

УДК 532.5.013.4+536.25

КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СМЕСЯХ С КОНЦЕНТРАЦИОННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

КОЛЕСНИКОВ А. К., ЯКУШИН В. И.

В работах авторов [1, 2] рассмотрена конвективная устойчивость равновесия горизонтального слоя бинарной смеси с внутренним тепловыделением, мощность которого пропорциональна концентрации одной из компонент. Такие концентрационные источники тепла могут появляться, например, в результате процессов радиоактивного распада, селективного поглощения излучения, а также при некоторых типах химических реакций. В рамках линейной теории устойчивости были определены условия возникновения монотонной и колебательной конвекции в слое, на границах которого заданы постоянные одинаковые температуры и различные концентрации тепловыделяющей компоненты.

В настоящей работе численно исследуется устойчивость равновесия смеси с концентрационными источниками тепла относительно конечных возмущений и изучаются конвективные движения, развивающиеся после потери устойчивости. Решение уравнений термоконцентрационной конвекции осуществляется методом сеток для плоской области прямоугольной формы, моделирующей конвективную ячейку в горизонтальном слое. Построены нейтральные кривые для возмущений конечной амплитуды, найдены области существования подкритических движений, проведено сравнение с результатами линейной теории.

Отметим, что в отличие от конвекции в чистой жидкости исследованию нелинейной конвекции в бинарной смеси, в особенности с учетом внутреннего тепловыделения различной природы, посвящено сравнительно небольшое число работ, например [3–8]. Вопросы устойчивости двухкомпонентной среды по отношению к конечным возмущениям затрагивались лишь в статьях [6–8].

Рассмотрим конвекцию в прямоугольной области размером $l \times d$, заполненной бинарной смесью с концентрационными источниками тепла. Удельная мощность внутреннего тепловыделения Q пропорциональна концентрации C активной компоненты: $Q = Q_0 C$. Твердые горизонтальные границы области $z=0$ и $z=d$ поддерживаются при одинаковой температуре, которая в дальнейшем принимается за начало отсчета. На этих границах задаются различные значения концентрации так, что в равновесии в полости устанавливается постоянный направленный вверх градиент концентрации активной компоненты A ; на нижней границе $z=0$ $C=0$. Боковые границы $x=0$ и $x=l$ предполагаются свободными теплоизолированными и непроницаемыми для вещества. Такая область моделирует плоскую конвективную ячейку в горизонтальном слое с длиной волны $2l$.

Уравнения Буссинеска для смеси с концентрационными источниками тепла в отсутствие термодиффузии и диффузионной теплопроводности [1, 9] в случае двумерной конвекции запишем через функцию тока ψ и вихрь ω , связанные с составляющими скорости v_x и v_z соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \omega = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Если выбрать в качестве единиц измерения расстояния, времени, функции тока, температуры и концентрации соответственно d , d^2/ν , χ , $Q_0 A d^3 / 6\kappa$ и $A d$ (ν , κ и χ — коэффициенты кинематической вязкости, тепло- и температуропроводности), то безразмерные уравнения примут вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{P} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \Delta \omega + R \frac{\partial T}{\partial x} + R_d \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \Delta T + 6C$$

$$P_d \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{P_d}{P} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial z} \right) = \Delta C$$

$$R = \frac{g \beta_1 Q_0 A d^8}{6 \kappa \nu \chi}, \quad R_d = \frac{g \beta_2 A d^4}{\nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad P_d = \frac{\nu}{D}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_c, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_T$$

В системе уравнений (1) R , P и R_d , P_d — тепловое и диффузионное числа Рэлея и Прандтля; D — коэффициент диффузии; g — ускорение свободного падения; β_1 и β_2 — коэффициенты, определяющие зависимость плотности среды ρ от температуры и концентрации $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$; для легкой тепловыделяющей компоненты $\beta_2 > 0$, для тяжелой — $\beta_2 < 0$.

В рассматриваемой области уравнения (1) допускают решение

$$\psi_0 = 0, \quad T_0 = z(1 - z^2), \quad C_0 = z \quad (2)$$

соответствующее состоянию механического равновесия. Устойчивость равновесных распределений температуры и концентрации (2) по отношению к малым возмущениям исследована в [2]. Проведенный анализ условий возникновения конвекции показывает, что неустойчивость может быть как монотонной, так и колебательной. Другой особенностью задачи является существование двух нейтральных кривых, связанных с тепловым и концентрационным механизмами неустойчивости.

