**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1982**

УДК 533.6.011.72

РАСПАД ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

ЕГОРУШКИН С. А.

Для определения состояния газа за косым скачком уплотнения по известным параметрам набегающего потока часто используют специальные кривые, называющиеся ударными полярами. Для совершенного газа эти кривые построены и подробно исследованы [1]. Однако при решении задач, связанных с течением газа с большими скоростями и при высоких температурах, необходимо использовать модели газов со сложными уравнениями состояния. Поэтому представляется интересным изучение свойств косых скачков в таких средах. В настоящей работе изучен вид ударных поляр для двупараметрических сред с произвольным уравнением состояния, удовлетворяющих условиям теоремы Цемплена. Установлены некоторые новые по сравнению с совершенным газом свойства косых скачков в таких средах. На основании полученных результатов рассмотрен вопрос о существовании тройных конфигураций в стационарных сверхзвуковых потоках, получающихся в результате распада плоских ударных волн. Показано, что неустойчивые по Дьякову разрывы распадаются на косой скачок уплотнения и центрированную волну разрежения, а спонтанно излучающие разрывы — на два скачка уплотнения или на скачок уплотнения и волну разрежения.

1. Пусть рассматриваемая двупараметрическая среда удовлетворяет условиям теоремы Цемплена, так что возможны только скачки уплотнения. В осях $(1/\rho,\ p)$ эта зависимость имеет вид, изображенный на фиг. 1. Точка A_1 соответствует состоянию газа до скачка, A_2 — точка с вертикальной касательной, A_3, A_4 — точки локальных экстремумов адиабаты.

Пусть p_1, ρ_1, V_1 — давление, плотность и скорость газа до, а p, ρ. V — после скачка. Через α_1 и α обозначим углы между ударной волной и вектором скорости газа до и после скачка соответственно. Угол поворота вектора скорости в косом скачке $|\varphi|=\alpha_1-\alpha$, причем $\varphi>0$, если поворот вектора V_1 происходит против часовой стрелки.

Граничные условия на рассматриваемом разрыве запишем в виде

$$V_1\cos\alpha_1=V\cos\alpha,\qquad \rho_1V_1\sin\alpha_1=\rho V\sin\alpha$$
$$p_1+\rho_1V_1^2\sin^2\alpha_1=p+\rho V^2\sin^2\alpha,\qquad 1/\rho=f(p) \tag{1.1}$$

Исключая из системы (1.1) величины ρ, V, α, α_1, для давления p и угла поворота скорости φ найдем

$$\varphi=\pm\operatorname{arc\,tg}[\Phi(p)]^{1/2}$$

$$\Phi(p)=j_1^2(p-p_1)\left[\frac{\pi_1-p}{j^2}-f(p)\right](\pi_1-p)^{-2}$$

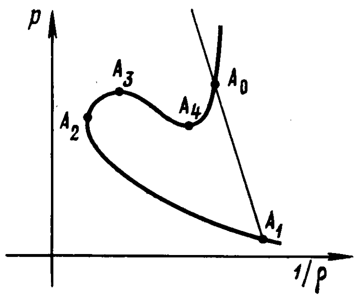
$$j_1=\rho_1V_1,\qquad \pi_1=p_1+\rho_1V_1^2$$

Полученная зависимость $p=p(\varphi)$ определяет в плоскости $(\varphi,\ p)$ кривую, называющуюся ударной полярой. В силу симметрии кривой $p=$ $=p(\varphi)$ достаточно рассмотреть какую-либо одну из ее ветвей.

Пусть прямому скачку из начального состояния p_1, ρ_1, V_1 соответствует некая т. A_0 адиабаты Гюгонио. Тогда ударным переходам из того же состояния в косых скачках соответствуют точки ударной адиабаты, лежащие между точками A_1 и A_0 (фиг. 1).

Предположим, что каждый луч, проведенный из т. A_1 в область $1/\rho<1/\rho_1$, пересекает ударную адиабату не более чем в одной точке, т. е. состояние газа за прямым скачком с заданной скоростью распространения определяется однозначно, и пусть кривая $1/\rho=f(p)$ имеет единственную точку перегиба, расположенную на участке A_4A_3 (именно такая адиабата представлена на фиг. 1).

