектор-функции $\mathbf{f}$, компонентами которой будут инварианты Римана

$$f_1=\rho c u'+p',\qquad f_2=\rho c u'-p',\qquad f_3=S'/c_V \tag{2.12}$$

где S' — возмущение энтропии, придем к задаче (2.5) с диагональной матрицей $A_{ij}=c_i(x)\delta_{ij}$, где $c_1=u+c$, $c_2=u-c$, $c_3=u$. Диагональные элементы матрицы $B_{ij}(x)$ имеют вид

$$B_{11}=\frac{(\gamma-1)Q}{2gu}\left\{\frac{M^2}{1-M^2}[3+M-(3+M^{-1})(1-\gamma M^2)/2]+M+\gamma M^2(1+\Sigma_p)\right\} \tag{2.13}$$

$$B_{22}=B_{11}(-M),\quad B_{33}=\Sigma_S(\gamma-1)Q/p,\quad \Sigma_p=(\partial\ln\sigma/\partial\ln p)_S,\quad \Sigma_S=c_V(\partial\ln\sigma/\partial S)_p$$

Внедиагональные элементы B_{ij} имеют аналогичное строение и здесь не приводятся. Элементы матриц G_{ij} и H_{ij} имеют вид

$$G_{ij}=G_i\delta_{ij},\qquad G_1=G_2=\zeta,\qquad G_3=\zeta/p \tag{2.14}$$

$$H_{11}=H_{22}=-H_{12}=-H_{21}=H_{31}=-H_{32}=\Sigma_p/(p\sigma)$$

$$H_{13}=-H_{23}=H_{33}=2\Sigma_S/\sigma,\qquad \zeta=(\gamma-1)Q\Big/\left[Z(\lambda)F+\int_0^l\sigma^{-1}\,dx\right]$$

При больших $|\lambda|$ уравнение на собственные значения (2.9) представляет собой асимптотический ряд и при сохранении в нем только главных членов имеет вид

$$\sum_{k=1}^{3}\beta_k\exp[-\lambda\varphi_k(l)]-\lambda^2=0 \tag{2.15}$$

$$\beta_k=G_k^{\infty}(0)c_k(l)H_{kk}(l)K_k,\qquad K_k=\exp\left(-\int_0^l c_k^{-1}B_{kk}\,dx\right)$$

Здесь $G_k^{\infty}(x)=\lim G_k(x,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$, а величины K_k представляют собой коэффициенты усиления высокочастотных возмущений на выходе из канала для быстрой звуковой, медленной звуковой и энтропийной волн, движущихся со скоростями c_1, c_2 и c_3 соответственно. При наличии у $Z(\lambda)$ конечного предела $Z_\infty\geqslant 0$ при $\lambda\to\infty$, т. е. когда высокочастотное поведение импеданса не носит индуктивный характер, величины β_k будут вещественны и конечны.

Из асимптотических свойств корней квазиполиномов [13] следует, что корни уравнения (2.15) с достаточно большими $|\lambda|$ асимптотически близки к корням уравнения

$$\lambda^2 \exp[\lambda\varphi_2(l)] = \beta_2 \tag{2.16}$$

которое получается из (2.15) удержанием в сумме экспонент только члена с наибольшим $\varphi_k(l)$. Из (2.16) при $|\operatorname{Im}\lambda| \gg |\operatorname{Re}\lambda|$ получим

$$\operatorname{Re}\lambda_m \approx -\frac{1}{\varphi_2(l)} \ln\left(\frac{\pi^2 m^2}{\varphi_2{}^2(l)\,|\beta_2|}\right), \qquad \operatorname{Im}\lambda_m \approx \frac{\pi m}{\varphi_2(l)} \tag{2.17}$$

Здесь m — последовательность, пробегающая нечетные значения, если $\beta_2 > 0$ и четные — если $\beta_2 < 0$.

Если высокочастотное поведение импеданса имеет индуктивный характер, т. е. $Z(\lambda) = O(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$, то формулы (2.17) меняют свой вид, но качественное поведение спектра при больших $|\lambda|$ остается прежним.

Из (2.17) следует, что рассматриваемая система не может иметь более конечного числа нарастающих мод. Возмущения с большими $|\lambda|$ затухают, причем затухание на одном периоде колебаний является слабым. Собственные частоты $\operatorname{Im}\lambda_m$ асимптотически кратны основной частоте, равной $\pi/\varphi_2(l)$, где $\varphi_2(l)$ — время прохождения медленной звуковой волны через канал.

