

УДК 532.613.5+538.4

## ФИКСАЦИЯ ПУЗЫРЕЙ И КАПЕЛЬ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ В ЖИДКОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

ИЕВЛЕВ И. И., ИСЕРС А. Б.

Рассматривается задача о нахождении электрического поля, удерживающего сферический газовый пузырь в диэлектрической жидкости в поле сил тяжести.

1. Равновесие газового пузыря в жидком непроводящем диэлектрике при наличии электрического и однородного гравитационного полей и при учете действия сил поверхностного натяжения описывается в безразмерных переменных следующими соотношениями [1, 2]:

$$\Delta \Phi_k = 0 \quad (x, y, z) \in V_k \quad (1.1)$$

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} \left[ (\nabla \Phi_2)^2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)^2 \right] + 2\kappa + \text{Bo} z + c = 0 \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (1.2)$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 0, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0, \quad \text{Bo} = (\rho_1 - \rho_2) \frac{g R_0^2}{\alpha} \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (1.3)$$

$$\Phi_1 = U \quad (x, y, z) \in S \quad (1.4)$$

Здесь  $V_1, V_2$  — области, занимаемые жидким диэлектриком и пузырем,  $\Gamma$  — граница пузыря,  $S$  — заданная замкнутая поверхность, на которой поддерживается потенциал электрического поля.  $U, \Phi_k$  — потенциал электростатического поля в обл.  $V_k$  ( $k=1,2$ );  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — диэлектрические проницаемости жидкости и газа,  $\kappa$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ,  $\text{Bo}$  — безразмерный параметр задачи (число Бонда [3]),  $\rho_1, \rho_2$  — плотности жидкости и газа,  $g$  — величина ускорения свободного падения,  $R_0$  — характерный линейный размер задачи,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma$ ,  $z$  — координата оси  $z$  произвольной неподвижной декартовой системы координат (направление  $z$  параллельно и противоположно направлению сил тяжести),  $\partial/\partial n$  — производная по нормали  $n$  к  $\Gamma$ , направленной внутрь объема  $V_1$ ,  $c$  — неизвестная постоянная, для определения которой можно воспользоваться соотношением, задающим объем одной из областей, например  $V_2$  [3]

$$\int_{V_2} dV = V_2 = \text{const}$$

Поставим следующую задачу: найти распределение потенциала  $U$ , создающего электрическое поле, удовлетворяющее соотношениям (1.1) — (1.4) и такое, чтобы при его совместном с гравитационным полем и силами поверхностного натяжения действии пузырь оставался сферическим и неподвижным.

Решение поставленной задачи проведем в два этапа. Сначала найдем  $c, \Phi_2$  и  $\partial \Phi_2 / \partial n$  на  $\Gamma$  (задача А), затем найдем  $U$  (задача В).

2. Рассмотрим решение задачи А. Так как соотношения (1.1) и (1.2) позволяют найти  $\Phi_2$  с точностью до константы, то в дополнение к этим соотношениям потребуем выполнения условия

$$\int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

Заметим, что задача (1.1), (1.2), (2.1) имеет по крайней мере два решения, отличающиеся знаком. Для дальнейшего знак функции  $\Phi_2$  несуществен (при расчетах знак  $\Phi_2$  выбирается произвольным и одинаковым для всех вариантов).

Представим  $\Phi_2$  в виде потенциала простого слоя

$$\Phi_2(P) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(Q)}{d(Q,P)} d\Gamma_Q \quad (2.2)$$

где  $d(Q,P)$  — расстояние между точкой  $Q \in \Gamma$  и произвольной точкой  $P \in V_2$ ,  $\mu(Q)$  — плотность потенциала. Тогда решение задачи А сводится к отысканию постоянной  $c$ , функции  $\mu(Q)$  из соотношений (1.2), (2.1), (2.2) и нахождению  $\Phi_2$  и  $\partial\Phi_2/\partial n$  на  $\Gamma$  с помощью представления (2.2).

Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре пузыря и учтем наличие осевой симметрии в задаче относительно оси  $z$ . Для нахождения  $c$  и  $\mu$  воспользуемся методом наименьших квадратов, который позволяет свести данную задачу к задаче отыскания минимума следующего функционала:

$$F(\mu, c) = R^2 \left[ \int_0^\pi \Phi_2(R, \theta) \sin \theta d\theta \right]^2 + \\ + \int_0^\pi \left\{ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} \left[ \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \Phi_2(R, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left( \frac{\partial \Phi_2(R, \theta)}{\partial r} \right)^2 \right] + c - \frac{2}{R} + \right. \\ \left. + \text{Bo} R \cos \theta \right\} \sin \theta d\theta \quad (2.3)$$

где  $R$  — радиус пузыря, а  $\Phi_2(R, \theta)$ ,  $\partial\Phi_2(R, \theta)/\partial r$  и  $\partial\Phi_2(R, \theta)/\partial \theta$  являются интегральными операторами, ядра которых выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Ядра первых двух операторов имеют интегрируемые особенности, а третьего — сингулярную особенность. При численном решении задачи интегралы в выражении (2.3) заменяем квадратурными формулами, переходим к минимизации функции  $n+1$ -переменных:  $c, \mu(\theta_i), i=1, 2, \dots, n$ .