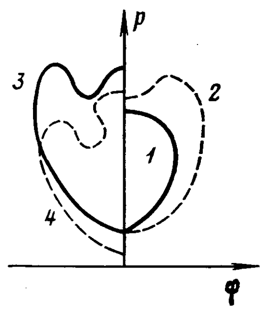
Можно показать, что кривая $p=p(\varphi)$ в зависимости от расположения т. A_0 на адиабате Гюгонио имеет вид, изображенный на фиг. 2. Отметим характерные особенности построенных кривых $p=p(\varphi)$. Все кривые имеют горизонтальную касательную на оси p в точке, соответствующей т. A_0 адиабаты Гюгонио. На кривой $p=p(\varphi)$ $|\varphi|<\pi/2$, т. е. существует предельный угол поворота скорости в косом скачке.



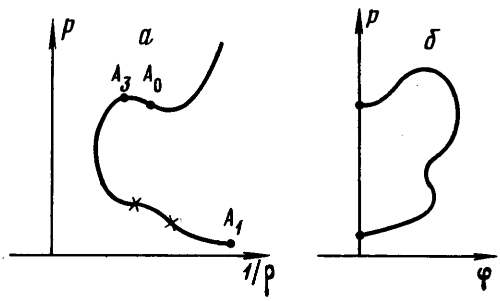
Фиг. 1

Точкам A_3 и A_4 соответствуют точки локального экстремума ударной поляры, так что максимальное давление может достигаться и не за прямым скачком (фиг. 2, кривая *2*).

На участке A_1A_3 ударная поляра имеет только одну точку поворота, на участке A_4A_3 точек поворота нет, а если т. A_0 лежит за т. A_4, то можно построить адиабату такую, что соответствующая ей поляра будет иметь любое наперед заданное четное число точек поворота на участке A_4A_0 (фиг. 2, кривые *3*, *4*). Иными словами, существуют адиабаты такие, что при некоторых значениях величины V_1, определяющей положение т. A_0 на адиабате, задача об определении параметров течения за косым скачком уплотнения имеет при некоторых φ по крайней мере четыре решения.



Фиг. 2



Фиг. 3

Наличие двух и более точек перегиба на адиабате Гюгонио (например, на участке A_1A_3 (фиг. 3, *а*)) может приводить к появлению дополнительных решений задачи о косом скачке. Всегда можно построить адиабату, удовлетворяющую условию единственности прямого скачка с заданной скоростью распространения и такую, что из-за наличия на участке A_1A_3 по крайней мере двух точек перегиба соответствующая ударная поляра имеет любое наперед заданное число точек поворота (фиг. 3, *б*), т. е. для некоторых φ — по крайней мере четыре решения задачи о косом скачке.

Предположим теперь, что состояние газа за прямым скачком с заданной скоростью распространения может определяться неоднозначно. Подобная неоднозначность связана с видом адиабаты Гюгонио на участках A_1A_2 и A_3A_4. Пусть луч, проведенный из т. A_1, пересекает адиабату в т. B, C, D (фиг. 4, *а*). (Полученные результаты легко обобщаются и на большее число точек пересечения.) Тогда ударным переходам в косых скачках соответствуют участки A_1B и CD адиабаты. В этом случае кривая $p=p(\varphi)$ распадается на две ветви (фиг. 5, *а*), причем ветвь CD имеет горизонтальные касательные в точках C, D. Скачки, соответствующие участку CD, не имеют структуры [2]. Таким образом, разрывам, не имеющим структуры, соответствует ветвь поляры с двумя горизонтальными касательными на оси $\varphi=0$. Участки ударных поляр, соответствующие разрывам, не имеющим структуры, на фиг. 5 заштрихованы. При движении т. D по адиабате вправо $B\to C$ и в т. E, такой, что $f'(p_E)=-1/j_1^2$, ветви поляры сливаются (фиг. 5, *б*). При дальнейшем движении т. D по адиабате вправо на поляре образуется точка поворота (фиг. 5, *в*). Разрывы, лежащие на адиабате между точками E и F (фиг. 4, *а*), не имеют структуры [2].

Рассмотрим точки (φ_E, p_E), (φ_F, p_F), лежащие на поляре. Из (1.2) легко следует, что $\varphi_E<\varphi_F$ (фиг. 5, *в*). Поэтому значениям $\varphi_E<\varphi<\varphi_F$ соответствуют три различных состояния газа за ударной волной, каждое из которых имеет структуру.

Если начальный участок адиабаты A_1B лежит выше луча A_1B (фиг. 4, *б*), то эволюция вида ударной поляры в зависимости от положения т. D на адиабате вполне аналогична предыдущему. Однако все скачки, соответствующие точкам адиабаты, лежащим ниже т. F, не имеют структуры. Положение т. F определяется тем, что луч A_1F касается адиабаты в т. A_1.