В [14] рассматривались возмущения в дозвуковом течении без учета дальнодействия. При этом высокочастотная асимптотика спектра также определялась корнями квазиполинома. Для сверхзвуковой задачи с учетом дальнодействия асимптотика при больших $|\lambda|$ решений системы (2.5) с правой частью имеет вид

$$\mathbf{f}_i(x,\lambda) = \mathbf{g}_i(x,\lambda) + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{-(r+2)}\{\exp[-\lambda\varphi_i(l)]\mathbf{a}_i^{(r)}(x) + \mathbf{b}_i^{(r)}(x)\} \tag{2.18}$$

где $\mathbf{g}_i$ определяются ВКБ-разложениями (2.10), а коэффициенты $\mathbf{a}_i^{(r)}$ и $\mathbf{b}_i^{(r)}$ находятся на основе регулярной процедуры. Особенностью решений (2.18) является то, что при больших $|\lambda|$ они содержат не только резко меняющиеся в пространстве коротковолновые части $\mathbf{g}_i$, но и длинноволновые части, обусловленные дальнодействием. Роль длинноволновой части возмущения в образовании спектра сверхзвуковой задачи аналогична роли отраженной волны в дозвуковом случае, рассмотренном в [14].

При $|\beta_2|\varphi_2{}^2(l)/\pi^2 \gg 1$ формулы (2.17) предсказывают существование конечного числа нарастающих мод. Такой случай может осуществляться, если, например, число Маха на входе лишь незначительно превышает единицу. Тогда коэффициент усиления медленной волны $K_2 \approx (M_0-1)^2 \cdot (M_1-1)^{-2}$ может быть сделан произвольно большим (M_1 — число Маха на выходе). Граница устойчивости, отвечающая условию $\operatorname{Re}\lambda = 0$ при $M_0 - 1 = \delta \ll 1$ определяется критической плотностью тока j_c

$$j_c \approx j_\delta(1 - a j_\delta{}^2), \quad j_\delta = 2u_0\delta(\sigma_0 g/l)^{1/2} \ll a^{-1/2} \tag{2.19}$$

$$a = \gamma|\Sigma_p{}^0|\{[1 + {}^1/_2(1 - \operatorname{sign}\Sigma_p{}^0)]^2\pi^2(\gamma+1)u_0 j_*\}^{-1}(\sigma_0 g/l)^{-1/2}, \qquad j_* = \varepsilon \Big/ \int_0^l \sigma^{-1}dx$$

Здесь нулевым индексом снабжены параметры на входе, j_* — плотность тока короткого замыкания. При $j = j_c$ осуществляется колебательный переход к неустойчивости с частотой ω, где

$$\omega \approx [1 + {}^1/_2(1 - \operatorname{sign}\Sigma_p{}^0)]\pi(\gamma^2 - 1)u_0\delta/l$$

Колебательная неустойчивость может возникать при $\delta \ll 1$ в интервале $j_c < j < j_\delta$. Величина j_δ — плотность тока, при которой в выходном сечении происходит запирание потока ($M_1 = 1$). Данная неустойчивость не связана с наличием падающей ветви на ВАХ. Ее механизм аналогичен обнаруженному в численных расчетах [3] и, по-видимому, типичен для таких сверхзвуковых течений плазмы, в которых имеется достаточно большой коэффициент усиления возмущений на выходе и возможность передачи сигнала вверх по потоку через внешний электрический контур.

3. Медленные возмущения и неустойчивость вблизи бифуркации. Для стационарного состояния, расположенного на падающей ветви ВАХ, при $R = R_c$ спектральная задача (2.2)—(2.4) имеет собственное значение $\lambda = 0$, т. е. в точках линии бифуркации линеаризованная стационарная задача имеет нетривиальное решение. Это следует из теоремы, приведенной в [15] для весьма общих операторных уравнений.

Для нахождения малой величины $\lambda(\eta)$ при малых значениях $\eta = R_c - R$ ниже используется процедура, эквивалентная прямому расчету $D(\lambda)$ в линейном приближении по λ. Используя (2.2) и (2.4), можно выразить возмущения p' и g' через u'

$$p' = -g\left(u' + \lambda\int_0^x u^{-2}u'\,dx\right) + O(\lambda^2), \qquad g' = \lambda g\int_0^x u^{-2}u'\,dx + O(\lambda^2) \tag{3.1}$$