В случае конечных возмущений равновесия следует ожидать не только изменения границ устойчивости, но и характера возникающей конвекции. Эволюция конечных возмущений, а также форма и амплитуда установившегося движения определяются из решения нелинейных уравнений (1).

Интегрирование системы (1) будем проводить методом конечных разностей. Для этого необходимо записать значения ψ , ω , T и C в граничных узлах расчетной сетки. На всех границах выбранной области из условий прилипания, непрерывности и непроницаемости имеем

$$\psi_{\Gamma} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали. В соответствии с постановкой задачи на горизонтальных и вертикальных границах соответственно имеем

$$z=0: \quad T=0, \quad C=0; \quad z=1: \quad T=0, \quad C=1 \quad (4)$$

$$x=0, \quad x=l: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Здесь l — безразмерная длина области.

Следует отметить, что боковые границы конвективной ячейки, вообще говоря, не являются вертикальными и для более строгого моделирования на этих границах следует ставить условия периодичности для всех переменных задачи. Однако, как показывают расчеты, даже при пятикратном превышении порога устойчивости вертикальность границ практически не нарушается.

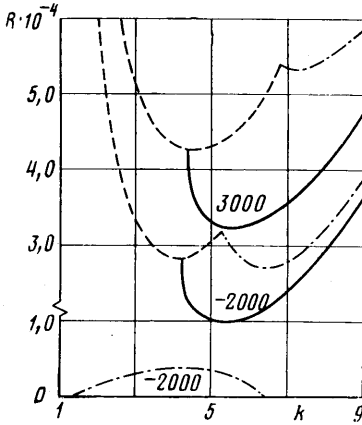
Величину вихря скорости на горизонтальных границах можно получить стандартной процедурой разложения функции тока в приграничных узлах расчетной сетки в ряд Тейлора. Если ограничиться вторым порядком аппроксимации по h (h — шаг сетки), то значения ω определяются, например, по формуле [10]

$$z=0, \quad z=1: \quad \omega = \frac{\psi_1 - 8\psi_2}{2h^2} \quad (6)$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 — значения ψ в узлах, отстоящих по нормали к границе на расстояниях h и $2h$. На свободных боковых границах

$$x=0, \quad x=t: \quad \omega=0 \quad (7)$$

Вычисление сеточных функций ω , T , C краевой задачи (1), (3) — (7) производилось из конечно-разностного аналога уравнений (1) по схеме продольно-поперечной прогонки [11]. Определение ψ из уравнения Пуассона $\Delta\psi = -\omega$ осуществлялось итерационным методом Либмана с последовательной верхней релаксацией [12]. В расчетах использовались квадратные сетки с шагом $1/22 \leq h \leq 1/12$. Большинство вычислений проведено с шагом по времени $\Delta t = h^2/2$, контрольные вычисления с $\Delta t = h^2/4$.



Фиг. 1

Для определения границы конвективной устойчивости смеси относительно конечно-амплитудных возмущений в исследуемой области на фоне равновесных распределений (2) задавалось начальное возмущение в виде распределенного вихря и прослеживалось его развитие. В зоне устойчивости равновесия начальное возмущение затухает, в зоне неустойчивости после некоторого переходного процесса система приходит в стационарное состояние, соответствующее конвективному движению. Граница между этими зонами определяет критические условия возникновения конвекции.

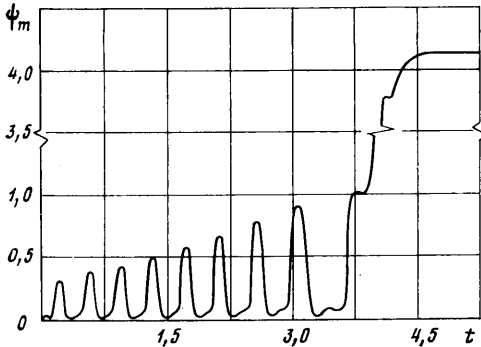
Перейдем к обсуждению результатов. Для удобства сопоставления с линейной теорией далее вместо l будем пользоваться волновым числом $k = \pi/l$. При оценке точности численного счета для различных k определялся порог устойчивости по отношению к малым возмущениям. Отличие сеточных результатов от данных линейной теории, связанное с погрешностями численного счета, для указанных выше значений h не превышает 3%. Это позволяет проводить сравнение результатов конечно-разностных вычислений непосредственно с данными линейной задачи устойчивости [2] для всех исследованных значений параметров.

