

УДК 532.72

**СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ
ПРИ ДВИЖЕНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СОРБИРУЕМОЙ
СМЕСИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ**

ФИЛИППОВ-ЦАБЕК Л. К.

В работе содержится подтвержденный рассчитанными на ЭВМ численными примерами анализ одномерной нестационарной системы уравнений, описывающей распределение концентраций сорбируемых газов или жидкостей в пористом сорбенте и движущемся сквозь него потоке. Детально исследованы решения в виде распространяющихся волн. Проведена классификация волновых режимов для модельных изотерм сорбции. Введено представление о квазибегающих и квазирасплывающих волнах.

Движение многокомпонентной сорбируемой смеси через состоящую из пористых зерен пористую среду при малых концентрациях сорбируемых веществ в инертном потоке для изотермического и неизотермического случаев рассмотрено в работах [1-8]. Для малых концентраций компонентов сорбируемой смеси пористая недеформируемая среда предварительно насыщается инертным (несорбируемым) газом или жидкостью и линейная скорость фильтрации u постоянна. Для больших концентраций сорбируемой смеси линейная скорость фильтрации u — переменная и зависит от концентрации компонентов смеси [4]. При бесконечно больших значениях коэффициентов теплообмена квазилинейная система уравнений движения превращается в гиперболическую в узком смысле систему уравнений, у которой собственные значения положительные и различные. В работах [1-4] проанализированы решения квазилинейной системы уравнений движения многокомпонентной сорбируемой смеси, которые при бесконечно больших значениях коэффициентов теплообмена превращаются в гиперболическую в узком смысле систему уравнений. Такая система уравнений движения, как показано в [1-4], может допускать существование стационарных режимов типа бегающих или расплывающихся волн. Для кратных или комплексных собственных значений в пористой среде могут реализоваться нестационарные режимы, которые не рассматривались в литературе, однако представляют теоретический и прикладной интерес при анализе процессов разделения веществ, ионов и других процессов.

1. В изотермическом случае квазилинейную систему уравнений движения сорбируемой смеси через пористую недеформируемую среду при малых концентрациях сорбируемых веществ в инертном потоке запишем в виде [1-3]

$$\partial c_i / \partial t + u \partial c_i / \partial x + \delta \partial q_i / \partial t = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad u = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\partial q_i / \partial t = \beta_i (c_i - \varphi_i(q)), \quad \varphi_i = f_i^{-1}, \quad \delta = (1-m)/m \quad (1.2)$$

$$c_i(0, t) = c_i^*, \quad c_i(x, 0) = c_i^0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.3)$$

Здесь c_i — концентрация i -го компонента сорбируемой смеси в потоке, q_i — концентрация поглощенного твердой фазой пористого зерна вещества i -го компонента смеси, u — линейная скорость фильтрации сорбируемой смеси, β_i — коэффициент, учитывающий скорость массообмена внутри пористого зерна, m — пористость, $f_i(c)$ — уравнение изотермы сорбции, n — число компонентов сорбируемой смеси.

При бесконечно больших значениях коэффициентов массообмена ($1/\beta_i = 0$) квазилинейная система уравнений (1.1) — (1.2) превращается в

в гиперболическую систему, которую запишем в матричном виде

$$\begin{aligned} A_{ik} \partial c_k / \partial t + u \partial c_i / \partial x &= 0, \quad 1 \leq i, \quad k \leq n \\ A_{ik} &= E_{ik} + \delta A_{ik}^{\circ}, \quad e_{ii} = 1, \quad e_{ik} = 0 \\ a_{ii}^{\circ} &= f_{ii} = \partial f_i / \partial c_i, \quad a_{ik}^{\circ} = f_{ik} = \partial f_i / \partial c_k \\ B_{ik} &= u A_{ik}^{-1}, \quad B_{ik}^{\circ} = (A^{\circ})_{ik}^{-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Собственные значения λ_i матрицы A_{ik}° и собственные значения μ_m ($1 \leq m \leq n$) матрицы B_{ik} связаны соотношениями

$$\mu_i = u(1 + \delta \lambda_{(n-i+1)})^{-1}$$

Гиперболическая система (1.4) в узком смысле допускает существование инвариантных решений типа бегущих волн (w_p — скорость волны)

$$y = x - w_p t$$

и автомодельных решений типа расплывающихся волн

$$\xi = x/t$$

если собственные значения положительные и различные

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \quad (1.5)$$

Из физических соображений [8] изотермы сорбции удовлетворяют условиям

$$f_{ii} > 0, \quad f_{ik} < 0, \quad f_{ii} \geq \sum_{k=1}^n |f_{ik}|, \quad k \neq i \quad (1.6)$$