С помощью (3.1) и (2.4) можно также выразить T' через u'. Подставляя выражения всех газодинамических возмущений через u' в третье уравнение (2.2) и в соотношение (2.3), в линейном приближении по λ получим следующую спектральную задачу:

$$L[u'] = \lambda\Phi[u'], \qquad u'(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$L[u'] = g\frac{d}{dx}\left\{\left(c_p\frac{dT}{du} + u\right)u'\right\} + Q\Sigma_u\frac{u'}{u} - 2Qj\varepsilon^{-1}\int_0^l \Sigma_u(\sigma u)^{-1}u'\,dx,$$

$$\Phi[u'] = 2(\gamma-1)^{-1}\rho u u' + Q\left\{\left(\frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2} + \Sigma_u\frac{1+\gamma M^2}{1-\gamma M^2}\right)\int_0^x u^{-2}u'\,dx - \right.$$

$$\left. -\frac{2j}{\varepsilon}\int_0^l \frac{\Sigma_u(x)(1+\gamma M^2(x))}{\sigma(x)(1-\gamma M^2(x))}\int_0^x u^{-2}(\xi)u'(\xi)\,d\xi\,dx + \frac{2j^2}{\varepsilon^2}Z'(0)F\int_0^l \Sigma_u(\sigma u)^{-1}u'\,dx\right\}$$

Здесь $Z'(0)$ — производная импеданса по λ при $\lambda = 0$, а $\Sigma_u = d\ln\sigma/d\ln u$. В фиксированной точке ВАХ операторы L и Φ зависят от параметра η через величину $\varepsilon = jF(R_c - \eta) + V$. При $\eta \to 0$ решение (3.2) ищется в виде

$$u' = u_0' + \eta u_1' + O(\eta^2), \qquad \lambda = \mu\eta + O(\eta^2) \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.2) приводит к уравнениям

$$L_0[u_0'] = 0, \qquad L_0[u_1'] = \mu\Phi_0[u_0'] - L_\eta[u_0'], \qquad u_0'(0) = u_1'(0) = 0 \tag{3.4}$$

Здесь через L_0 и Φ_0 обозначены операторы L и Φ при $\eta = 0$, а через L_η — производная оператора L по η при $\eta = 0$

$$L_\eta[u'] = -2Qj^2F\varepsilon_c^{-2}\int_0^l \Sigma_u(\sigma u)^{-1}u'\,dx, \qquad \varepsilon_c = jFR_c + V \tag{3.5}$$

Из первого уравнения (3.4) следует, что $u_0'(x)$ — решение линеаризованной стационарной задачи при $\eta = 0$. Второе уравнение (3.4) имеет решение, если его правая часть ортогональна к решению $v_0'(x)$ сопряженной задачи: $L_0^*[v_0'] = 0$, $v_0'(l) = 0$, где L_0^* — оператор, сопряженный к L_0. Из этого условия определяется μ

$$\mu=\int\limits_0^l v_0'L_\eta[u_0']dx \Big/ \int\limits_0^l v_0'\Phi_0[u_0']dx \qquad (3.6)$$

В качестве u_0' с точностью до несущественного постоянного множителя можно взять производную от стационарного решения по параметру j

$$u_0'=(\partial u/\partial j)_x=-(\partial x/\partial j)_u/(\partial x/\partial u)_j=2j^{-1}x(\partial u/\partial x)_j \qquad (3.7)$$

(Отметим, что построение решений линеаризованных уравнений для возмущений в непроводящем газе при малых λ путем дифференцирования по параметрам стационарных распределений проводилось в [16].) Функция v_0', входящая в (3.6), с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$v_0'=1-\sigma(u)/\sigma(u_1) \qquad (3.8)$$

После подстановки (3.7), (3.8) в (3.6) и перехода во всех интегралах, содержащихся в (3.6), от интегрирования по x к интегрированию по u в линейном приближении по $\eta=R_c-R$ получим следующее выражение для инкремента λ:

$$\lambda=(R_c-R)\left\{2g^2(\gamma+1)^2(\gamma-1)^{-2}j^{-4}F^{-1}\int\limits_{u_1}^{u_0}\sigma(u)(u-u_*)W(u)du+Z'(0)\right\}^{-1} \qquad (3.9)$$

Входящая сюда функция $W(u)$ определяется формулой

$$W(u)=\int\limits_{u_1}\left[\left(1-\frac{\sigma(v)}{\sigma(u_1)}\right)\left(\frac{v}{u}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+\frac{u_*(u-v)(v-u_*)(\gamma+1)}{u(2\gamma v-(\gamma+1)u_*)\sigma(u_1)}\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)\right]dv$$

Можно показать, что для сверхзвукового течения при $u>u_1$ и убывающей зависимости $\sigma(u)$ функция $W(u)$ положительна.