На фиг. 1 сплошными линиями изображены нейтральные кривые $R(k)$ для возмущений конечной амплитуды при $P=1$, $P_d=2$ и значений $R_d=3000$ и $R_d=-2000$. Положительные R_d соответствуют случаю легкой тепловыделяющей компоненты ($\beta_2 > 0$), отрицательные — тяжелой ($\beta_2 < 0$). Для сравнения на этом же графике приведены кривые нейтральной устойчивости смеси относительно малых возмущений. Штриховыми кривыми показана граница колебательной неустойчивости, штрихпунктирными — монотонной. При $R_d = -2000$, согласно [2], возможно существование двух нейтральных кривых, верхняя из которых обусловлена тепловым механизмом неустойчивости, а нижняя — концентрационным. Область устойчивости заключена между этими кривыми. При $R_d = 3000$ устойчивым состояниям смеси соответствует зона между нейтральными кривыми и осью абсцисс.

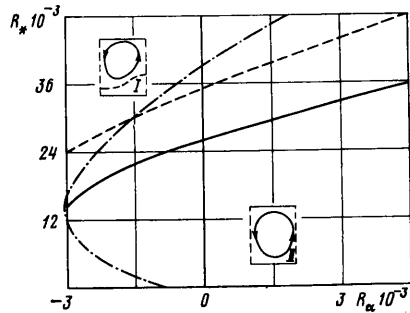
Как видно из графиков, для волновых чисел $k > 4,4$ при $R_d = 3000$ и $k > 4,2$ при $R_d = -2000$ порог устойчивости по отношению к конечным возмущениям становится ниже критических чисел Рэлея, полученных в линейной задаче, что свидетельствует о жестком возбуждении конвекции в указанных интервалах волновых чисел. Для других k при значениях R , лежащих ниже нейтральных кривых малых возмущений, конечно-ампли-

тудные возмущения затухают, т. е. подкритические движения отсутствуют и конвекция возникает мягким образом. Так же мягко нарушается равновесие и при переходе через нейтральную кривую концентрационных возмущений.

Глубина подкритичности ΔR в области жесткой неустойчивости для фиксированных значений параметров P , P_d и R_d зависит от волнового числа k и может достигать значительных величин. Так, при $R_d=3000$ и $k=6,8$ ΔR составляет 35% от результата линейного анализа. Минимальные значения пороговых чисел Рэлея для возмущений конечной амплитуды при $R_d=3000$ и $R_d=-2000$ равны соответственно $R_* = 3,25 \cdot 10^4$ и $R_* =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$= 2,00 \cdot 10^4$. В обоих случаях этим значениям R_* отвечают одинаковые критические волновые числа $k_* \approx 5,5$, которые существенно отличаются от таковых, найденных из линейной теории ($k_* = 4,5$ при $R_d = 3000$ и $k_* = 6,4$ при $R_d = -2000$).

Особый интерес представляет разность ΔR_* критических значений числа Рэлея R_* , получаемых в линейной и нелинейной задачах. Для $R_d = 3000$ величина $\Delta R_* = 1,03 \cdot 10^4$, что составляет 24%; для $R_d = -2000$ $\Delta R_* = 0,700 \cdot 10^4$, или 26%.

Проверочные расчеты показали, что глубина подкритичности не зависит от величины шага по времени Δt и практически не меняется при варьировании пространственного шага h в указанных выше пределах.

По данным работы [2], неустойчивость системы может иметь как монотонный, так и колебательный характер. Расчеты, проведенные для возмущений конечной амплитуды, показывают, однако, что после потери устойчивости при всех исследованных значениях параметров в смеси устанавливается стационарное движение. В тех случаях, когда по линейной теории система неустойчива относительно колебательных возмущений, в нелинейной задаче при $R > R_*$ малые возмущения нарастают вначале также колебательным образом, но при достижении некоторой амплитуды этот колебательный режим в свою очередь оказывается неустойчивым и в слое устанавливается стационарное конвективное движение. Описанный процесс иллюстрирует фиг. 2, на которой изображена зависимость максимального значения функции тока ψ_m от времени вблизи колебательной нейтральной кривой при $P=1$, $P_d=2$, $R_d=3000$ и $k=5,5$.

Результаты исследования подкритической конвекции при различных значениях диффузионного числа Рэлея обобщены на диаграмме $R_*(R_d)$ на фиг. 3 ($P=1$, $P_d=2$). Сплошная линия построена по данным нелинейного анализа, штриховая и штрихпунктирные кривые ограничивают соответственно зоны колебательной и монотонной неустойчивости для малых

возмущений. Неоднозначность монотонной ветви в координатах (R_*, R_d) связана с существованием двух независимых нейтральных кривых при отрицательных R_d .