Из условий (1.6), согласно теореме Адамара [9], находим, что детерминант матрицы A_{ik}° отличен от нуля и матрица A_{ik}° положительно определена, т. е. ее собственные значения λ_i имеют положительные вещественные части. Случай равенства в условии (1.6) соответствует равенству локальной скорости движения сорбируемых веществ μ_n и линейной скорости фильтрации u , так как $\lambda_1 = 0$. При выполнении условий (1.6) имеем

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

и условия (1.5) выполняются всегда.

С общетеоретической точки зрения классификацию режимов, которые допускаются квазилинейными уравнениями (1.1) — (1.3), рационально проводить с точки зрения характера собственных значений μ_m (положительные и различные, кратные, комплексные). Проанализируем решения системы (1.1) — (1.3) на примере модельных уравнений изотерм сорбции

$$f_i(c) = \begin{cases} 0, & c_m < 0, \quad 1 \leq i, \quad m \leq n \\ K_{ij} c_j, & c_m \geq 0, \quad K_{ii} > 0, \quad K_{ij} < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

которые в первом приближении описывают слабосорбируемые смеси [8].

Для двухкомпонентных смесей собственные значения λ_i всегда положительные, а при $n \geq 3$ — могут быть положительными, кратными или комплексными. Рассмотрим случай кратных собственных значений, т. е.

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p = \lambda_{(p+1)} < \lambda_{(p+2)} < \dots < \lambda_n$$

Уравнения изотерм (1.7) нелинейные, а при $c_m \geq 0$ — линейные, поэтому решение системы (1.1) — (1.3) при $c_m \geq 0$ можно найти с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени. Для изображений запишем систему (1.1) — (1.3) следующим образом:

$$u dc_m(x, p) / dx + p A_{mk}(p) c_k(x, p) = F_m^\circ(p) = c_m^\circ + \delta f_m^\circ \beta_m (p + \beta_m)^{-1} \quad (1.8)$$

$$A_{mk}(p) = E_{mk} + \delta \beta_m (p + \beta_m)^{-1} K_{mk}$$

После преобразований оригинал изображения (1.8) получим в виде

$$c_m(x, t) = \sum_{k=1}^n D_{mk} G_k(x, t) + D_{mp}^* G_p^*(x, t) + D_m^\circ, \quad 0 \leq t \leq t^* \quad (1.9)$$

$$G_k(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{t - b_k x}{2\sqrt{a_k x}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{b_k \sqrt{x}}{2\sqrt{a_k}} \right) \right]$$

$$G_p^*(x, t) = [x(4\pi a_p)^{-1}]^{1/2} \exp [-(t - x b_p)^2 (4a_p)^{-1}]$$

$$b_k = (1 + \delta \lambda_k) / u_2 \quad a_k = \delta \lambda_k (u \beta_0)^{-1}, \quad \beta_0 = \beta_k$$

Уравнения для определения коэффициентов D_{mk} , D_{mp}^* , D_m° можно найти, подставив решения (1.9) для изображений в уравнения (1.8) и условия (1.3). При $t = t^*$ наименьшее значение одной из компонент смеси обращается в нуль, т. е. $\min c_m(x, t^*) = 0$. Для $t > t^*$ необходимо искать нестационарное решение системы (1.1) — (1.3) с учетом нелинейности изотерм (1.7). В большинстве случаев t^* велико и можно ограничиться рассмотрением решения (1.9).

Из решения (1.9) видно, что для квазиволны p ,двигающейся со скоростью $w_p = 1/b_p = u(1 + \delta \lambda_p)^{-1}$ «амплитуда» волны s_m увеличивается при $D_{mp}^* > 0$ (уменьшается при $D_{mp}^* < 0$) по закону

$$s_m^* = A_m + Q_{mp} \sqrt{x}, \quad x = w_p t, \quad Q_{mp} = D_{mp}^* \left(\frac{u \beta_0}{4\pi \lambda_p} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что с увеличением коэффициента массообмена β_0 «амплитуда» увеличивается или уменьшается пропорционально $\sqrt{\beta_0}$. Численное интегрирование наиболее просто реализуется для систем модельных уравнений движения смеси в виде (1.2) и уравнений