Вычисления показали, что функционал (2.3) имеет «овражный» характер. Поэтому к функционалу (2.3) добавляется стабилизирующий функционал [4]

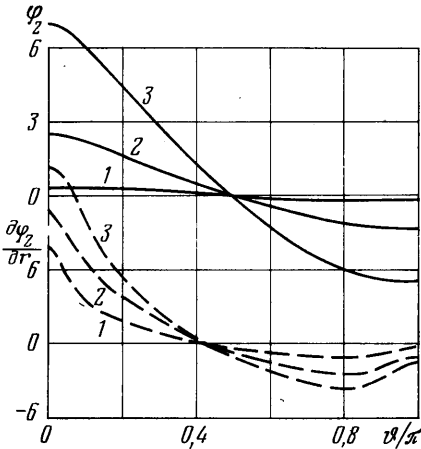
$$\Omega(\mu) = \int_0^\pi \left[ \left( \frac{d\mu}{d\theta} \right)^2 + \mu^2 \right] \sin \theta d\theta$$

умноженный на положительный параметр  $\nu$  (параметр регуляризации). Численный счет, проведенный для выбора оптимального  $\nu$ , показал, что при уменьшении  $\nu$  от 1 до  $10^{-3}$  наблюдается сходимость приближенных решений, а при дальнейшем уменьшении  $\nu$  в приближенном решении

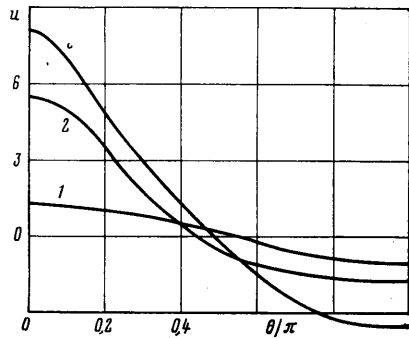
появляются растущие осцилляции. Поэтому в качестве рабочего значения  $\nu$  выбиралось  $\nu=10^{-5}$ . Для контроля точности вычисления для каждого фиксированного значения  $\nu$  вычисления проводились с различным числом узлов в квадратурах и таким образом, чтобы максимальная относительная погрешность нахождения  $\mu$  и  $s$  не превышала 2%.

Результаты численного счета представлены на фиг. 1 графиками функций  $\varphi_2 = \sqrt{\varepsilon_1}/\text{Bo} \Phi_2(R, \theta)$  и  $\partial\varphi_2/\partial r = \sqrt{\varepsilon_1}/\text{Bo} \partial\Phi_2(R, \theta)/\partial r$  для  $\varepsilon_2/\varepsilon_1=0,2$  и  $R=0,1; 0,4; 0,8$  (кривые 1–3 соответственно).

3. Рассмотрим решение задачи В. Эта задача представляет собой задачу Коши для уравнения Лапласа и относится к классу некорректных



Фиг. 1



Фиг. 2

задач. Приближенное решение таких задач требует применения соответствующих методов регуляризации [4].

Применим вторую формулу Грина к функциям  $\Phi_1(Q)$  и  $1/d(P, Q) + \gamma(Q)/r(P)$ , где  $\gamma(Q)$  — гармоническая в  $V_1$  функция, удовлетворяющая условиям  $\partial\gamma(Q)/\partial n = 1$  на  $S$  и  $\gamma(Q) = 0$  на  $\Gamma$ . Получим

$$\int_{\Gamma+S} \left\{ \Phi_1(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[ \frac{1}{d(P, Q)} + \frac{\gamma(Q)}{r(P)} \right] - \frac{\partial \Phi_1(Q)}{\partial n_Q} \left[ \frac{1}{d(P, Q)} + \frac{\gamma(Q)}{r(P)} \right] \right\} dS_Q = \chi(P) \Phi_1(P) \quad (3.1)$$

где  $\chi(P) = 2\pi$ , если  $P \in \Gamma$  или  $P \in S$ , и  $\chi(P) = 4\pi$ , если  $P$  лежит внутри области  $V_1$ . Если точка  $P \in S$ , то соотношение (3.1) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функций  $v(P) \equiv \Phi_1(P) = \Phi_2(P)$ ,

$$w(P) \equiv \partial\Phi_1(P)/\partial n_P = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \partial\Phi_2(P)/\partial n_P$$