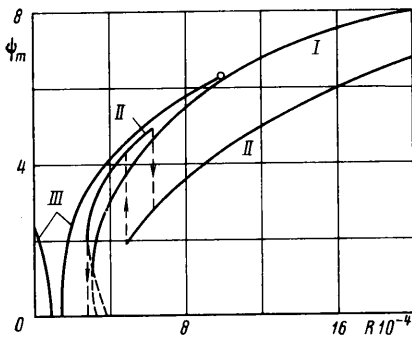
Из графиков $R_*(R_d)$ на фиг. 3 следует, что возмущения конечной амплитуды значительно сокращают размеры области конвективной устойчивости равновесия смеси. Глубина подкритичности с уменьшением значений R_d убывает до нуля вблизи $R_d = -3050$, при котором происходит слияние нейтральных кривых теплового и концентрационного механизмов неустойчивости. На участке кривой $R_*(R_d)$, соответствующем концентрационной неустойчивости, как уже отмечалось, возникновение конвекции происходит мягким образом и результаты исследования устойчивости для малых и конечных возмущений совпадают.

Развивающиеся в слое конвективные движения различны для теплового и концентрационного механизмов неустойчивости. Полученные в расчетах структуры линий тока при малых надкритичностях приведены качественно на фиг. 3. Движения типа I относятся к области тепловой неустойчивости, при которой конвекция происходит преимущественно в верхней части слоя с неустойчивой тепловой стратификацией, затрагивая и элементы среды в устойчиво стратифицированной области (проникающая конвекция). Вблизи нижней границы слоя образуется вихревое движение противоположного знака с весьма слабой интенсивностью (застойная зона). Граница между вихрями показана пунктиром. Такая структура движения обуславливает сильное искривление изолиний температуры и концентрации у верхней границы. Движение типа II соответствует неустойчивости концентрационной природы, при которой конвекция происходит во всей толщине слоя. Описанная картина движений полностью согласуется с представлениями, вытекающими из анализа собственных функций линейной задачи устойчивости, полученных в [2].

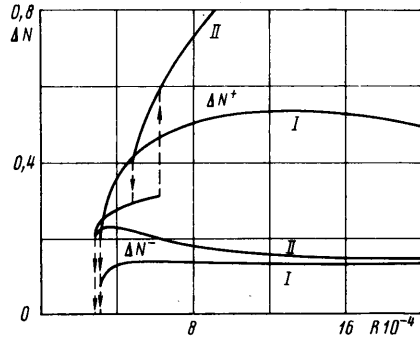
С ростом числа Рэлея интенсивность конвекции увеличивается и у верхней границы области постепенно формируется пограничный слой. Зависимость амплитуды конвективного движения от числа Рэлея $\psi_m(R)$ для некоторых характерных значений параметров изображена на фиг. 4 (I — $P=1$, $P_d=2$, $R_d=0$, $k=6.3$; II — 1, 2, 0, 4.7; III — 1, 1.2, -3800, 5.3); пунктирными кривыми отмечены неустойчивые состояния. Графики I и II отвечают случаю жесткого возбуждения конвекции в области тепловой неустойчивости.

Из результатов, представленных на фиг. 4, следует, что с ростом интенсивности конвективное движение может либо изменять свою структуру, либо сохранять ее даже при довольно больших надкритичностях. В результате неустойчивости устанавливается новое стационарное движение с удвоенным значением волнового числа (частный случай неустойчивости Экхауза). В некотором интервале чисел Рэлея при этом возможно существование двух стационарных режимов, смена которых сопровождается гистерезисными явлениями (кривая II).

Зависимость III на фиг. 4 иллюстрирует развитие конвекции в области значений параметров, в которой одновременно существуют две нейтральные кривые. Левая ветвь относится к зоне концентрационной неустойчивости, правая — тепловой неустойчивости. Эти ветви разделены по числу Рэлея интервалом устойчивости, ширина которого, вообще говоря, отличается от даваемой линейной теорией. Такое отличие обуславливается возможностью жесткого возбуждения конвекции на правой ветви кривой III; на левой ветви возникновение конвекции имеет мягкий характер. Для случая, представленного зависимостью III, движение на обеих ветвях развивается мягким образом и ширина интервала устойчивости совпадает с известной из линейной теории.