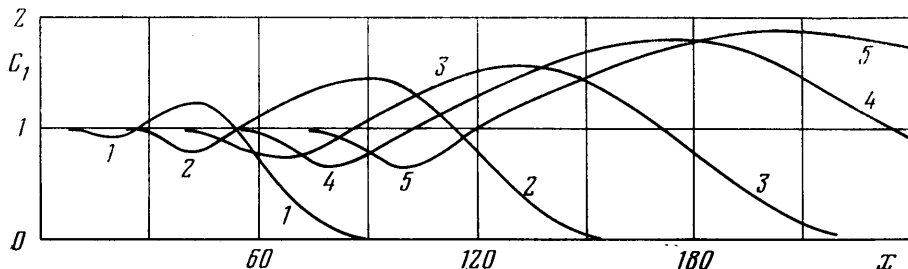
$$u dc_i / dx + \delta \partial q_i / \partial x = 0 \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.1), (1.11) полностью отражает все особенности системы (1.1) — (1.2) и все возможные режимы. В качестве примера на ЭВМ численно проинтегрирована система (1.2), (1.11) для изотерм (1.7), соотношений (1.6) и значений параметров $c_1^* = c_2^* = 1$, $c_3^* = 4$, $\beta_i = 1$, $c_i^\circ = 0$ ($1 \leq i \leq 3$), $n = 3$, $u = \delta = 1$, $\mu_{1,2,3} = 1,517$, $\mu_{2,3} = 0,617$, $b_{11}^\circ = 1,5$, $b_{12}^\circ = 0,1$, $b_{13}^\circ = -b_{21}^\circ = 0$, $b_{22}^\circ = 0,75$, $b_{23}^\circ = 1,814$, $b_{31}^\circ = 0,075$, $b_{32}^\circ = 0$, $b_{33}^\circ = 0,5$.

Результаты интегрирования в виде кривых распределения концентраций трехкомпонентной сорбируемой смеси вдоль пористой среды представлены на фиг. 1 ($1-t=40$, $2-t=80$, $3-t=120$, $4-t=160$, $5-t=200$). Нестационарность режима для квазيبегущей со скоростью $w_1 \approx \mu_2$ волны видна из распределения концентраций первого компонента, минимальное значение концентраций s_1 для которого уменьшается во времени согласно (1.10). Для бегущей со скоростью w_2 волны реализуется обычный режим.

Для различных положительных собственных значений λ_i система (1.1) — (1.3) допускает существование инвариантных решений ($y = x - w_p t$,

$\xi = x/t$), которые в некотором смысле стационарные, так как равновесные значения концентраций во фронте бегущей и расплывающейся волн не изменяются во времени. Режим бегущих волн ($y = x - wt$) реализуется для нелинейных изотерм при выполнении условий выпуклости [1-4], т. е. необходимых условий (различные собственные значения λ_m) и условий однозначности адиабат Гюгонио [5], которые соединяют равновесные значения концентраций компонент во фронте двух соседних бегущих волн (условия (2.20), (2.27), (2.29) в работе [4]). Для бегущей со скоростью



Фиг. 1

w_p . волны равновесные значения концентраций связаны условиями типа Гюгонио, которые для системы (1.1) - (1.3) имеют вид

$$w_p = u [c_i] / [c_i + \delta f_i(c)], \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.12}$$

$$[c_i] = c_i^{(p+1)}(y \rightarrow \infty) - c_i^{(p)}(y \rightarrow -\infty), \quad y = x - w_p t$$

Каждое инвариантное решение типа бегущих волн находится с точностью до аддитивной константы $y_0^{(p)}$, которую можно найти из интегральной формы уравнения материального баланса. Проинтегрируем уравнение материального баланса (1.1) по x ($0 \leq x \leq x_1$) и по t ($0 \leq t \leq t_1$). С учетом начальных и граничных условий (1.3) запишем

$$(c_i^* - c_i^0) u t_1 + (c_i^0 + \delta f_i^0) x_1 = \int_0^{x_1} [c_i(x, t_1) + \delta q_i(x, t_1)] dx \tag{1.13}$$