Формула (3.9) имеет простую физическую интерпретацию. Если для возмущений $\sim\exp\lambda t$ ввести внутренний импеданс канала $Z_i(\lambda)$, задающий связь: $\delta V=Z_i(\lambda)\delta I$, то при постоянной э.д.с. должно выполняться условие $\delta V+Z(\lambda)\delta I=0$, где δV и δI — возмущения напряжения и интегрального тока. Поэтому при $\delta I\neq 0$ должно быть $Z(\lambda)+Z_i(\lambda)=0$. Отсюда в линейном приближении по λ с учетом соотношений: $Z(0)=R$ и $Z_i(0)=-R_c$ получим

$$\lambda=(R_c-R)\{Z_i'(0)+Z'(0)\}^{-1} \qquad (3.10)$$

Из сопоставления формул (3.9) и (3.10) видно, что интегральный член в (3.9) равен величине $Z_i'(0)$, для расчета которой потребовалось построение собственных функций при малых λ.

Если $Z'(0)>-Z_i'(0)$, то течение неустойчиво при $R<R_c$ и может быть стабилизировано относительно медленных возмущений при $R>R_c$. Так как $Z_i'(0)>0$, то стабилизация возможна, если, например, внешняя цепь состоит из балластной омической нагрузки $R>R_c$ и индуктивности, включенных последовательно. В отсутствие конвективного переноса энергии в разряде с немонотонной зависимостью $V(j)$ условие стабилизации $R>R_c$ на падающей ветви ВАХ обсуждалось в [10, 12, 17]. В случае $Z'(0)<-Z_i'(0)$ стабилизация возможна при $R<R_c$, а при $R>R_c$ будет возникать неустойчивость. Для ее возбуждения при сверхкритических сопротивлениях $R>R_c$ можно включить параллельно балластной нагрузке достаточно большую емкость $C>Z_i'(0)R^{-2}$.

Таким образом, в сверхзвуковых течениях плазмы, нагреваемой электрическим током, при определенных условиях могут возбуждаться нарастающие стоячие волны. Можно ожидать, что развитие апериодической неустойчивости на падающем участке ВАХ будет приводить к новому устойчивому стационарному состоянию, а развитие колебательной неустойчивости, описанной в п. 2 — к возникновению автоколебаний или более сложных нестационарных режимов.

Отметим, что анализ влияния внешней цепи на собственные возмущения может быть распространен на случай неоднородных сверхзвуковых течений в МГД-каналах. Аналитический расчет спектра для пространственно-однородного сверхзвукового течения в МГД-канале проведен в [18].

Автор признателен А. Г. Куликовскому, Г. А. Любимову, О. А. Синкевичу и Ф. А. Слободкиной за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руткевич И. М.* Влияние дальнодействия на возбуждение звука в проводящем газе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1, с. 135–143.
2. *Walker J. S.* Solitary fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetic fields.– Z. angew. Math. und Phys., 1978, v. 29, № 1, p. 35–53.
3. *Fishman F. J.* Instability of Hall MHD generators to magnetoacoustic waves.– AIAA Journal, 1970, v. 8, № 4, p. 632–639.
4. *Kennedy W. C., Hughes W. F.* The steady state performance, magnetoacoustical response and stability of flow in a Hall MHD generator.– Int. J. Eng. Sci., 1973, v. 11, № 11, p. 1143–1160.
5. *Виноградова Г. Н., Панченко В. П.* Влияние возмущений на устойчивость течения и характеристики фарадеевского МГД-генератора.– Теплофизика высоких температур, 1981, т. 19, № 2, с. 407–414.
6. *Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А.* Исследование одномерного течения газа в канале плазмотрона.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1, с. 183–186.
7. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965, 276 с.
8. *Руткевич И. М., Синкевич О. А.* О свойствах нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы.– Теплофизика высоких температур, 1980, т. 18, № 1, с. 27–39.
9. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
10. *Куликовский А. Г., Регирер С. А.* О влиянии стенок на перегревную неустойчивость в магнитогидродинамическом канале.– ПМТФ, 1965, № 5, с. 34–39.
11. *Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г.* Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М.: Наука, 1972. 414 с.
12. *Артемов В. И., Руткевич И. М., Синкевич О. А.* Исследование устойчивости нелинейных стационарных режимов джоулева нагрева низкотемпературной плазмы.– Теплофизика высоких температур, 1980, т. 18, № 6, с. 1126–1136.
13. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967, 548 с.
14. *Слободкина Ф. А.* Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 3, с. 406–415.
15. *Бергер М. С.* Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем.– В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 71–128.
16. *Слободкина Ф. А.* К устойчивости дозвуковых газодинамических течений.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1, с. 90–97.
17. *Хаит В. Д.* Устойчивость электрического разряда в плотной плазме.– Теплофизика высоких температур, 1980, т. 18, № 3, с. 489–496.
18. *Rutkevich I. M.* Appearance of free acoustic oscillations in supersonic flow of low-temperature plasma in a magnetic fields.– 15th Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases. Minsk, 1981. Contributed papers, Pt 1, p. 333–334.

Москва

Поступила в редакцию 25.V.1981