В качестве второго интегрального уравнения относительно  $v$  и  $w$  возьмем уравнение, получающееся аналогично (3.1) с  $\gamma(Q) \equiv 0$  и  $P \in \Gamma$ . Полученная система уравнений имеет вид

$$Av + Bw = V, \quad Cv + Dw = W \quad (3.2)$$

$$Av(P) = -2\pi v(P) + \int_S v(Q) \left[ \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{d(P, Q)} + \frac{1}{r(P)} \right] dS_Q$$

$$\begin{aligned}
 Bw(P) &= - \int_s w(Q) \left[ \frac{1}{d(P, Q)} + \frac{\gamma(Q)}{r(P)} \right] dS_Q, \quad P \in S \\
 Cv(P) &= \int_s v(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{d(P, Q)} dS_Q \\
 Dw(P) &= - \int_s w(Q) \frac{1}{d(P, Q)} dS_Q, \quad P \in \Gamma \\
 V(P) &= \int_r \left\{ q(Q) \frac{1}{d(P, Q)} - f(Q) \left[ \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{d(P, Q)} + \frac{1}{r(P)} \frac{\partial \gamma(Q)}{\partial n_Q} \right] \right\} d\Gamma_Q, \quad P \in S \\
 W(P) &= 2\pi f(P) + \int_r \left[ q(Q) \frac{1}{d(P, Q)} - f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{d(P, Q)} \right] d\Gamma_Q, \quad P \in \Gamma \\
 q(Q) &= \frac{\partial \Phi_1(Q)}{\partial n}, \quad f(Q) = \Phi_1(Q), \quad Q \in \Gamma
 \end{aligned}$$

Исключая из системы (3.2)  $v$ , приходим к интегральному уравнению первого рода относительно  $w$

$$Mw = F, \quad M = D - CA^{-1}B, \quad F = W - CA^{-1}V \quad (3.3)$$

с вполне непрерывным оператором. Согласно методу регуляризации, решение задачи (3.3) сводится к отысканию минимума квадратичного функционала

$$I_\beta(w) = \int_\Gamma (Mw - F)^2 d\Gamma + \beta \int_S [(\nabla_s w, w) + w^2] dS \quad (3.4)$$

где  $\beta$  — параметр регуляризации,  $\nabla_s$  — первый дифференциальный параметр Бельтрами на поверхности  $S$  [5]. Соответствующее функционалу (3.4) уравнение Эйлера имеет вид

$$\beta(-\Delta_s w + w) + M^* M w = M^* F \quad (3.5)$$

где  $\Delta_s$  — второй дифференциальный параметр Бельтрами на  $S$ .

Для численного решения уравнения (3.5) удобно ввести вспомогательные переменные  $\omega = A^{-1}V$ ,  $\xi = (A^*)^{-1}C^*F$ ,  $\eta = -A^{-1}Bw$ ,  $\zeta = -(A^*)^{-1}C^*(Dw + C\eta)$  и перейти к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \beta(-\Delta_s w + w) + D^* D w + D^* C \eta + B^* \zeta + D^* C \omega + B^* \xi &= D^* W \\
 Bw + A\eta &= 0, \quad C^* D w + C^* C \eta + A^* \zeta = 0 \\
 A^* \xi + C^* C \omega &= C^* W, \quad A\omega = V
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

По найденному решению системы (3.6) находим  $U = \omega + \eta$ .

В частном случае, когда  $S$  является сферой радиуса 1 с центром, совпадающим с центром  $\Gamma$ , в качестве  $\gamma$  можно взять  $\gamma = 1/r - 1/R$ .

Численный счет, проведенный для выбора оптимального  $\beta$ , показал, что при уменьшении  $\beta$  от 1 до  $10^{-3}$  наблюдается сходимость приближенных решений, а при дальнейшем уменьшении в приближенном решении появляются растущие осцилляции. Поэтому в качестве оптимального  $\beta$  выбиралось  $\beta = 10^{-3}$ .

Результаты численного счета представлены на фиг. 2 графиками функции  $u = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0} U(\theta)$  при  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0,2$  и  $R = 0,1; 0,4; 0,8$  и (кривые 1–3 соответственно).

Таким образом, если в точках сферы  $S$  создать потенциал электрического поля, соответствующий распределению  $U(\theta)$ , изображенному на фиг. 2, то возникает электрическое поле, которое будет препятствовать деформации и движению газового пузыря в поле сил тяжести. Из графиков фиг. 2 видно, что характер электрического поля, определяемый видом кривых  $U(\theta)$ , мало меняется с изменением  $R$ , а напряженность электрического поля уменьшается с уменьшением  $R$ .

В заключение авторы благодарят И. Е. Тарапова за полезные советы и обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.— *Магнитная гидродинамика*, 1972, № 1, с. 3–11
2. Иевлев И. И., Иссерс А. Б. Равновесие и устойчивость поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом и гравитационном полях.— *Магнитная гидродинамика*, 1976, № 4, с. 89–95.
3. *Гидромеханика невесомости*. М.: Наука, 1976. 504 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
5. Мак-Коннелл А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.

Харьков

Поступила в редакцию  
27.II.1981