При $x_1, t_1 \rightarrow \infty$ решения $c_i(x, t_1), q_i(x, t_1)$ стремятся к инвариантным решениям $c_i(y), q_i(y)$. С учетом этого, проинтегрировав (1.13) по частям, получим

$$\int_0^{x_1} [c_i(x, t_1) + \delta q_i(x, t_1)] dx = - (a_p + \delta) \int_{q_i^0}^{q_i^*} y dq + y_2 [c_i(y_2) + \delta q_i(y_2)] - y_1 [c_i(y_1) + \delta q_i(y_1)] \tag{1.14}$$

$$y_2 = y_1 + x_1, \quad y_1 = -w_p t_1 - y_0^{(p)}$$

так как согласно (1.12)

$$c_i - c_i^0 = a_p (q_i - q_i^0), \quad a_p = \delta w_p (u - w_p)^{-1} \tag{1.15}$$

Максимальная скорость распространения возмущения равна u , поэтому $x_1 = u t_1$.

Уравнение (1.2) для режима бегущих волн с учетом (1.15) запишем

$$-w_p dq_i / dy = \beta_0 [a_p (q_i - q_i^0) - \phi_i(q) + \phi_i(q^0)] \tag{1.16}$$

В окрестности точки q° разложим правую часть (1.16) в ряд Тейлора

$$-w_p dq_i/dy = \beta_0 [a_p E_{ik} - B_{ik}^\circ] (q_k - q_k^\circ), \quad B_{ik}^\circ = \partial \Phi_i / \partial q_k \quad (1.17)$$

Отсюда находим

$$q_i = q_i^\circ + \sum_{p=1}^n D_{ip}^\circ \exp \left[\frac{\beta_0}{w_p} (\mu_p^\circ - a_p) y \right] \quad (1.18)$$

Здесь $\mu_p^\circ(q^\circ)$ — собственные значения матрицы $B_{ik}^\circ(q^\circ)$. Аналогично предыдущему в окрестности точки q^* решение равно

$$q_i = q_i^* + \sum_{p=1}^n D_{ip}^* \exp \left[\frac{\beta_0}{w_p} (\mu_p^* - a_p) y \right] \quad (1.19)$$

Из условий ограниченности решений (1.18), (1.19) запишем

$$\mu_p^\circ < a_p < \mu_p^*, \quad 1 \leq p \leq n \quad (1.20)$$

Если правая часть (1.17) обращается в нуль, а левая часть неравенства (1.20) в равенство, то в окрестности точки q° имеем

$$q_i - q_i^\circ = \Phi_i^\circ(q^\circ) (q_i - q_i^\circ), \quad \Phi_i^\circ = r_i^{(p)} / r_1^{(p)}. \quad (1.21)$$

Здесь $r_i^{(p)}$ — правый собственный вектор матрицы B_{ik}° для собственного значения $\mu_p^\circ = a_p$.

С учетом предыдущего разложим правую часть уравнения (1.16) в окрестности точки q° в ряд Тейлора до членов $(q_i - q_i^\circ)^s$ ($s \geq 2$) и с учетом (1.21) и при выполнении равенств

$$G_i^{(2)}(q^\circ) = G_i^{(3)}(q^\circ) = \dots = G_i^{(s-1)}(q^\circ) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.22)$$

$$G_k^{(s)}(q) = \sum_{m_j=1}^n \left(\prod_{j=1}^s \Phi_{m_j}(q) \right) \partial \Phi_k^{(s)}(q) / \left(\prod_{j=1}^s \partial q_{m_j} \right)$$

запишем

$$dq_i/dy = -(\beta_0/w_p) G_i^{(s)}(q^\circ) (q_i - q_i^\circ)^s \quad (1.23)$$

Решение уравнений (1.24), (1.23) в окрестности точки q° равно

$$q_i = q_i^\circ + [(s-1) G_i^{(s)}(q^\circ) y]^{1/(1-s)}, \quad y \rightarrow \infty \quad (1.24)$$

Аналогично предыдущему, если в окрестности точки q^*

$$a_p = \mu_p^*, \quad G_i^{(2)}(q^*) = G_i^{(3)}(q^*) = \dots = G_i^{(p-1)}(q^*) = 0$$

то решение уравнения (1.16) равно

$$q_i = q_i^* + [(p-1) G_i^{(p)}(q^*) y]^{1/(1-p)}, \quad y \rightarrow -\infty \quad (1.25)$$

Из условий ограниченности и однозначности решений (1.24), (1.25) получим

$$G_i^{(s)}(q^\circ) (q_i - q_i^\circ)^{(s+1)} > 0, \quad G_i^{(p)}(q^*) (q_i - q_i^*)^{(p+1)} < 0 \quad (1.26)$$