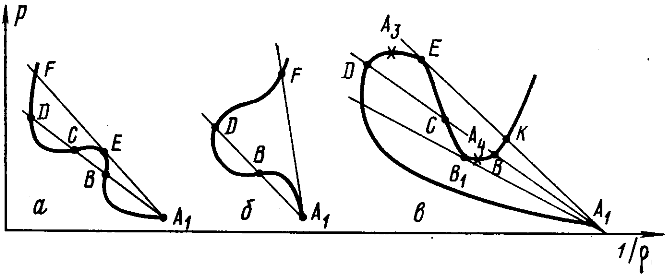
Рассмотрим теперь подобную неоднозначность на участке A_3. Пусть для определенности т. B лежит выше т. A_4, а т. D — ниже т. A_3 (фиг. 4, *в*). Тогда ударная поляра имеет вид, изображенный на фиг. 5, *г*. Ветвь BC имеет горизонтальные касательные в точках B и C и соответствует разрывам, не имеющим структуры. При движении т. B вниз по адиабате ветвь BC стягивается в точку в момент, когда луч A_1B начинает касаться адиабаты в некоторой т. B_1. При движении т. B вверх по адиабате $C\to D$ и в т. K ветви сливаются (фиг. 5, *д*). При дальнейшем движении т. B по адиабате вправо на поляре образуется точка поворота (фиг. 5, *е*). Скачки, соответствующие отрезку KE, не имеют структуры. Рассматривая точки (φ_K, p_K), (φ_E, p_E) ударной поляры, можно сказать, что в отличие от предыдущего структурой обладают не более двух состояний за ударной волной (фиг. 5, *е*).

Аналогично может быть рассмотрена ударная поляра в осях v_x, v_y. Здесь v_x, v_y — компоненты скорости потока за ударной волной в прямоугольной декартовой системе координат, ось OX которой направлена по набегающему потоку. Уравнение ударной поляры имеет вид

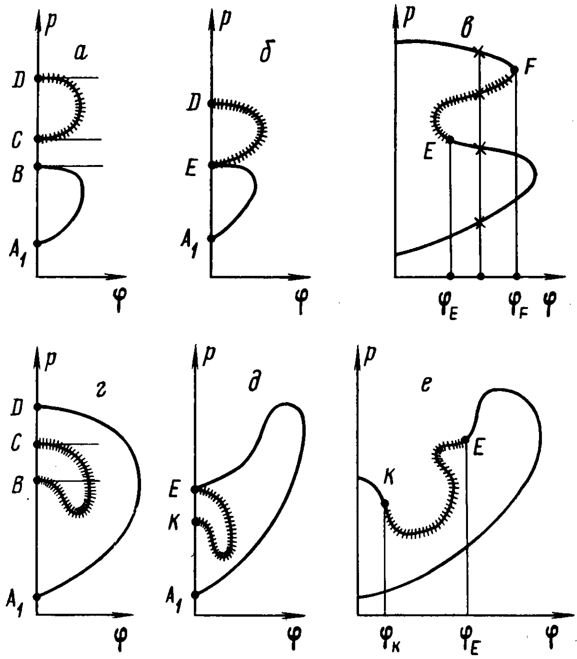
$$v_y^2=-v_x^2+V_1v_x+(\rho_1v_x-j_1)V_1f(\pi_1-j_1v_x)$$

Качественный вид ударных поляр в осях v_x, v_y для адиабаты Гюгонио, приведенной на фиг. 1, изображен на фиг. 6.

2. На основании полученных результатов изучим вопрос о возможности распада прямого скачка в двупараметрической идеальной среде с произвольным уравнением состояния, удовлетворяющей условиям теоремы Цемплена. Предположим, также, что точки ударной адиабаты соответствуют разрывам, обладающим структурой. Пусть YY' — рассматриваемый прямой скачок, p_1, ρ_1, V_{1n} — давление, плотность, скорость газа до, а p_2, ρ_2, V_{2n} — за скачком. Под распадом разрыва YY' будем понимать появление на нем тройной конфигурации $AOYB$ (фиг. 7) с уходящими



Фиг. 4



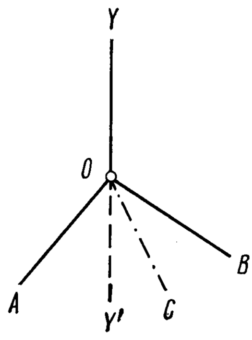
Фиг. 5

возмущениями OA и OB. Предположим, что возмущение OA является скачком уплотнения. Далее будет показано, что тройная конфигурация с волной разрежения OA не существует.