Фиг. 4



Фиг. 5

В проведенных расчетах стационарные решения уравнений термоконцентрационной конвекции конечно-разностным методом удавалось получать лишь до некоторого предельного числа Рэлея, после которого, как правило, появлялись нерегулярные колебания сеточных функций. Пример такого рода концевой точки показан на кривой III.

Интенсивность развитой конвекции удобно характеризовать также удельными потоками тепла (числом Нуссельта N) и активной компоненты (диффузионным аналогом числа Нуссельта N_d) через горизонтальные границы области интегрирования

$$N = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial T}{\partial z} dx, \quad N_d = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial C}{\partial z} dx$$

В отсутствие конвекции тепловой поток связан лишь с теплопроводным механизмом и число Нуссельта на верхней границе $N_0^+ = 2$, а на нижней $|N_0^-| = 1$. Различие значений N_0^+ и N_0^- в этом случае обусловлено характером внутреннего тепловыделения, приводящего к асимметрии равновесного температурного профиля (2). Концентрационные потоки через верхнюю и нижнюю границы в покоящейся смеси одинаковы $N_{d0}^+ = N_{d0}^- = 1$.

На фиг. 5 показаны зависимости $\Delta N^+(R)$ (теплопоток через верхнюю границу) и $\Delta N^-(R)$ (теплопоток через нижнюю границу), являющиеся конвективными добавками к равновесным значениям числа Нуссельта N_0^+ и N_0^- . Кривые I и II построены при тех же значениях параметров, что и соответствующие кривые на фиг. 4. Зависимость I относится к случаю, когда конвективное движение с ростом R сохраняет свою структуру. Теплопоток через нижнюю границу при этом практически постоянен, а через верхнюю сильно зависит от R . Для других параметров (кривые II) интенсификация конвекции сопровождается увеличением общего теплопотока. Особый интерес здесь представляет зависимость $\Delta N^+(R)$ на верхней границе области. Как видно из графика, перестройка конвективного движения с одновихревого на двухвихревое сопровождается скачкообразным увеличением теплоотдачи почти в 2 раза; при обратной перестройке такой скачок значительно слабее.

Сходным образом ведут себя зависимости диффузионного числа Нуссельта $\Delta N_d(R)$.

Проведенное исследование показывает, что картина возникновения конвекции в бинарных смесях с внутренним тепловыделением под воздействием конечно-амплитудных возмущений содержит ряд существенных отличий от результатов линейного анализа устойчивости для таких систем.

Авторы благодарны Е. М. Жуховицкому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников А. К., Якушин В. И. О конвективной неустойчивости смеси с концентрационными источниками тепла.— Инж.-физ. ж., 1979, т. 36, № 4, с. 708–714.
2. Колесников А. К., Якушин В. И. О возникновении конвекции в смесях с концентрационными источниками тепла.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 21–27.
3. Бронштейн И. С., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Любимов Д. В., Тарунин Е. Л., Чернатинский В. И. Численное исследование нестационарной термоконцентрационной конвекции в замкнутой полости.— В кн.: Гидродинамика. Вып. 5, с. 209–225. (Уч. зап. Перм. ун-т, 1974, № 316).
4. Штессель Э. А., Прибыткова К. В., Жукова Л. А. Характеристики теплового самовоспламенения в условиях естественной конвекции.— Физика горения и взрыва, 1979, т. 15, № 5, с. 3–11.
5. Gutkowicz-Krusin D., Collins M. A., Ross J. Rayleigh – Benard instability in non-reactive binary fluids. 2. Results.— Phys. Fluids, 1979, v. 22, № 8, p. 1451–1460.
6. Huppert H. E., Moore D. R. Nonlinear double-diffusive convection.— J. Fluid Mech., 1976, v. 78, № 4, p. 821–854.
7. Platten J. K., Chavepeyer G. Finite amplitude instability in two-component Bénard problem.— In: Proc. Conf. Instabil. and Dissipat. Struct. Hydrodyn. (Adv. Chem. Phys., v. 32). New York e.a., 1975, p. 281–322.
8. Platten J. K., Chavepeyer G. Nonlinear two dimensional Bénard convection with Soret effect; free boundaries.— Int. J. Heat and Mass. Transfer, 1977, v. 20, № 2, p. 113–122.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
10. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. 11. М.: Изд-во МГУ, 1968, с. 27–31.
11. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.
12. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 487 с.

Пермь

Поступила в редакцию
20.IV.1981