Из уравнения материального баланса (1.13) с учетом (1.14), (1.15), (1.24), (1.25) найдем

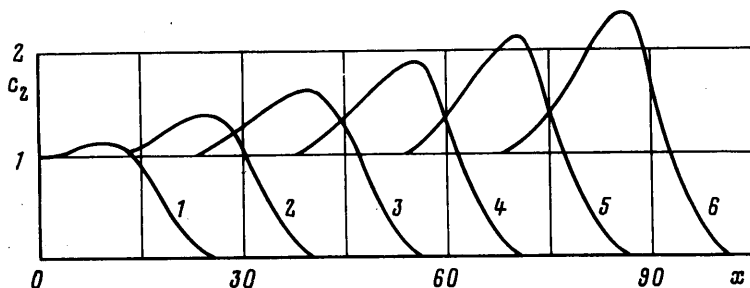
$$y_0^{(p)}(t_1) = - (q_i^* - q_i^\circ)^{-1} \left[\int_{q_i^\circ}^{q_i^*} y dq_i + R_i^\circ(q^\circ) t_1^m + R_i^\circ(q^*) t_1^g \right] \quad (1.27)$$

$$R_i^\circ(q^\circ) = \Phi_i^\circ(q^\circ) [(s-1)G_i^{(s)}(q^\circ)]^{(1/(1-s))} (u-w_p)^m, \quad s \geq 2$$

$$R_i^\circ(q^\circ) = \Phi_i^\circ(q^\circ) [(1-p)G_i^{(p)}(q^\circ)]^{(1/(1-p))} (w_p)^g, \quad p \geq 2$$

$$m = (2-s)/(1-s), \quad g = (2-p)/(1-p)$$

В уравнении (1.27) при $s=1$ (или $p=1$) второе (или третье) слагаемое в квадратных скобках равно нулю. Если $s=p=2$, то величина $y_0^{(p)}$ постоянная. При $s, p > 2$ величина $y_0^{(p)}$ зависит от t_i , как от параметра. Зная величину $y_0^{(p)}$ для бегущей со скоростью w_p волны из уравнений (1.1) – (1.3) можно найти инвариантные решения $c_i(y), q_i(y)$ ($1 \leq i \leq n$). Если собственные значения кратные ($\lambda_p = \lambda_{(p+1)}$), то для нелинейных изотерм реализуется



Фиг. 2

ся нестационарный режим квазибегущих волн с переменной «амплитудой». В качестве примера для изотерм

$$f_i(c) = \frac{a_i c_i}{V_i}, \quad V_i = 1 + \sum_{k=1}^n p_{ik} c_k, \quad a_i, p_{ik} = \text{const} \quad (1.28)$$

являющихся в некотором смысле обобщением изотерм Ленгмюра [8], была численно проинтегрирована для трехкомпонентной смеси система уравнений (1.2), (1.3), (1.11) при следующих значениях параметров: $u = \delta = 1, \beta_i = 1, c_i^* = 1, c_i^\circ = 0$ ($1 \leq i \leq n$), $n=3, a_1=1, a_2=3, a_3=5, p_{11}=0,1844, p_{12}=0,616, p_{13}=p_{21}=0, p_{22}=0,464, p_{23}=p_{31}=2, p_{32}=0, p_{33}=0,162$. Результаты интегрирования в виде кривых распределения концентраций трехкомпонентной смеси вдоль пористой среды представлены на фиг. 2 ($1-t=20, 2-t=40, 3-t=60, 4-t=80, 5-t=100, 6-t=120$). Для параметров, приведенных выше, при $c_i=1$ собственные значения равны $\mu_1^\circ=3,154, \mu_{2,3}^\circ=0,8216$. Режим бегущих волн реализуется для первого собственного значения μ_1° . Согласно (1.12) скорость бегущей волны для первого компонента смеси и собственного значения μ_1° равна $w_1=1,31$. Для кратного собственного значения условия реализации квазибегущих волн имеют вид

$$\mu_p(c_i=c_i^{(p)}) \geq w_p > \mu_p(c_i=s_i^*), \quad \mu_p(c_i=c_i^{(p)}) > \mu_p(c_i) > \mu_p(s_i^*) \quad (1.29)$$

или для квазирасплывающихся волн

$$\mu_p(c_i=c_i^{(p+1)}) < \mu_p(c_i) < \mu_p(c_i=s_i^*) \quad (1.30)$$

Здесь s_i^* — экстремальные значения (максимальные или минимальные) концентраций во фронте квазибегущих или квазирасплывающихся волн.