Пусть скорость центра тройной конфигурации — т. O — равна величине λ, которую без нарушения общности можно считать положительной, т. е. направленной от Y' к Y. Перейдем в подвижную систему координат, связанную с т. O. Тогда множество состояний, в которые можно попасть путем ударных переходов из состояния (p_1, ρ_1, V_1), описывается ударной полярой Φ_1, задаваемой параметрами $\pi_1=p_1+\rho_1V_1^2$ и $j_1=\rho_1V_1$; $V_1^2=V_{1n}^2+$ $+\lambda^2$. Состоянию газа (p_2, ρ_2, V_2) за скачком OY ($V_2^2=V_{2n}^2+\lambda^2$) соответствует точка левой ветви поляры Φ_1 с ординатой p_2, так как в скачке OY вектор скорости поворачивается на угол $\varphi_2<0$.

Пусть возмущение OB является скачком уплотнения. Ударные переходы из состояния (p_2, ρ_2, V_2) описываются полярой Φ_2 с начальной т. (φ_2, p_2) и определяющими параметрами $\pi_2=p_2+\rho_2V_2^2$, $j_2=\rho_2V_2$. Условием существования тройной конфигурации $OAYB$ является условие существования контактного разрыва OC, т. е. равенство на нем давлений,

Фиг. 6



Фиг. 7

и параллельность скоростей. Но выполнение этих требований эквивалентно существованию т. M — точки пересечения поляр Φ_1 и Φ_2. Если разрыв OB уходящий, т. е. проекция вектора $\mathbf{V}_2$ на поверхность разрыва направлена от т. O, то вектор скорости $\mathbf{V}_2$ поворачивается в скачке OB на положительный угол. Поэтому уходящим разрывам соответствует правая ветвь поляры Φ_2, а приходящим — левая. Аналогично показывается, что для того, чтобы разрыв OA был уходящим, т. M должна принадлежать левой ветви поляры Φ_1.

Предположим сначала, что поляра Φ_1 имеет одну точку поворота. Тогда достаточным условием существования тройной конфигурации с уходящим скачком OB является существование величины $\lambda_1>0$, удовлетворяющей неравенствам

$$\lambda_1^2(1+\delta)+\sigma(\delta-1)<0 \tag{2.1}$$

$$\lambda_1^2(1+\delta)+\sigma(\delta-1)\geqslant-2M\lambda_1\sqrt{\lambda_1^2+1-M^{-2}} \tag{2.2}$$

$$\delta=-j_1^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_H, \quad \sigma=\frac{V_{1n}}{V_{2n}}, \quad \lambda_1=\frac{\lambda}{V_{2n}}, \quad M=\frac{V_{2n}}{a_2}$$

Неравенство (2.2) означает, что в окрестности т. (φ_2, p_2) правая ветвь поляры Φ_2 направлена внутрь области, ограниченной полярой Φ_1, и поэтому тройная конфигурация существует. Неравенство (2.1) и требование о единственности точки поворота гарантирует пересечение поляры Φ_1 с правой ветвью поляры Φ_2, т. е. то, что разрыв OB будет уходящим.

Если при некотором $\lambda_1=\lambda_0$ в (2.2) имеет место равенство, то поляры Φ_2 и Φ_1 касаются в т. (φ_2, p_2), что соответствует бесконечно слабому уходящему разрыву OB. Величина λ_0 существует лишь при [3—4]

$$-(1+2M)<\delta<a_0, \quad a_0=\frac{M^2\sigma+M^2-1}{M^2\sigma+1-M^2} \tag{2.3}$$

Разрывы, удовлетворяющие условию (2.3), были названы Дьяковым спонтанно излучающими [3], т. е. способными излучать слабые возмущения — разрыв OB — без внешнего воздействия.

Используя результаты [3—4], нетрудно показать, что решение системы неравенств (2.1), (2.2) существует только при условии (2.3). Но тогда из непрерывности функций, входящих в (2.1), (2.2), следует, что при λ_1, близких к λ_0, решения рассматриваемых неравенств будут соответствовать пересечению правой ветви Φ_2 с левой ветвью Φ_1, т. е. что разрывы OA и OB будут уходящими. Таким образом, спонтанно излучающий по Дьякову разрыв способен излучать и сильные возмущения, распадаясь при этом на два скачка OA, OB и контактный разрыв OC.