Для параметров, рассмотренных выше, условия (1.29) выполняются и для собственных значений $\mu_{2,3}$ реализуется нестационарный режим квази-

бегущей волны со скоростью распространения $w_2 \sim \mu_2^\circ$. Оценки скорости изменения «амплитуды» квазиволн \dot{s}_i во времени могут быть получены из интегральной формы уравнения материального баланса (1.13) итерационным способом. Условия Гюгонио (1.12) для кратных собственных значений не выполняются. Однако в первом приближении для квазиволн запишем соотношение

$$dc_i/dq_i \sim \mu_p^\circ$$

которое позволяет оценить скорость изменения экстремальных значений концентраций компонентов смеси. Из уравнений (1.2) с учетом предыдущего для фиксированного момента времени t_0 режима квазибегущей волны запишем

$$udc_i(t_0)/dx \approx -\delta\beta_i[\mu_2^\circ - \mu_2(s_{1/2}^{(j)})] \cdot (s_i^{(j)})_{1/2} \quad (1.31)$$

$$(s_i^{(j)})_{1/2} = (s_i^{(j)} + c_i^{(p)})/2, \quad 1 \leq i \leq n$$

Здесь j — номер итерационного приближения.

Для квазирасплывающихся волн из (2.17) в работе [2] запишем

$$dc_k(t_0)/dx \approx t_0^{-1} b(s_{1/2}^{(j)}) r_k^{(p)}(s_{1/2}^{(j)}) = G_k(s_{1/2}^{(j)}) \quad (1.32)$$

Заменяя профиль квазибегущих и квазирасплывающихся волн приближенно треугольным с учетом (1.31), (1.32), из (1.13) в силу слабой зависимости $\mu_2(\dot{s}_{1/2}^{(j)})$, $r_k^{(p)}(\dot{s}_{1/2}^{(j)})$ от времени найдем зависимость «амплитуды» квазиволн от времени

$$\dot{s}_i \approx A_i + t_0 Q_i \quad (1.33)$$

Величины Q_i для квазибегущих волн значительно больше величин Q_i для квазирасплывающихся волн. Значения величин \dot{s}_i^* определяются итерационным способом. Окончание итераций при выполнении неравенств

$$|\dot{s}_i^{(j+1)} - \dot{s}_i^{(j)}| < \varepsilon$$

Обычно достаточно двух или трех итераций, чтобы выполнялись предыдущие условия при точности $\varepsilon \approx 2 \div 5\%$. Для примера на фиг. 2 при

$$t_0 = 200, \quad \mu_2^\circ = 0,821, \quad c_1^\circ = 1, \quad c_1^{(1)} = 1,5, \quad c_2^{(1)} = c_3^{(1)} = 0, \quad \mu_2(s_{1/2}^{(2)}) = 0,617,$$

$\mu_2(\dot{s}_{1/2}^{(2)}) = 0,5$
для двух итераций точность составляет $\varepsilon \approx 7\%$.

С физической точки зрения уменьшение «амплитуды» квазиволн ограничивается условиями

$$c_m \geq 0, \quad 1 \leq m \leq n \quad (1.34)$$

а возрастание «амплитуды» квазиволн ограничивается условием

$$u = \text{const} \quad (1.35)$$

так как при больших значениях концентраций компонентов смеси линейная скорость фильтрации u будет переменной и зависящей от концентрации.

2. Проанализируем случай комплексных собственных значений

$$\lambda_{p, p+1} = \lambda^\circ \pm i\lambda^*, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{(p-1)} < \lambda^\circ < \lambda_{(p+2)} < \dots < \lambda_n \quad (2.1)$$

Для линейной изотермы (1.7) решение уравнений (1.1) — (1.3) можно построить с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени.

Аналогично (1.8), (1.9) запишем решение уравнений (1.1) – (1.3) для комплексных собственных значений (2.1) в виде

$$c_m(x, t) = \sum_{k=1}^n H_{mk}^\circ G_k(x, t) + \frac{1}{2} (H_{mp}^\circ + H_{m(p+1)}^\circ) [H(z, z^\circ) - H(z_0, z^\circ)] + \frac{1}{\sigma} (H_{mp}^* - H_{m(p+1)}^*) [F(z_0, z^\circ) - F(z, z^\circ)] + D_m^\circ, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad k \neq p, p+1 \quad (2.2)$$

$$z = (t - x b_0) (2\sqrt{a_0 x})^{-1}, \quad z^\circ = b^\circ \sqrt{x} / \sqrt{a_0}, \quad a_0 = \delta \lambda^\circ (u \beta_0)^{-1}$$

$$z_0 = -b_0 \sqrt{x} / \sqrt{a_0}, \quad b_0 = (1 + \delta \lambda^\circ) / u, \quad b^\circ = \delta \lambda^* / u$$

$$H(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \frac{y^2}{4} \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \cos(yz) dz$$

$$F(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \frac{y^2}{4} \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \sin(yz) dz$$

Уравнения для определения коэффициентов $H_{mk}^\circ, H_{mp}^\circ, H_{mp}^*, H_{m(p+1)}^*$, D_m° можно найти, подставив решения (2.2) для изображений в уравнения (1.8) и условия (1.3). Из решений (2.2) видно, что для квазиволн p ,двигающихся со скоростью $w_p = 1/b_0 = u(1 + \delta \lambda^\circ)^{-1}$, «амплитуда» волны s_m^* изменяется по закону

$$s_m^* = A_m + Q_m (a_0 / \pi)^{1/2} (w_p b^\circ t)^{-1} \exp [(b^\circ)^2 w_p t (4a_0)^{-1}] \quad (2.3)$$

$$A_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1} H_{mk}^\circ, \quad k \neq p, p+1, \quad Q_m = \frac{1}{2} (H_{mp}^\circ + H_{m(p+1)}^\circ + H_{m(p+1)}^* - H_{mp}^*)$$

Так как асимптотические оценки методом перевала [10] для интегралов $H(x, y), F(x, y)$ при $x = w_p t, t = b_0, x, t \rightarrow \infty$ имеют вид

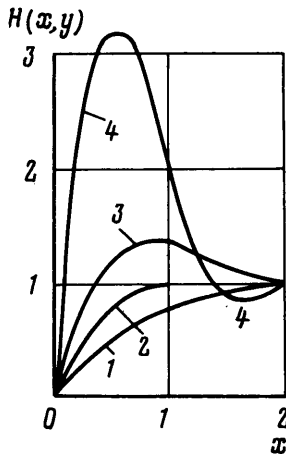
$$F(z, z^\circ) = H(z, z^\circ) \approx \sqrt{a_0} (x b^\circ)^{-1} \exp [(b^\circ)^2 x (4a_0)^{-1}] \quad (2.4)$$

$$z = 1/2 b_0 \sqrt{x/a_0}, \quad z^\circ = b^\circ \sqrt{x/a_0}$$

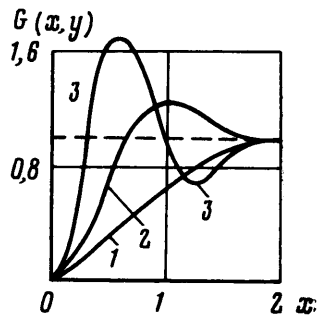
Из уравнений (2.3) следует, что с увеличением (уменьшением) коэффициентов массообмена β_0 «амплитуда» возрастает (уменьшается) пропорционально

$$\sqrt{\beta_0} \exp [\delta^2 (\lambda^*)^2 w_p t \beta_0 (4u \lambda^\circ)^{-1}]$$

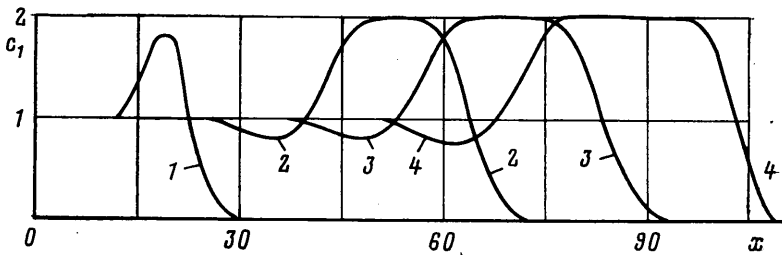
Решение (2.2) в принципе может быть осциллирующим, так как функции $H(x, y), F(x, y)$ (2.2) допускают такую возможность. В качестве примера на фиг. 3, 4 представлена функция $H(x, y)$ для различных значений параметров $y = 0; 1; 2; 3$, а также функции $G(x, y) = \exp(-y^2/4) \times \times F(x, y) / F_0(y), F_0(y) \sim 0,4$ для различных параметров $y = 1; 4; 6$. Методика вычисления интегралов $H(x, y), F(x, y)$ аналогична принятой в работе [11], т. е. сводилась к нахождению обыкновенного дифференциального уравнения, решением которого являются функции $F(x, y), H(x, y)$. Решение найденного обыкновенного дифференциального уравнения представлялось рядами, которые суммировались на ЭВМ. Из графиков на