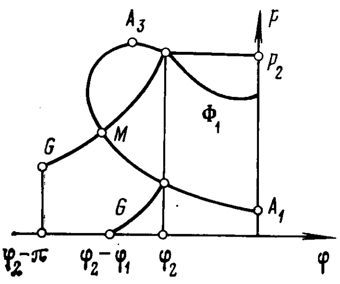
Совершенно аналогично может быть рассмотрена тройная конфигурация, в которой уходящее возмущение OB является волной Прандтля — Майера. Уравнение волны Прандтля — Майера $G(\varphi, p)=0$ в плоскости (φ, p) может быть записано в виде [5]

$$\pm(\varphi-\varphi_0)=-\int_{p_0}^{p}(\rho a V)^{-1}\sqrt{V^2-a^2}\,dp \qquad (2.4)$$

Здесь a — скорость звука, ρ — плотность, V — скорость, p — давление в газе. Точка (φ_0, p_0) соответствует начальному состоянию, из которого происходит разрежение. Зависимость a, ρ, V от p определяется по изэнтропическим формулам.

В (2.4) $|\varphi-\varphi_0|<\varphi_M$, причем если существует φ_1 такое, что $|\varphi_1-\varphi_0|<\pi$, а $p(\varphi_1)=0$, то $\varphi_M=\varphi_1$, иначе, $\varphi_M=\pi$. В плоскости (φ, p) кривая (2.4) имеет качественный вид, изображенный на фиг. 8, причем левая ветвь соответствует уходящим волнам.

Для существования тройной конфигурации $AOYB$ со скачком уплотнения OA необходимо и достаточно, чтобы левая ветвь кривой G с начальной точкой (φ_2, p_2), соответствующей состоянию газа за скачком OY, пересекала поляру Φ_1 в некоторой т. M; так как т. M может принадлежать только левой ветви Φ_1, то скачок OA обязательно будет уходящим (фиг. 8).



Фиг. 8

Анализ взаимного расположения кривых Φ_1 и G в зависимости от положения начальной т. (φ_2, p_2) на поляре Φ_1 показывает, что если т. (φ_2, p_2) принадлежит участку поляры Φ_1 такому, что $\varphi_p'>0$, то т. M существует, если выполнено неравенство

$$\lambda_1^2(1+\delta)+\sigma(\delta-1)\leqslant$$
$$\leqslant-2M\lambda_1\sqrt{\lambda_1^2+1-M^{-2}} \qquad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что положительные λ_1, удовлетворяющие системе неравенств $\varphi_p'>0$, (2.5) существуют при $\delta<-1-2M$ или $-1-2M<\delta<a_0$, что соответствует неустойчивым и спонтанноизлучающим разрывам соответственно.

Таким образом, при распаде спонтанноизлучающего разрыва уходящее возмущение OB может быть и волной разрежения.

Если т. (φ_2, p_2) принадлежит участку поляры Φ_1 такому, что $\varphi_p'<0$, и рассматриваемый разрыв является неустойчивым, то $\delta>1$. Но тогда т. (φ_2, p_2) лежит между точками локальных экстремумов поляры Φ_1, так как разрывам с параметром $\delta>1$ соответствуют точки участка A_3A_4 адиабаты Гюгонио. Но в этом случае кривая G входит внутрь области, ограниченной полярой Φ_1 (фиг. 8), и, как нетрудно показать, кривые Φ_1 и G пересекаются. Поэтому неустойчивые разрывы с параметром $\delta>1$ также распадаются.

Доказано, что все неустойчивые разрывы распадаются на скачок уплотнения и волну разрежения, образуя тройную конфигурацию. Этот результат является довольно естественным, так как неустойчивая по Дьякову ударная волна оказывается неэволюционной, а неэволюционные разрывы, как правило, распадаются. Распад спонтанно излучающих разрывов говорит, по-видимому, в пользу предположения Дьякова о неустойчивости таких разрывов в нелинейном приближении.

Нетрудно видеть, что тройные конфигурации, в которых возмущение OA являлось бы волной разрежения, не существуют. Действительно, если кривые G_1 и G_2, соответствующие начальным состояниям $(0, p_1)$ до разрыва и (φ_2, p_2) за разрывом OY, пересекаются в т. (φ_3, p_3), то из (2.4) следует

$$\varphi_2=g(p_2)-g(p_1), \qquad g(p)=\int (\rho aV)^{-1}\sqrt{V^2-a^2}\,dp \tag{2.6}$$

Так как $p_2>p_1$, $g_p'>0$, то должно иметь место неравенство $\varphi_2>0$. Но точка пересечения кривых G_1 и G_2 лежит в полуплоскости $\varphi<0$. Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
2. *Галин Г. Я.* К теории ударных волн.– Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 1, с. 55–58.
3. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн.– ЖЭТФ, 1954, т. 27, № 3, с. 288–295.
4. *Иорданский С. В.* Об устойчивости плоской стационарной ударной волны.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 465–472.
5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.

Москва

Поступила в редакцию 19.V.1981