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

фиг. 3, 4 видно, что осциллирующий характер функции $F(x, y)$ и $H(x, y)$ имеют только для асимптотически больших значений $y \geq 5$ (соответственно больших значений времени t), причем «амплитуда» колебаний для функции $H(x, y)$ порядка ста, а для функции $F(x, y)$ порядка тысячи. Очевидно, что такие большие значения концентраций практически не реализуются, так как при этом нарушаются условия (1.34), (1.35). Таким образом, возможный с теоретической точки зрения осциллирующий режим для комплексных собственных значений при $u = \text{const}$ практически не реализуется, а реализуется режим квазиволн с переменной «амплитудой», аналогичный режиму квазиволн с кратными собственными значениями. Однако при $u = \text{var}$ осциллирующий режим возможен. Теоретическая возможность существования осциллирующего режима при $u = \text{var}$ показана в работе [12].

В качестве примера для случая комплексных собственных значений на ЭВМ была численно проинтегрирована система уравнений (1.2), (1.3), (1.11) для изотерм (1.28) и параметров трехкомпонентной смеси $u = \delta = 1$, $\beta_i = c_i^* = 1$, $c_i^0 = 0$ ($1 \leq i \leq n$), $n = 3$, $a_1 = 1,5$, $a_2 = 4,5$, $a_3 = 6$, $p_{11} = 0,2386$, $p_{12} = 1,5$, $p_{13} = p_{21} = 0$, $p_{22} = 0,477$, $p_{23} = 4$, $p_{31} = 2,856$, $p_{32} = 0$, $p_{33} = 0,0713$. Результаты интегрирования, представляющие распределение концентраций трехкомпонентной смеси вдоль пористой среды, показаны на фиг. 5 ($1-t=40$, $2-t=120$, $3-t=160$, $4-t=200$). Для предыдущих параметров при $c_i = 1$ собственные значения равны $\mu_1^0 = 4,714$, $\mu_{2,3}^0 = 0,741 \pm i0,186$. Режим бегущей волны или стационарного фронта реализуется для собственного значения μ_1^0 . Согласно условиям (1.12) скорость бегущей волны для первого компо-

нента смеси и собственного значения μ_1° равна $w_1=0,985$. Для комплексных собственных значений $\mu_{2,3}$ реализуется нестационарный режим квазибегающей волны с переменной «амплитудой» s_m , уменьшающейся для первого компонента смеси и возрастающей для второго компонента смеси и скоростью волны $w_2 \approx \operatorname{Re} \mu_{2,3} = 0,741$. Скорость изменения «амплитуды» во времени определяется аналогично предыдущему с помощью уравнений (1.31) — (1.32) и находится в соответствии с аналитическими оценками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цабек Л. К. Движение газовой смеси через пористую среду при наличии сорбции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5, с. 95–100.
2. Цабек Л. К. Движение многокомпонентной сорбируемой смеси в пористой среде при наличии предварительного насыщения среды некоторыми компонентами смеси.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 50–56.
3. Цабек Л. К. Движение неизотермической многокомпонентной сорбируемой смеси в пористой среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 155–158.
4. Цабек Л. К. Движение неизотермической сорбируемой смеси с повышенными значениями концентрации через пористую среду.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 5, с. 76–86.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968, 592 с.
6. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. [1917–1967]. М.: Наука, 1969. 545 с. [с. 463].
7. Классон, Стиг. Адсорбционный анализ смесей. М.: Госхимиздат, 1950. 152 с.
8. Физическая адсорбция из многокомпонентных фаз. М.: Наука, 1972. 250 с.
9. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 169 с.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
11. Карпов К. А. Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 327.
12. Цабек Л. К. О новых режимах при движении адсорбируемых смесей через пористую среду.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1372–1376.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1981